

Показательные уравнения

Уравнения вида $a^{f(x)} = a^{h(x)}$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют **показательными уравнениями**

$$a^{f(x)} = a^{h(x)}$$



$$f(x) = h(x)$$

Методы решения показательных уравнений:

1. Функционально-графический метод.
2. Метод уравнивания показателей.
3. Метод введения новой переменной.



Показательные уравнения. Примеры

Пример 1

$$2^{2x-4} = 64$$

$$2^{2x-4} = 2^6$$

$$2x - 4 = 6$$

$$x = 5$$

Ответ : 5

Пример 2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} = \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$$

$$2x - 3,5 = 0,5$$

$$x = 2$$

Ответ : 2

Пример 3

$$5^{x^2-3x} = 5^{3x-8}$$

$$x^2 - 3x = 3x - 8$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Ответ : 2; 4



Показательные уравнения. Примеры

Пример 4

$$\frac{0,2^{x-0,5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0,04^{x-2}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-0,5} : 5^{0,5} = 5 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{x-2}$$

$$5^{0,5-x-0,5} = 5 \cdot (5^{-2})^{x-2}$$

$$5^{-x} = 5^{1-2x+4}$$

$$5^{-x} = 5^{5-2x}$$

$$-x = 5 - 2x$$

$$x = 5$$

Ответ : 5

Пример 5

$$4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$$

$$(2^2)^x + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$$

$$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$$

Пусть $2^x = t$, где $t > 0$ тогда

$$t^2 + 2t - 24 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 = -6, \\ t_2 = 4 \end{cases}$$

$t_1 = -6$ не удовлетворяет условию $t > 0$

Вернемся к исходной переменной

$$2^x = 4$$

$$x = 2$$

Ответ : 2



Показательные уравнения. Примеры

Пример 6

$$9 \cdot 27^{x-\frac{2}{3}} - \frac{2}{81} \cdot 9^{x+2} = 9$$

$$9 \cdot \frac{27^x}{27^{\frac{2}{3}}} - \frac{2}{81} \cdot 9^x \cdot 9^2 = 9$$

$$9 \cdot \frac{27^x}{9} - 2 \cdot 9^x = 9$$

$$27^x - 2 \cdot 9^x - 9 = 0$$

Пусть $3^x = t$, где $t > 0$, тогда

$$t^3 - 2t^2 - 9 = 0$$

$$t^3 - 3t^2 + t^2 - 9 = 0$$

$$t^2(t - 3) + (t - 3)(t + 3) = 0$$

$$(t - 3)(t^2 + t + 3) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t^2 + t + 3 = 0 \end{array} \right.$$

$t^2 + t + 3 = 0$ – нет корней

Вернемся к исходной переменной

$$3^x = 3$$

$$x = 1$$

Ответ : 1.



Показательные уравнения. Примеры

Пример 7 (однородное уравнение)

$$5^{2x+1} - 13 \cdot 15^x + 54 \cdot 9^{x-1} = 0$$

$$5 \cdot 5^{2x} - 13 \cdot 15^x + 54 \cdot \frac{9^x}{9} = 0$$

$$5 \cdot 5^{2x} - 13 \cdot 15^x + 6 \cdot 9^x = 0$$

Разделим на 9^x , тогда

$$\frac{5 \cdot 5^{2x}}{9^x} - \frac{13 \cdot 15^x}{9^x} + \frac{6 \cdot 9^x}{9^x} = 0$$

$$5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x + 6 = 0$$

Пусть $\left(\frac{5}{3}\right)^x = t$, где $t > 0$, тогда

$$5t^2 - 13t + 6 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{3}{5}, \\ t_2 = 2 \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{3}{5} \quad \text{или} \quad \left(\frac{5}{3}\right)^x = 2$$

$$x = -1$$

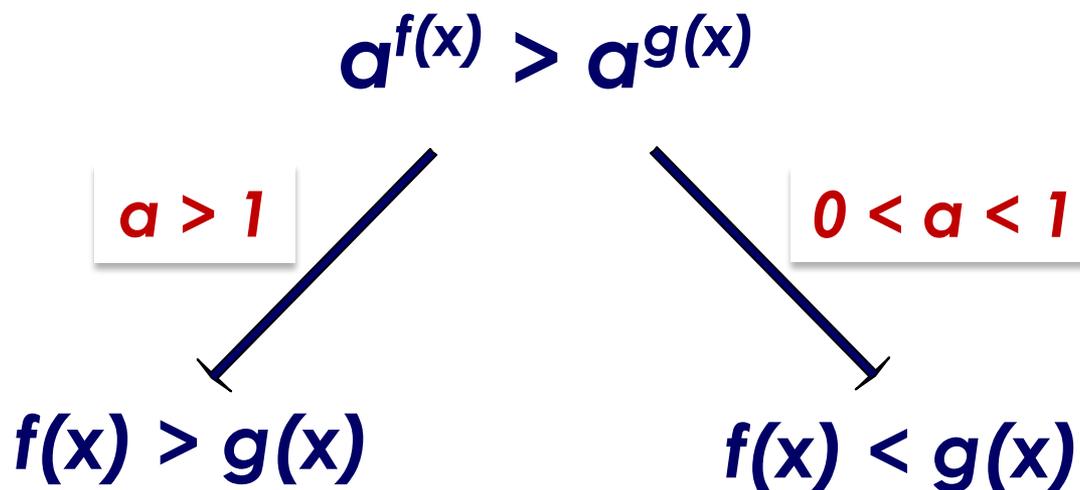
$$x = \log_{\frac{5}{3}} 2$$

Ответ : $-1; \log_{\frac{5}{3}} 2$.



Показательные неравенства

Неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют **показательными неравенствами**



Показательные неравенства. Примеры

Пример 1

$$2^{2x-4} > 64$$

$$2^{2x-4} > 2^6$$

т.к. функция $y = 2^t$ монотонно
возрастает на \mathbb{R} , то

$$2x - 4 > 6$$

$$x > 5$$

Ответ: $(5; +\infty)$

Пример 2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$$

т.к. функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^t$

монотонно убывает на \mathbb{R} , то

$$2x - 3,5 > 0,5$$

$$x > 2$$

Ответ: $(2; +\infty)$



Показательные неравенства. Примеры

Пример 3

$$0,5^{x^2-3x} \leq 0,5^{3x-8}$$

т.к. функция $y = (0,5)^t$

монотонно убывает на \mathbb{R} , то

$$x^2 - 3x \geq 3x - 8$$

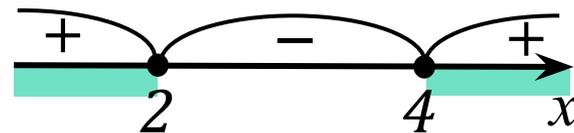
$$x^2 - 6x + 8 \geq 0$$

$$\text{н.ф.} \therefore x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$$

$$\text{Ответ} \quad : \quad (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$$



Показательные неравенства. Примеры

Пример 4

$$8^x + 18^x > 2 \cdot 27^x$$

$$2^{3x} + 2^x \cdot 3^{2x} > 2 \cdot 3^{3x} \quad | : (3^{3x}) \quad \text{т.к. } 3^{3x} > 0$$

$$\frac{2^{3x}}{3^{3x}} + \frac{2^x \cdot 3^{2x}}{3^{3x}} > \frac{2 \cdot 3^{3x}}{3^{3x}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x > 2$$

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$, где $t > 0$

$$t^3 + t - 2 > 0$$

$$t^3 + t - 2 = t^3 + t - 1 - 1 = t^3 - 1 + t - 1 = (t - 1)(t^2 + t + 2)$$

т.к. $t^2 + t + 2 > 0$ для любых t , то $t - 1 > 0$

$$t > 1$$



Показательные неравенства. Примеры

Пример 4

Вернемся к исходной переменной :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x > 1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^0,$$

т.к. $a = \frac{2}{3} < 1$, то функция $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ убывает на R

$$x < 0$$

Ответ : $(-\infty; 0)$.

