

Интегрирование иррациональных функций

Квадратичные иррациональности

Рассмотрим некоторые типы интегралов, содержащих иррациональные функции.

Интегралы типа $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx, \int \frac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$

Называют неопределенными интегралами от квадратичных иррациональностей. Их можно найти следующим образом:
под радикалом выделить полный квадрат:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) \text{ и сделать подстановку } x + \frac{b}{2a} = t \end{aligned}$$

При этом первые два интеграла приводятся к табличным, а третий – к сумме двух табличных интегралов.

Пример №1. Найти интеграл: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}$

Решение: Так как

$$4x^2 + 2x + 1 = 4\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = 4\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}\right),$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}\right)}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}}} = \left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{4} = t \\ x = t - \frac{1}{4} \\ dx = dt \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{3}{16}}} = \frac{1}{2} \ln \left| t + \sqrt{t^2 + \frac{3}{16}} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| x + \frac{1}{4} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}} \right| + C$$

Пример №2. Найти интеграл $I = \int \frac{x+4}{\sqrt{6-2x-x^2}} dx$.

Решение: Выделим полный квадрат :

$$6 - 2x - x^2 = -(x^2 + 2x - 6) = -((x+1)^2 - 7) = 7 - (x+1)^2,$$

Сделаем подстановку: $\begin{cases} x+1 = t \\ x = t-1 \\ dx = dt \end{cases}$

$$\text{Тогда: } I = \int \frac{t-1+4}{\sqrt{7-t^2}} dt = \int \frac{t}{\sqrt{7-t^2}} dt + 3 \int \frac{dt}{\sqrt{7-t^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int (7-t^2)^{-\frac{1}{2}} d(7-t^2) + 3 \int \frac{dt}{\sqrt{(\sqrt{7})^2 - t^2}} =$$

$$= -\sqrt{7-t^2} + 3 \cdot \arcsin \frac{t}{\sqrt{7}} + C = -\sqrt{6-2x-x^2} + 3 \cdot \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{7}} + C$$

Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы вида

$$\int \sin ax \cos bx dx, \quad \int \cos ax \cos bx dx, \quad \int \sin ax \sin bx dx, \quad \neq$$

Находятся с помощью формул:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2} [\sin(a-b)x + \sin(a+b)x];$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x + \cos(a+b)x];$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x].$$

Пример №1. Найти интеграл: $\int \sin 3x \cos 7x dx$

Решение: Воспользуемся формулой

$$\left[\sin ax \cos bx = \frac{1}{2} [\sin(a-b)x + \sin(a+b)x] \right]$$

Получим: $\frac{1}{2} [\sin(3-7)x + \sin(3+7)x]$

$$\text{Тогда } \int \sin 3x \cos 7x dx = \frac{1}{2} \int (\sin(-4x) + \sin 10x) dx = \frac{1}{2} \int (\sin 10x - \sin 4x) dx =$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{10} \cos 10x + \frac{1}{4} \cos 4x \right) + C = \frac{\cos 10x}{8} - \frac{\cos 10x}{20} + C$$

Пример №2.

Найти интеграл: $\int \cos 6x \cdot \cos x dx$

Решение:

Воспользуемся формулой:

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]$$

Получим:

$$\cos 6x \cos x = \frac{1}{2} [\cos(6-1)x + \cos(6+1)x]$$

$$\text{Тогда } \int \cos 6x \cos x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 5x + \cos 7x) dx = \frac{\sin 5x}{10} + \frac{\sin 7x}{14} + C$$

Пример №3. Найти интеграл $\int \sin 2x \cdot \sin \frac{2x}{3} dx$.

Решение: Воспользуемся формулой:

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$$

Получим: $\sin 2x \sin \frac{2x}{3} = \frac{1}{2} \left[\cos(2 - \frac{2}{3})x - \cos(2 + \frac{2}{3})x \right]$

Тогда:
$$\begin{aligned} \int \sin 2x \sin \frac{2x}{3} dx &= \frac{1}{2} \int (\cos \frac{4x}{3} - \cos \frac{8x}{3}) dx = \\ &= \frac{1}{2} (\frac{3}{4} \sin \frac{4x}{3} - \frac{3}{8} \sin \frac{8x}{3} + C) = \frac{3}{8} \sin \frac{4x}{3} - \frac{3}{16} \sin \frac{8x}{3} + C = \\ &= \frac{3}{16} (2 \sin \frac{4x}{3} - \sin \frac{8x}{3}) + C \end{aligned}$$

Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы:

- 1) Подстановка $\sin x = t$, если n — целое положительное **нечетное** число;
- 2) Подстановка $\cos x = t$, если m — целое положительное **нечетное** число;
- 3) Формулы понижения порядка:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x,$$

Если m n — целые **неотрицательные четные** числа;

- 4) Подстановка $\operatorname{tg} x = t$, если $m + n$ — есть **четное отрицательное целое** число.

Пример №1. Найти интеграл $I = \int \sin^4 x \cdot \cos^5 x dx$.

Решение: Применим подстановку $\sin x = t$. Т.к. $n=5$ (1 случай).

Тогда

$$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin t \\ dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ \cos x = \sqrt{1-t^2} \end{array} \right]$$

Получим: $I = \int t^4 \cdot (\sqrt{1-t^2})^5 \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int t^4 (\sqrt{1-t^2})^4 dt = \int t^4 (1-t^2)^2 dt =$

$$= \int (t^4 - 2t^6 + t^8) dt = \frac{t^5}{5} - 2\frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C.$$

Пример №2. Найти интеграл: $I = \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx$.

Решение: воспользуемся формулой 1) $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$
2) $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$$\begin{aligned} I &= \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x dx = \int \frac{1}{4} \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2} d(\sin 2x) = \\ &= \frac{1}{16} \int dx - \frac{1}{16} \int \cos 4x dx - \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \\ &= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C \end{aligned}$$

Пример №3.

Найти интеграл:

$$I = \int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x} = \int \cos^{-1} x \cdot \sin^{-3} x dx.$$

Решение: Здесь $m + n = -4$. (4 случай)

Обозначим $\operatorname{tg} x = t$. Тогда

$$\left[\begin{array}{l} x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right]$$

Получим:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cancel{dt} / \cancel{1+t^2}}{\cancel{1} / \sqrt{1+t^2} \cdot \cancel{t^3} / (\sqrt{1+t^2})^3} = \int \frac{\cancel{dt} / \cancel{1+t^2}}{\cancel{t^3} / (\sqrt{1+t^2})^2} = \int \frac{\cancel{dt} / \cancel{1+t^2}}{\cancel{t^3} / \cancel{1+t^2}} = \\ &= \int \frac{1+t^2}{t^3} dt = \int t^{-3} dt + \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C = \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + \ln|\operatorname{tg} x| + C \end{aligned}$$

• Универсальная тригонометрическая подстановка

Рассмотрим некоторые случаи нахождения интеграла от тригонометрических функций. Функцию с переменными $\sin x$ и $\cos x$, над которыми выполняются рациональные действия (сложения, вычитание, умножение и деление)

Принято обозначать $R(\sin x; \cos x)$, — знак рациональной функции.

Вычисление неопределённых интегралов типа $\int R(\sin x; \cos x) dx$ сводится к вычислению интегралов от рациональной функции подстановкой $tg \frac{x}{2} = t$, которая называется универсальной

Действительно,

$$\sin x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}, \cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$x = 2arctgt, dx = \frac{2}{1 + t^2} dt.$$

$$\text{Поэтому } \int R(\sin x; \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1 + t^2}; \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \cdot \frac{2}{1 + t^2} dt = \int R_1(t) dt,$$

Где $R_1(t)$ – рациональная функция от t . Обычно этот способ весьма громоздкий, зато всегда приводит к результату.

На практике применяют и другие, более простые подстановки,

в зависимости от свойств (и вида) подынтегральной функции.

В частности, удобны следующие правила:

1) Если функция $R(\sin x, \cos x)$ нечётна относительно $\cos x$, т.е. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то подстановка $\sin x = t$

рационализирует интеграл;

2) Если функция $R(\sin x, \cos x)$ нечётна относительно $\sin x$, т.е. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то делается подстановка $\cos x = t$

3) Если функция $R(\sin x, \cos x)$ чётна относительно $\sin x$ и $\cos x$, т.е. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то интеграл

рационализируется подстановкой $tgx = t$. Такая же подстановка применяется, если интеграл имеет вид $\int R(tgx) dx$

Пример: Найти интеграл $\int \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x}$.

Решение: Сделаем универсальную подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Тогда $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Следовательно

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x} &= \int \frac{2dt}{(1+t^2)(3 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2})} = \int \frac{dt}{t^2 + t + 2} = \\ &= \int \frac{d(t + \frac{1}{2})}{(t + \frac{1}{2}) + \frac{7}{4}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{argtg} \frac{t + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \operatorname{argtg} \frac{1 + 2t \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{7}} + C. \end{aligned}$$