Математика
Часть 2

УГТУ-УПИ

2007 г.

Лекция 13

ДУ высших порядков.

1. Решение ОЛДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим ОЛДУ второго порядка:

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (*)$$

где p, q - постоянные.

Будем искать решение уравнения в виде:

$$y = e^{kx}, \quad k = const.$$

$$y' = ke^{kx}, \qquad y'' = k^2 e^{kx}.$$

Подставим это в $(*)$:

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0,$$

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Уравнение $k^2 + pk + q = 0$ называется **характеристическим уравнением** ОЛДУ.
(Из него определяют k)

Решения характеристического уравнения:

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Возможны 3 случая:

1) Корни характеристического уравнения **действительные и разные**.

$$\boxed{k_1 \neq k_2} \qquad \left(\frac{p^2}{4} - q > 0\right)$$

Уравнение $(*)$ имеет два линейно независимых частных решения:

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Общее решение: $\boxed{y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}}$

Пример .

Найти общее решение ОЛДУ

$$y'' - 2y' - 8y = 0.$$

Решение.

$$k^2 - 2k - 8 = 0,$$

$$k_1 = 4, \quad k_2 = -2,$$

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-2x} \, .$$

2) Корни характеристического уравнения **действительные и одинаковые**.

$$\boxed{k_1 = k_2 = k = -\frac{p}{2}} \qquad \left(\frac{p^2}{4} - q = 0\right)$$

Одно частное решение: $y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}$.

Можно показать,что второе линейно независимое частное решение имеет вид:

$$y_2 = y_1 x = e^{-\frac{p}{2}x} x.$$

Для этого достаточно показать,что определитель Вронского для y_1 и y_2 не равен нулю:

$$W\left(y_1, y_2\right) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{kx} & xe^{kx} \\ ke^{kx} & e^{kx}(1+xk) \end{vmatrix} = e^{2kx} \neq 0$$

Пример **.**

Найти общее решение ОЛДУ

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Решение.

$$k^2 - 6k + 9 = 0,$$

$$k_1 = k_2 = 3 \pm \sqrt{9 - 9} = 3,$$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} =$$

$$= (c_1 + c_2 x) e^{3x}.$$

3) Корни характеристического уравнения **комплексные**.

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= \alpha + i\beta, \\ k_2 &= \alpha - i\beta \end{aligned}} \qquad \left(\frac{p^2}{4} - q < 0\right)$$

где $$\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Частные решения имеют вид:

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}.$$

Ранее было показано, что если ОЛДУ имеет комплексное решение, то его реальная и мнимая части также будут решениями этого уравнения:

$$y = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\ \sin\beta x)$$

$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ – ***ðåàëüí àÿ ÷àñò ü ðåø åí èÿ***

$y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ – ***ì í èì àÿ ÷àñò ü ðåø åí èÿ***

Определитель Вронского для этих y_1 и y_2 не равен нулю (показать самостоятельно), значит они линейно не зависимы.

Следовательно, общее решение уравнения равно их линейной комбинации:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

èëè

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

Пример.

Найти общее решение ОЛДУ

$$y'' - 6y' + 13y = 0.$$

Решение.

$$k^2 - 6k + 13 = 0,$$

$$k = 3 \pm 2i, \quad \alpha = 3, \quad \beta = 2,$$

$$y = e^{3x}\left[c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x\right].$$

2.

Решение ОЛДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим ОЛДУ n-го порядка:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0, \quad a_i = const$$

Функции : $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$

называются линейно независимыми

на $[a,b]$, если

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n = 0,$$

только в случае когда все $c_i = 0.$

Т.

Если функции $y_1, y_2, ..., y_n$ являются линейно независимыми частными решениями ОЛДУ n-го порядка, то его общее решение равно их линейной комбинации:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n,$$

где c_i - произвольные постоянные.

Число линейно независимых частных решений равно порядку ОЛДУ или степени характеристического уравнения.

Составим характеристическое уравнение для ОЛДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

Найдём корни $k_1, k_2, \ldots k_n$.

В зависимости от корней характеристического уравнения, частные линейно независимые решения ОЛДУ имеют разный вид.

1) Каждому действительному однократному корню k соответствует частное решение вида

$$y = e^{kx}.$$

2) Каждому действительному корню $\boldsymbol{k}$ кратности $\boldsymbol{r}$ соответствует $\boldsymbol{r}$ линейно независимых решений :

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = e^{kx}, \\ y_2 = xe^{kx}, \\ y_3 = x^2 e^{kx}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_r = x^{r-1} e^{kx} \end{array}\right.$$

3) Каждой паре комплексных корней

$$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$

соответствуют два частных решения :

$$\begin{cases} y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x \end{cases}$$

4) Каждой паре комплексных корней $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ кратности m соответствуют $2m$ частных решений :

$$\begin{cases} y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ y_2 = x e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_m = x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ y_{m+1} = e^{\alpha x} \sin \beta x, \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_{2m} = x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x \end{cases}$$

Пример.

Найти общее решение ОЛДУ $\boldsymbol{y''' - y = 0}.$

Решение.

$$k^3 - 1 = 0, \quad (k-1)(k^2+k+1) = 0,$$

$$k_1 = 1, \quad k_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$y = c_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left[c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right].$$

3. Решение НЛДУ второго порядка

НЛДУ второго порядка имеет вид:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x),$$

где $a_1, a_2, f(x)$ – известные функции.

Т. Общее решение НЛДУ y равно сумме общего решения y_0 соответствующего однородного уравнения $y_0'' + a_1 y_0' + a_2 y_0 = 0$

и любого частного решения $\tilde{y}$ данного неоднородного уравнения $\tilde{y}'' + a_1 \tilde{y}' + a_2 \tilde{y} = f(x)$:

$$\boxed{y = y_0 + \tilde{y}}$$

Доказательство:

Для y_0, $\tilde{y}$ справедливо:

$$y_0'' + a_1 y_0' + a_2 y_0 = 0, \qquad \tilde{y}'' + a_1 \tilde{y}' + a_2 \tilde{y} = f(x).$$

Сложим уравнения почленно

$$(y_0 + \tilde{y})'' + a_1 (y_0 + \tilde{y})' + a_2 (y_0 + \tilde{y}) = f(x),$$

$y = y_0 + \tilde{y}$ - решение уравнения.

Докажем, что при любых начальных условиях

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'$$

можно подобрать c_1, c_2 так, чтобы решение удовлетворяло этим начальным условиям.

Пусть $\quad y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad \Rightarrow$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \tilde{y}$$

Подставим начальные условия

$$\begin{cases} y_0 = c_1 y_{10} + c_2 y_{20} + \tilde{y}_0, \\ y_0' = c_1 y_{10}' + c_2 y_{20}' + \tilde{y}_0' \end{cases} \qquad W(x_0) = \begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}' \end{vmatrix} \neq 0,$$

т.к. y_1, y_2 - линейно независимы

Система уравнений имеет единственное решение c_1, c_2.

Решение НЛДУ второго порядка методом вариации произвольных постоянных.

Пусть известно общее решение ОЛДУ

$y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2,$ где c_1, c_2**-const.**

Будем искать частное решение НЛДУ в виде

$\breve{y} = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2,$ c_1, c_2 - функции от x.

$$\breve{y}' = c_1 y_1' + c_1' y_1 + c_2 y_2' + c_2' y_2.$$

Подберём $c_1(x), c_2(x)$ так, чтобы

$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0,$ тогда $\breve{y}' = c_1 y_1' + c_2 y_2',$

$$\breve{y}'' = c_1 y_1'' + c_1' y_1' + c_2 y_2'' + c_2' y_2'.$$

Подставим это в НЛДУ

$$\left(c_1 y_1'' + c_1' y_1' + c_2 y_2'' + c_2' y_2'\right) + a_1 \left(c_1 y_1' + c_2 y_2'\right) +$$

$$+ a_2 \left(c_1 y_1 + c_2 y_2\right) = f\left(x\right),$$

$$c_1 \left(\overbrace{y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1}^{0}\right) + \mathrm{c}_2 \left(\overbrace{y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2}^{0}\right) +$$

$$+ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f\left(x\right).$$

$$\Rightarrow \qquad c_1' y_1' + c_2' y_2' = f\left(x\right).$$

$c_1(x), c_2(x)$ удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0, \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x). \end{cases} \qquad W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1{}' & y_2{}' \end{vmatrix} \neq 0,$$

(y_1, y_2- линейно независимы.)

Система уравнений имеет единственное решение $c_1' = \varphi_1(x),\ c_2' = \varphi_2(x)$.

Тогда

$$c_1(x) = \int \varphi_1(x) dx, \qquad c_2(x) = \int \varphi_2(x) dx.$$

Пример.

Найти общее решение НЛДУ $y'' - \frac{y'}{x} = x.$

Решение.

Найдем решение ОЛДУ $y'' - \frac{y'}{x} = 0.$

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}, \qquad \ln|y'| = \ln|x| + \ln|c|, \qquad y' = cx,$$

$$y_0 = c_1 x^2 + c_2, \qquad y_1 = x^2, \qquad y_2 = 1.$$

Ищем частное решение НЛДУ в виде:

$$\breve{y} = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2, \quad \breve{y} = c_1(x) x^2 + c_2(x).$$

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0, \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1' x^2 + c_2' \cdot 1 = 0, \\ 2x c_1' + 0 \cdot c_2' = x. \end{cases}$$

$$c_1' = \frac{1}{2},\ c_2' = -\frac{1}{2} x^2,$$

$$c_1 = \frac{x}{2},\ c_2 = -\frac{x^3}{6}.$$

$$y = \left(\frac{x}{2}\right) x^2 + \left(-\frac{x^3}{6}\right) 1 + c_1 x^2 + c_2 =$$

$$= \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + c_1 x^2 + c_2 = \frac{x^3}{3} + c_1 x^2 + c_2.$$