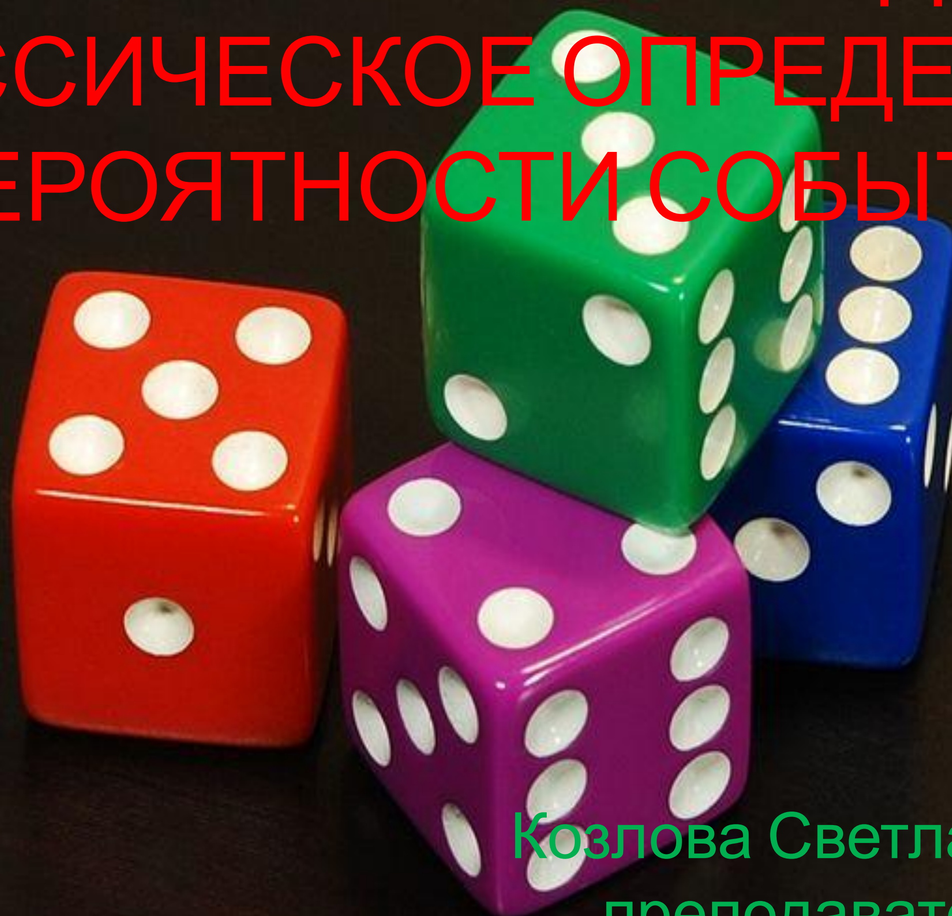
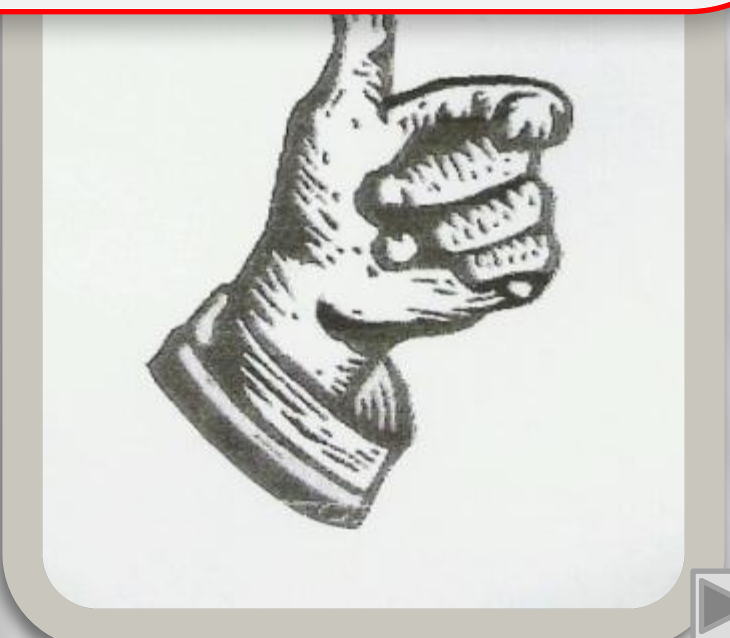
# СОБЫТИЯ И ИХ ВИДЫ. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ.

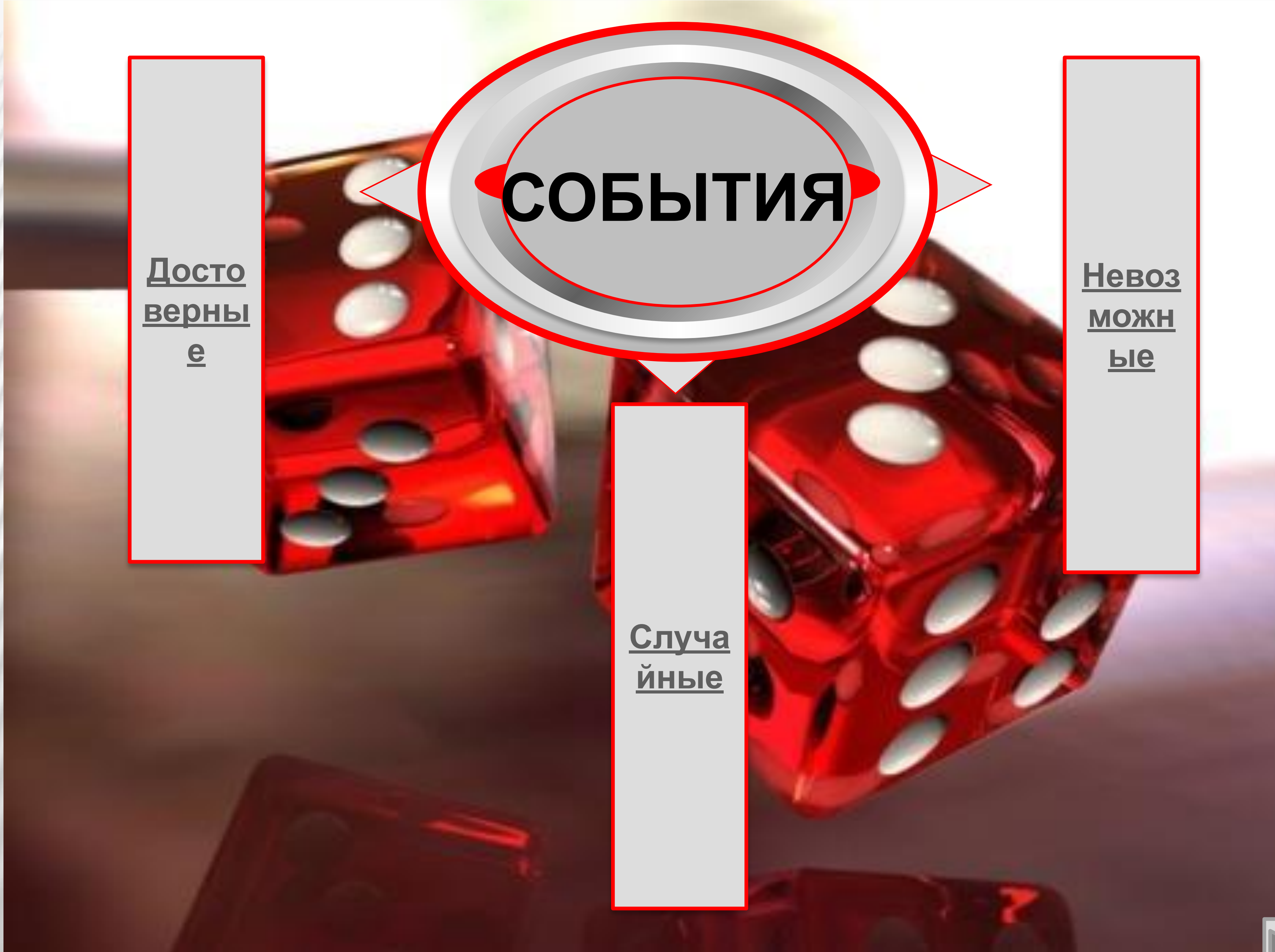


Козлова Светлана Викторовна
преподаватель математики
КГБПОУ «Назаровский энергостроительный техникум»
г. Назарово Красноярского края

**Теория вероятностей** – это раздел математики, изучающий *вероятностные закономерности* массовых однородных *случайных событий*.

- **Опыт** (испытание) – совокупность условий, при которых рассматривается появление случайного события.
- **Исход** - это результат опыта (испытания).
- **Событие** – это ожидаемый результат опыта (испытания).





# СОБЫТИЯ

[Достоверные]

[Случайные]

[Невозможные]

# ЗАДАНИЕ 1.

Для каждого из следующих опытов определить какие события являются достоверными, случайными, невозможными.

*__Опыт 1.__* В группе 25 студентов, есть юноши и есть девушки.

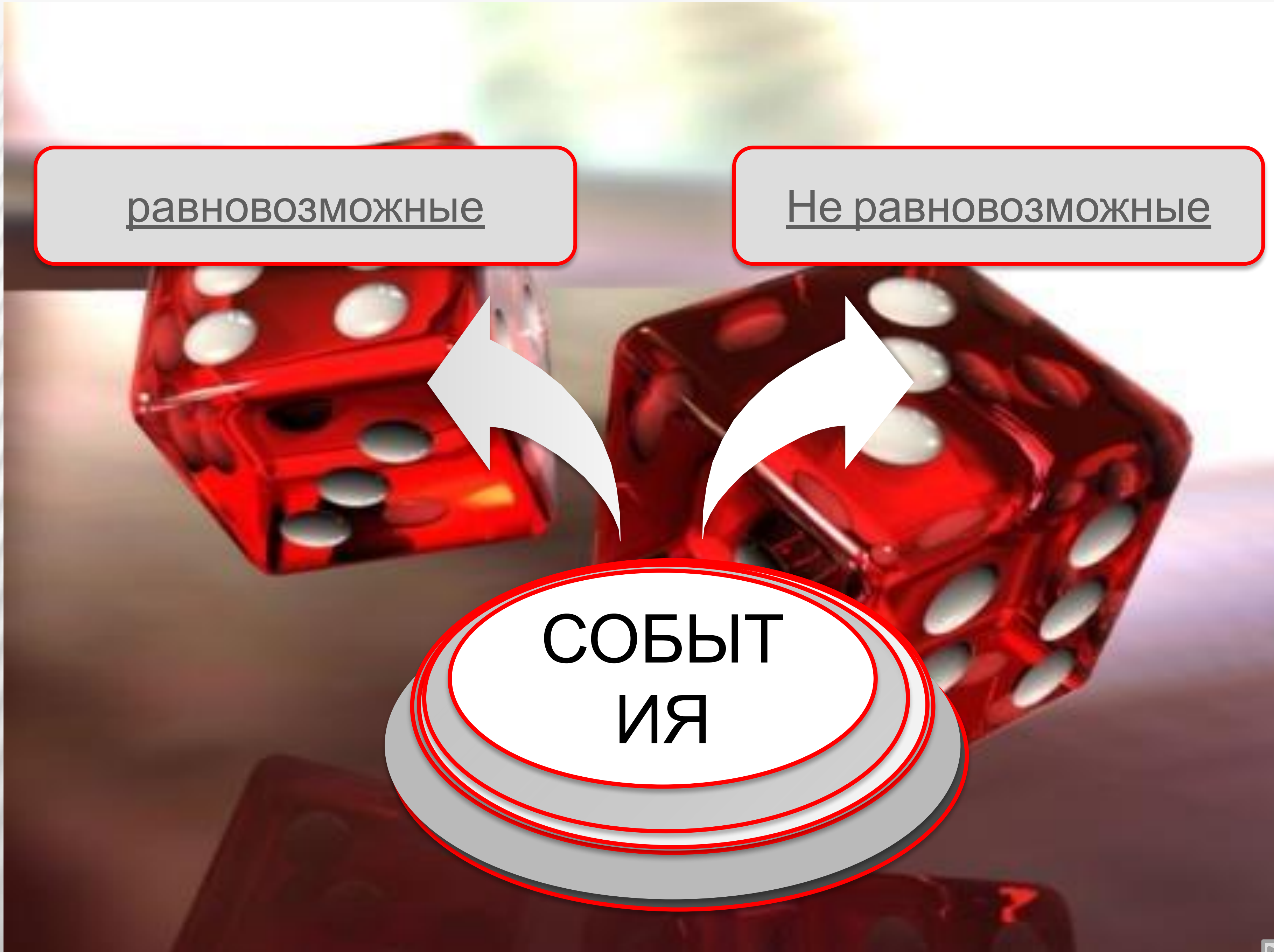
__События:__

a) случайным образом выбранный студент – девушка;
b) у двоих студентов день рождения 31 февраля;
c) всем студентам группы больше 13 лет.

*__Опыт 2.__* При бросании трех игральных костей.

__События:__

a) сумма выпавших на трех костях очков меньше 15;
b) на первой кости выпало 2 очка, на второй – 3 очка, на третьей – 6 очков;
c) сумма выпавших на трех костях очков равна 19.


равновозможные
Не равновозможные
СОБЫТ
ИЯ

# СОБЫТИЯ

СОВМЕСТНЫЕ

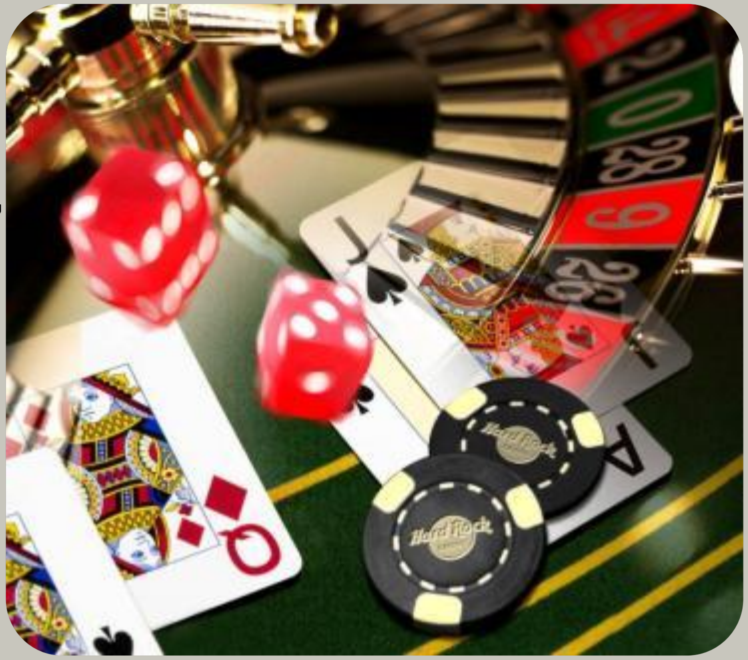
НЕСОВМЕСТНЫЕ

ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ

# ЗАДАНИЕ 2.

Найти пары совместных и несовместных событий, связанных с однократным бросанием игральной кости.

1) выпало 3 очка,
2) выпало нечетное число очков,
3) выпало менее 4 очков,
4) выпало 6 очков,
5) выпало четное число очков,
6) выпало более 4 очков.



# ПОЛНАЯ ГРУППА СОБЫТИЙ

Совокупность событий $A_1$, $A_2$, . . . ,$A_n$ образуют полную группу событий , если они попарно несовместны и появление одного и только одного из них является достоверным событием.

<u>Например:</u> *При подбрасывании игральной кости полная группа событий состоит из сл. событий:*

*$A_1$ - «выпадение 1 очка», $A_2$ – «выпадение 2 очков», $A_3$ – «выпадение 3 очков», $A_4$ – «выпадение 4 очков», $A_5$ – «выпадение 5 очков», $A_6$ – «выпадение 6 очков».*

# КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ

Вероятностью события называется отношение числа элементарных исходов опыта, благоприятствующих данному событию, к числу всех равновозможных элементарных исходов опыта:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$ где

А – событие,

*m* - число благоприятствующих исходов опыта,

*n* - число всех равновозможных элементарных исходов опыта,

Р(А) - вероятность наступления события А.

# СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОБЫТИЯ

1. Если А – событие, то $0 \le P(A) \le 1$.
2. Если А – достоверное событие, то P(A) = 1.
3. Если А – невозможное событие, то P(A) = 0.
4. Если А – случайное событие, то

   $0 < P(A) < 1$.

5. Если А и $\bar{A}$ - противоположные события, то

   $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

6. Если $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ – полная группа событий, то

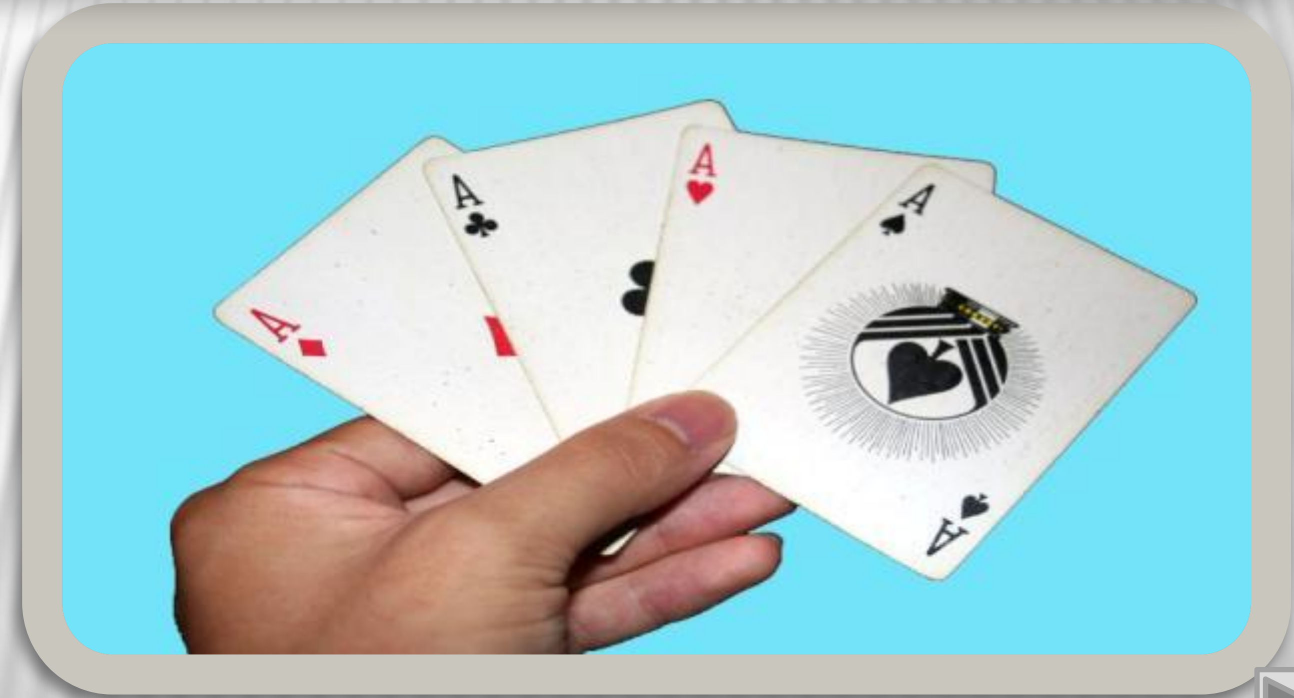
   $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n) = 1$

# ЗАДАЧА 1.

В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) не чёрным.

| Дано: | Решение: |
|---|---|
| A – «Наугад извлеченный шар окажется белым»;<br>$m_A = 15$;<br>B – «Наугад извлеченный шар окажется не черным»;<br>$m_B = 15+5 = 20$;<br>$n = 30$. | а) $P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.<br>б) $P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$.<br><br>Ответ: $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{2}{3}$. |
| а) P(A) = ?<br>б) P(B) = ? | |

События А и В называются независимыми, если появление события В не оказывает влияния на появление события А, а появление события А не оказывает влияния на появление события В.



# ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕРОЯТНОСТЯМИ

| Сложение вероятностей несовместных событий | наступит или А, или В | $P(A+B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ |
|---|---|---|
| Умножение вероятностей несовместных событий | наступит и А, и В | $P(AB) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ |
| Сложение вероятностей совместных независимых событий | наступит или А, или В, или А и В | $P(A+B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A) \cdot P(B)$ |

# САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

| ВАРИАНТ 1 | ВАРИАНТ 2 |
|---|---|
| **№1.** Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с 1-го, пять со 2-го, семь с 3-го и четыре с 4-го. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или третьего склада. | **№1.** Аптека получила лекарства в коробках с трех оптовых складов: пять с 1-го, три со 2-го, шесть с 3-го. Случайным образом выбрана коробка для продажи. Какова вероятность того, что это будет коробка со второго или третьего склада. |
| **№2.** В трех урнах имеется по 6 белых и по 4 черных шара. Из каждой урны извлекают наудачу по одному шару. Найти вероятность того, что: все три шара будут белыми. | **№2.** В трех урнах имеется по 6 белых и по 4 черных шара. Из каждой урны извлекают наудачу по одному шару. Найти вероятность того, что: все три шара будут черными. |
| **№3.** Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,6. Найти вероятность того, что хотя бы один из стрелков попадёт в мишень. | **№3.** Груз в пункт назначения можно доставить речным транспортом или автотранспортом. Вероятность того, что груз будет доставлен по реке, равна 0,7, автотранспортом – 0,5. Найти вероятность того, что груз будет доставлен хотя бы одним видом транспорта. |

# РЕШЕНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

| ВАРИАНТ 1 | ВАРИАНТ 2 |
|---|---|
| № 1. Дано:<br>$A_1$ – «Выбран ящик с 1 склада»,<br>$A_2$ – «Выбран ящик со 2 склада»,<br>$A_3$ – «Выбран ящик с 3 склада»,<br>$A_4$ – «Выбран ящик с 4 склада»,<br>$B$ – «Выбран ящик с 1 или 3 склада»,<br>$n = 4+5+7+4 = 20$,<br>$m_{A_1} = 4$, $m_{A_2} = 5$,<br>$m_{A_3} = 7$, $m_{A_4} = 4$. | № 1. Дано:<br>$A_1$ – «Выбрана коробка с 1 склада»,<br>$A_2$ – «Выбрана коробка со 2 склада»,<br>$A_3$ – «Выбрана коробка с 3 склада»,<br>$B$ – «Выбрана коробка со 2 или 3 склада»,<br>$n = 5 + 3 + 6 = 14$,<br>$m_{A_1} = 5$, $m_{A_2} = 3$, $m_{A_3} = 6$, |
| $P(B) = ?$ | $P(B) = ?$ |
| Решение:<br>$P(A_1) = \frac{m_{A_1}}{n} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$<br>$P(A_3) = \frac{m_{A_3}}{n} = \frac{7}{20} = 0{,}35.$<br>$P(B) = P(A_1 + A_3) = P(A_1) + P(A_3) =$<br>$= 0{,}2 + 0{,}35 = 0{,}55.$<br>Ответ: $P(B) = 0{,}55$ | Решение:<br>$P(A_2) = \frac{m_{A_2}}{n} = \frac{3}{14}.$<br>$P(A_3) = \frac{m_{A_3}}{n} = \frac{6}{14}.$<br>$P(B) = P(A_2 + A_3) = P(A_2) + P(A_3) =$<br>$= \frac{3}{14} + \frac{6}{14} = \frac{9}{14}.$ Ответ: $P(B) = \frac{9}{14}.$ |

# РЕШЕНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

| ВАРИАНТ 1 | ВАРИАНТ 2 |
|---|---|
| № 2. Дано:<br>$A_1$ – «Из 1 урны извлечен белый шар»,<br>$A_2$ – «Из 2 урны извлечен белый шар»,<br>$A_3$ - «Из 3 урны извлечен белый шар»,<br>$A$ – «Все три шара белые»,<br>$n = 6 + 4 = 10$,<br>$m_{A_1} = m_{A_2} = m_{A_3} = 6.$ | № 2. Дано:<br>$A_1$ – «Из 1 урны извлечен черный шар»,<br>$A_2$ – «Из 2 урны извлечен черный шар»,<br>$A_3$ - «Из 3 урны извлечен черный шар»,<br>$A$ – «Все три шара черные»,<br>$n = 6 + 4 = 10$,<br>$m_{A_1} = m_{A_2} = m_{A_3} = 4.$ |
| $P(A) = ?$ | $P(A) = ?$ |
| Решение:<br>$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) =$<br>$= \frac{m_{A_1}}{n} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$<br>$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) =$<br>$= 0{,}6^3 = 0{,}216.$<br>Ответ: $P(A) = 0{,}216.$ | Решение:<br>$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) =$<br>$= \frac{m_{A_1}}{n} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0{,}4..$<br>$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) =$<br>$= 0{,}4^3 = 0{,}064.$<br>Ответ: $P(A) = 0{,}064.$ |

# РЕШЕНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

| ВАРИАНТ 1 | ВАРИАНТ 2 |
|---|---|
| № 3. Дано:<br>*A* – «Первый стрелок попал в мишень», $P(A) = 0{,}8$;<br>*B* – «Второй стрелок попал в мишень», $P(B) = 0{,}6$;<br>*C* – «Хотя бы один стрелок попал в мишень». | № 3. Дано:<br>*A* – «Груз доставлен речным транспортом», $P(A) = 0{,}7$;<br>*B* – «Груз доставлен автотранспортом», $P(B) = 0{,}5$;<br>*C* – «Груз доставлен хотя бы одним видом транспорта». |
| $P(C) = ?$ | $P(C) = ?$ |
| Решение:<br>$P(C) = P(A) + P(B) -$<br>$- P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 + 0{,}6 -$<br>$- 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}92.$<br>Ответ: $P(C) = 0{,}92$. | Решение:<br>$P(C) = P(A) + P(B) -$<br>$- P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 + 0{,}5 -$<br>$- 0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}85.$<br>Ответ: $P(C) = 0{,}85$. |

# ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

**Задача 1.** Записать два испытания и для каждого из них подобрать достоверное, невозможное и случайное событие.

**Задача 2.** Деталь проходит две операции обработки. Вероятность появления брака при первой операции равна 0,02, при второй – 0,03. Найдите вероятность получения детали без брака после двух операций, предполагая, что события получения брака на отдельных операциях являются независимыми.

# ДОСТОВЕРНОЕ СОБЫТИЕ

Событие называется **достоверным** в данном опыте, если оно обязательно произойдет в данном опыте.

Например:

*Опыт:* *извлечение мяча из коробки, в которой находятся только красные мячи.*

*Достоверное событие:* *«извлеченный, на удачу, мяч окажется красным».*

# НЕВОЗМОЖНОЕ СОБЫТИЕ

Событие называется **невозможным** в данном опыте, если оно не может произойти в данном опыте.

Например:

*<u>Опыт:</u> извлечение мяча из коробки, в которой находятся только красные мячи.*

*<u>Невозможное событие:</u> «извлеченный, на удачу, мяч окажется зеленым».*

# СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ

Событие называется **случайным** в данном опыте, если оно может произойти, а может и не произойти в данном опыте.

Например:

*Опыт:* *сдача студентом экзамена по математике.*

*Случайное событие:* *«студент на экзамене получит оценку отлично».*

# РАВНОВОЗМОЖНЫЕ СОБЫТИЯ

- События называются равновозможными, если нет основания полагать, что одно событие является более возможным, чем другие.

  ***Например:***

✔ *выпадение орла или решки при броске монеты;*

✔ *выпадение 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков при броске игрального кубика;*

✔ *извлечение карты трефовой, пиковой, бубновой или червовой масти из колоды карт.*

- *При этом предполагается, что монета и кубик однородны и имеют геометрически правильную форму, а колода хорошо перемешана и «идеальна» с точки зрения неразличимости рубашек карт.*

# НЕ РАВНОВОЗМОЖНЫЕ СОБЫТИЯ

События называются не равновозможными, если есть основания полагать, что одно событие является более возможным, чем другие.
*Например, если у монеты или кубика смещён* ***центр тяжести****, то гораздо чаще будут выпадать вполне определённые грани.*

# СОВМЕСТНЫЕ СОБЫТИЯ

Два события называют **совместными** в данном опыте, если появление одного из них не исключает появление другого.

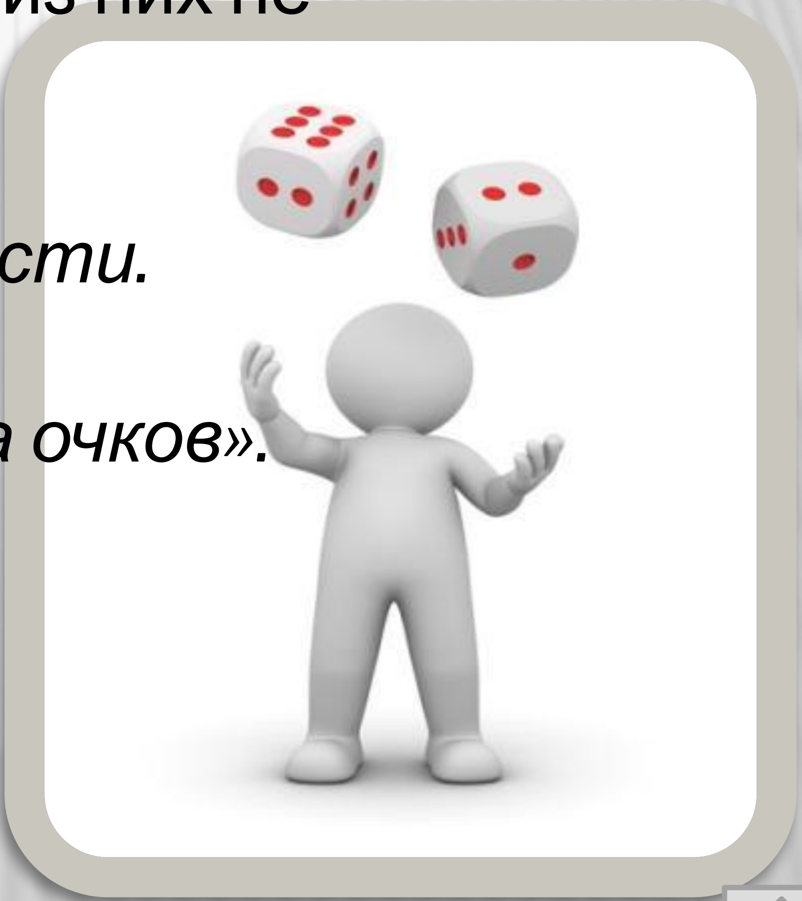
Например:

*Опыт:* *бросание игральной кости.*

*Совместные события:*

A. *«Выпадение четного числа очков».*

B. *«Выпадение 4 очков».*



# НЕСОВМЕСТНЫЕ СОБЫТИЯ

- Два события называются **несовместными** в данном опыте, если они не могут появиться вместе в одном и том же опыте.

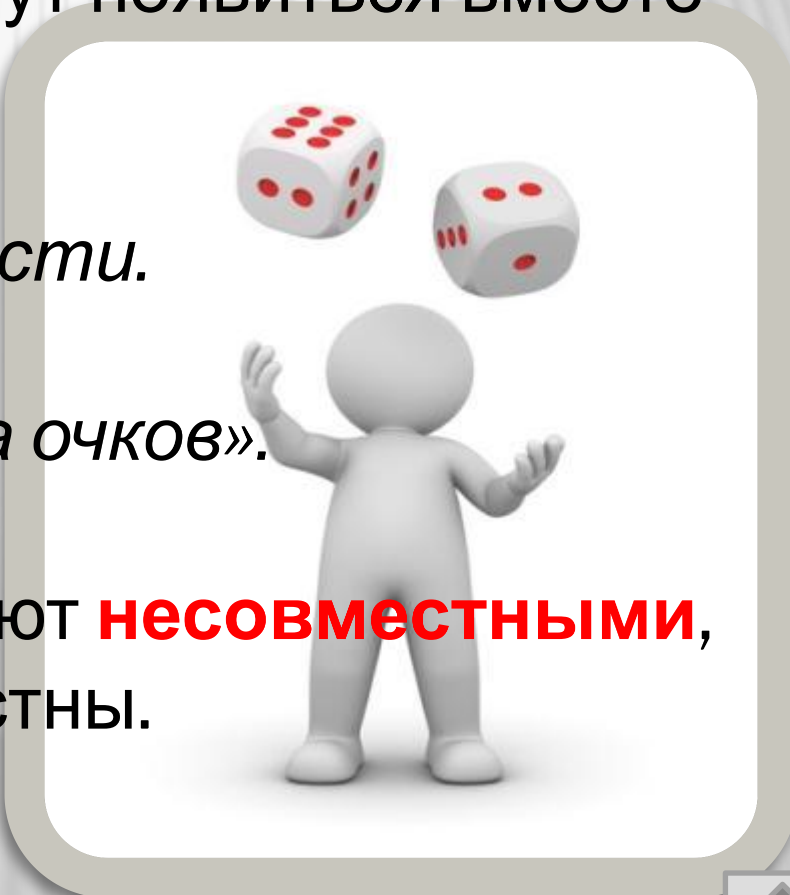
Например:

*Опыт:* *бросание игральной кости.*

*Несовместные события:*

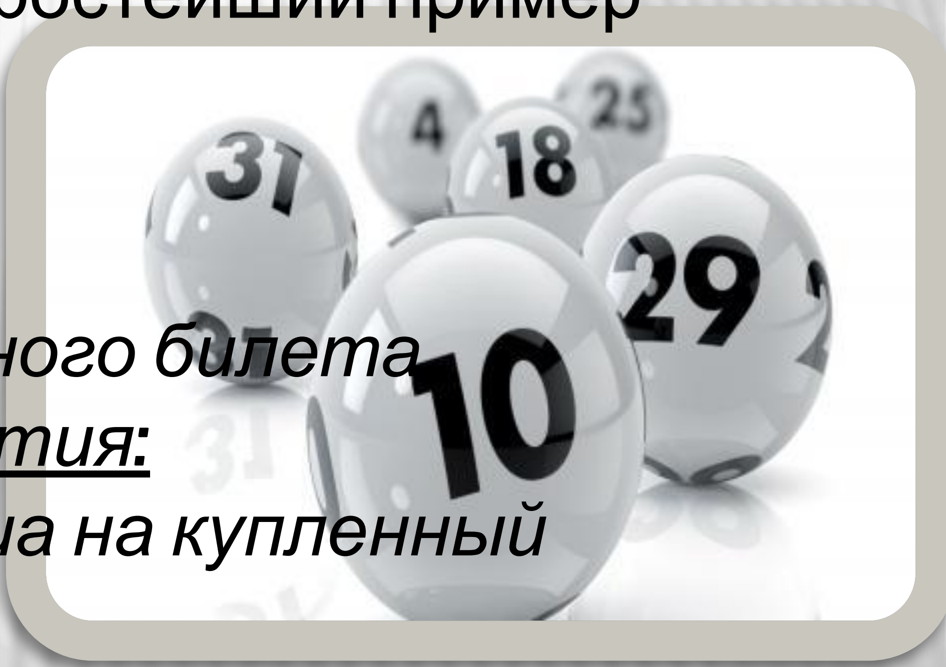
1. *«Выпадение четного числа очков».*
2. *«Выпадение 3 очков».*

- Несколько событий называют **несовместными**, если они попарно несовместны.



# ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ СОБЫТИЯ

Два события называются **противоположными**, если появление одного из них равносильно не появлению другого (это простейший пример несовместных событий).




Например:

*__Опыт:__ покупка лотерейного билета*

*__Противоположные события:__*

*А – «выпадение выигрыша на купленный билет».*

*$\bar{A}$ - «не выпадение выигрыша на тот же билет»*

# ЗАДАЧА 2.

На складе имеется 50 деталей, изготовленных тремя бригадами. Из них 25 изготовлено 1 бригадой, 15 – 2бригадой и 10 – 3 бригадой. Найти вероятность того, что на сборку поступила деталь, изготовленная 2 или 3 бригадой.

| Дано: | Решение: |
| --- | --- |
| A – «На сборку поступила деталь, изготовленная 2 бригадой»;<br>B – «На сборку поступила деталь, изготовленная 3 бригадой»;<br>$m_A = 15$;<br>$m_B = 10$;<br>$n = 50$. | $P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$<br>$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$<br>$P(A + B) = P(A) + P(B) =$<br>$= \frac{3}{10} + \frac{1}{5} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$<br>Ответ: $P(A + B) = 0,5$ |
| $P(A + B) = ?$ | |

# ЗАДАЧА 3.

Прибор, работающий в течении времени *t*, состоит из 3 узлов, каждый из которых, независимо от других, может в течение времени *t* отказать (выйти из строя). Отказ хотя бы одного узла приводит к отказу прибора в целом. За время *t* вероятность безотказной работы 1 узла = 0,8, 2 узла = 0,9, 3 узла = 0,7. Найти надежность прибора в целом.

| Дано: | Решение: |
| --- | --- |
| A – «Безотказная работа прибора»;<br>$A_1$ – «Безотказная работа 1 узла», $P(A_1) = 0,8$;<br>$A_2$ – «Безотказная работа 2 узла», $P(A_2) = 0,9$;<br>$A_3$ – «Безотказная работа 3 узла», $P(A_3) = 0,7$. | $P(A) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) =$<br>$= 0,8\cdot 0,9\cdot 0,7 = 0,504$<br><br>Ответ: $P(A) = 0,504$. |
| $P(A) = ?$ | |

# ЗАДАЧА 4.

Вероятность попадания в мишень для 1 стрелка 0,85, а для 2 стрелка 0,8. Стрелки независимо друг от друга произвели по одному выстрелу. Какова вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один стрелок?

| Дано: | Решение: |
|---|---|
| A – «Попадание 1 стрелка», $P(A) = 0,85$;<br>B – «Попадание 2 стрелка», $P(B) = 0,8$;<br>C – «Попадание хотя бы одного стрелка». | $P(C) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) =$<br>$= 0,85 + 0,8 - 0,85 \cdot 0,8 =$<br>$= 0,97$<br><br>Ответ: $P(C) = 0,97$. |
| $P(C) = ?$ | |

# ОСНОВОПОЛОЖНИКИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

**Блез Паскаль**
(19 июня1623г. – 19 августа 1662г)

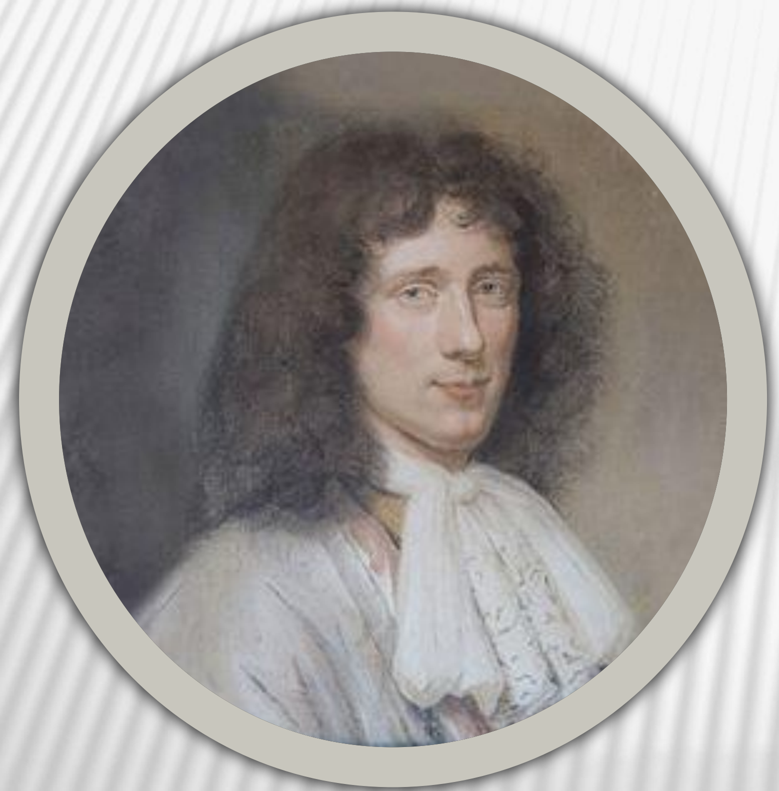
французский математик, физик, философ, один из основателей математического анализа, теории вероятностей и проектной геометрии

# ОСНОВОПОЛОЖНИКИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

**Пьер де Ферма**
(17 августа 1601 — 12 января 1665)

французский математик, один из создателей аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и теории чисел. По профессии юрист, с 1631 года — советник парламента в Тулузе.

# ОСНОВОПОЛОЖНИКИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



## Христиан Гюйгенс

(14 апреля 1629, Гаага —
8 июля 1695, Гаага)

нидерландский механик, физик, математик, астроном и изобретатель. Один из основоположников теоретической механики и теории вероятностей. Первый иностранный член Лондонского королевского общества (1663), член Французской академии наук с момента её основания (1666) и её первый президент (1666—1681)

# ОСНОВОПОЛОЖНИКИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

**Якоб Бернулли**
( 6 января 1655, Базель, —
16 августа 1705, там же)

швейцарский математик. Один из основателей теории вероятностей и математического анализа. Старший брат Иоганна Бернулли, совместно с ним положил начало вариационному исчислению. Доказал частный случай закона больших чисел — теорему Бернулли. Профессор математики Базельского университета (с 1687 года) Иностранный член Парижской академии наук (1699) и Берлинской академии наук

# ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА И ИНТЕРНЕТ РЕСУРСЫ

1. Дадаян А.А. Математика: Учебник – 2-е издание – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М. 2005. – 552с. – (Профессиональное образование).
2. Дадаян А.А. Сборник задач по математике. М.: ФОРУМ: ИНФРА-М. 2005. – 352с. – (Профессиональное образование).
3. http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html
4. https://ru.wikipedia.org/wiki/История_теории_вероятностей
5. http://sernam.ru/book_tp.php?id=11
6. картинки теория вероятностей