

Предел последовательности



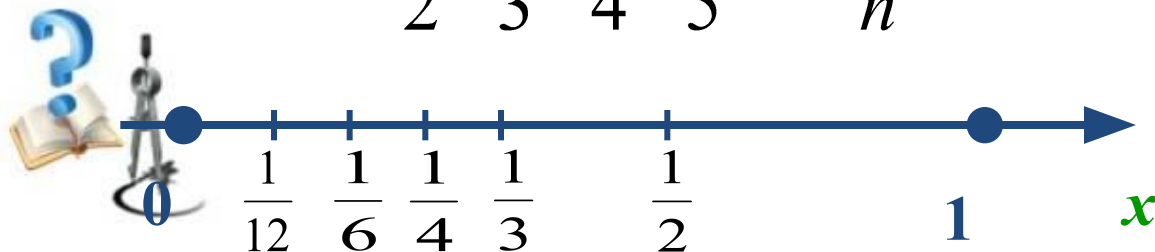
Понятие сходящейся последовательности

Обратим внимание, что члены последовательности (x_n) как бы «сгущаются» около точки 0, а у последовательности (y_n) такой точки нет. В подобных случаях говорят, что последовательность (x_n) **сходится**, а последовательность (y_n) **расходится**.

(y_n) : 1, 3, 5, 7, 9, ..., $2n - 1$, ...;



(x_n) : 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ..., $\frac{1}{n}$, ...



Понятие сходящейся последовательности

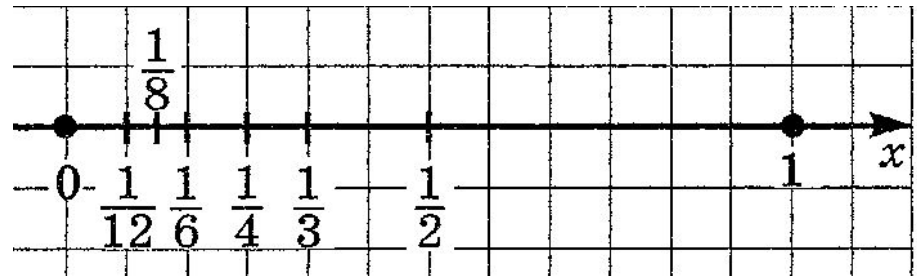
$(y_n): 1, 3, 5, 7, \dots, (2n-1), \dots$ $(x_n): 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/6, \dots, 1/n, \dots$



Нет точки сгущения

Последовательность

расходится



Точка сгущения – 0

Последовательность

сходится



Чтобы узнать является ли конкретная точка, взятая на прямой, «точкой сгущения» для членов заданной последовательности, введем следующее понятие.

Окрестность точки

Определение 1. Пусть a – точка прямой, а r – положительное число.

Интервал $(a - r; a + r)$ называют окрестностью точки a , а число r – радиусом окрестности.



Пример. $(3,97; 4,03)$ – окрестность точки 4 , радиус равен $0,03$.



В математике «точку сгущения» для членов заданной последовательности называют «пределом последовательности».

Определение 2. Число b называют пределом последовательности (y_n) , если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

Обозначение: 1. (y_n стремится к b или y_n сходится к b);

$$y_n \rightarrow b$$

2. (предел последовательности y_n при стремлении n к бесконечности равен b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$



Формулы

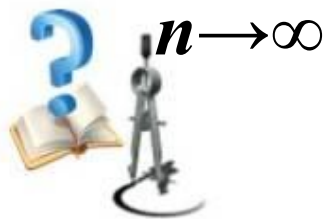
$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, \text{ если } 0 < |q| < 1$$

Если $q > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ не существует.

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} C = C$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} (k/n^m) = 0$$



Построим графики
последовательностей:

$$y_n = \frac{1}{n}$$

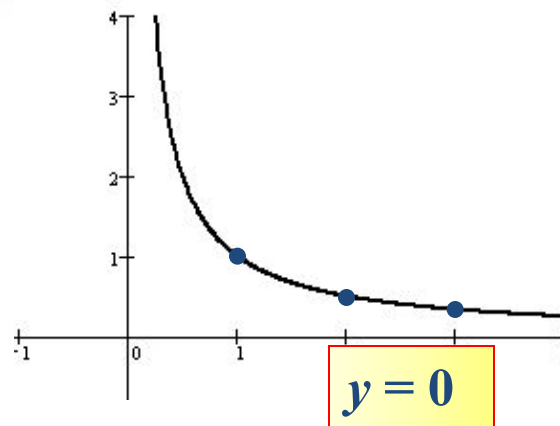


Рис. 1

$$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

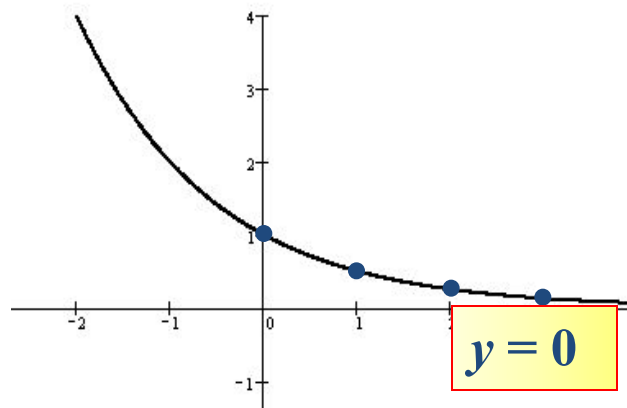


Рис. 2

$$y_n = \frac{2n}{n+1}$$

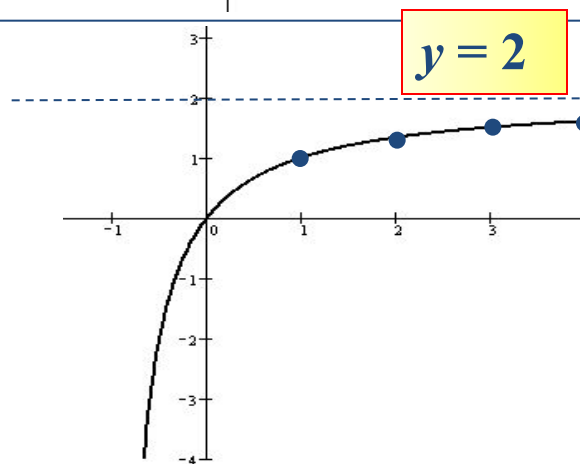


Рис. 3



Асимптоты графика

Обратите внимание, что на всех трех рисунках точки графика, по мере их ухода вправо, все ближе и ближе подходят к **некоторой горизонтальной прямой:**

- на рис 1 – к прямой $y = 0$,
- на рис 2 – к прямой $y = 0$,
- на рис 3 – к прямой $y = 2$.

Каждую из этих прямых называют

горизонтальной асимптотой графика.



Асимптоты графика

Вообще равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = b$

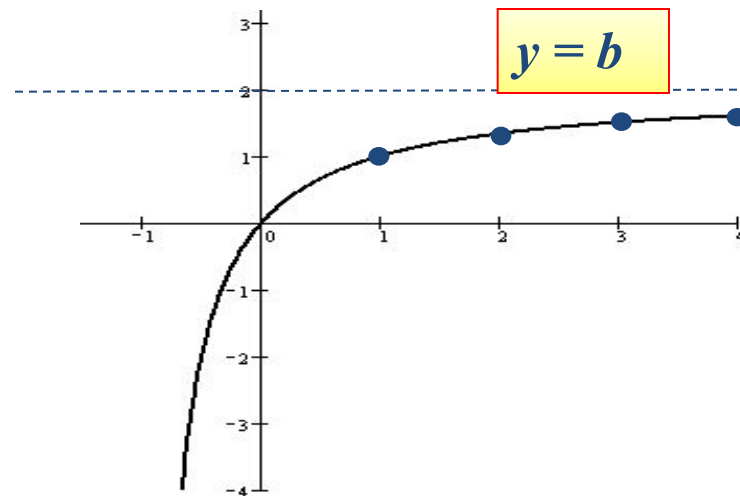
означает, что прямая $y = a$

является горизонтальной асимптотой

графика последовательности, $y_n = f(n)$

т.е. графика функции

$y = f(x), x \in N.$



Свойства

- Если последовательность сходится,
то только к одному пределу.
- Если последовательность сходится ,
то она ограничена.

Обратное—неверно: $1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$ —
ограниченная последовательность,
но она не сходится

● Теорема Вейерштрасса



Если последовательность монотонна
и ограничена, **то она сходится.**



- **Карл Теодор Вейерштрасс-
выдающийся немецкий
математик, отец
«современного анализа»**

- **1815-1897 г.**

- **Кратер на Луне**



Weierstrass

Свойства вычисления пределов

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c$, то

1) Предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b + c$$

2) Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \cdot c$$

3) Предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n : y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n : \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b : c$$

4) Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot x_n) = k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = k \cdot b$$



Примеры вычисления пределов

Пример 1. $x_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0$$

Пример 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{n^2} + \frac{7}{n} - 2 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} 2 = 0 + 0 - 2 = -2$$



Примеры вычисления пределов

Пример 3. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - 3x^3 + 1}{x^5 + 4x^2 + 2x}$

Решение. Делим числитель и знаменатель дроби почленно на **наивысшую** из имеющихся степень переменной x , т.е. на x^5 .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - 3x^3 + 1}{x^5 + 4x^2 + 2x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^5}{x^5} - \frac{3x^3}{x^5} + \frac{1}{x^5}}{\frac{x^5}{x^5} + \frac{4x^2}{x^5} + \frac{2x}{x^5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^5}}{1 + \frac{4}{x^3} + \frac{2}{x^4}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^5} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x^3} + \frac{2}{x^4} \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^5}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^3} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^4}} = \frac{2 - 0 + 0}{1 + 0 + 0} = \frac{2}{1} = 2 \end{aligned}$$

Примеры вычисления пределов

Пример 4. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x^2 + 1}{2x^4 - 3x^2 + 5x + 2}$

Решение. Делим числитель и знаменатель дроби почленно на **наивысшую** из имеющихся степень переменной x т.е. на x^4 .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x^2 + 1}{2x^4 - 3x^2 + 5x + 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^3}{x^4} + \frac{x^2}{x^4} + \frac{1}{x^4}}{\frac{2}{x^4} - \frac{3x^2}{x^4} + \frac{5x}{x^4} + \frac{2}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{2 - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{2}{x^4}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{2}{x^4} \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^4}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^3} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^4}} = \\ &= \frac{0 + 0 + 0}{2 - 0 + 0 + 0} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$


Примеры вычисления пределов

Пример 5. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^6 - x^2 + i}{x^4 + 2x^3 + x}$

Решение. Делим числитель и знаменатель дроби почленно на **наивысшую** из имеющихся степень переменной x , т.е. на x^6 .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 - x^2 + i}{x^4 + 2x^3 + x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^6}{x^6} - \frac{x^2}{x^6} + \frac{i}{x^6}}{\frac{x^4}{x^6} + \frac{2x^3}{x^6} + \frac{x}{x^6}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x^4} + \frac{i}{x^6}}{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^5}} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x^4} + \frac{i}{x^6} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^5} \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^4} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{i}{x^6}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^5}} = \\ &= \frac{2 - 0 + 0}{0 + 0 + 0} = \frac{2}{0} = (\text{не существует}) = \infty \end{aligned}$$

Правила вычисления пределов

1. Если старшая степень числителя и знаменателя совпадают, то предел такого вида всегда будет равен отношению коэффициентов при старших степенях переменной.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - 3x^3 + 1}{x^5 + 4x^2 + 2x} = 2$$



Правила вычисления пределов

2. Если степень знаменателя выше степени числителя, то предел такого вида равен нулю.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x^2 + 1}{2x^4 - 3x^2 + 5x + 2} = 0$$



Правила вычисления пределов

3. Если же старшая степень числителя выше степени знаменателя, то, очевидно, все слагаемые знаменателя в пределе будут равны нулю, это означает, что предел не существует.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 - x^2 + i}{x^4 + 2x^3 + x} = \infty$$



Вычислите самостоятельно пределы функций на бесконечности:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 4x + 2}{5x^2 + 3x + 1} = \infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x^2 + 3x + 7} = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 4x^2 + 7}{x^2 + 4x + 3} = \infty$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + 3x^2 + x + 1}{2x^3 + x + 13} = \frac{6}{2} = 3$$



Методика вычисления пределов в точке

Если функция существует в точке $x = a$, то ее предел равен $f(a)$.

Примеры вычисления пределов

Пример 1. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 5)$

Решение. Подставим вместо x число 3 (т.к. $x \rightarrow 3$) и применим правила вычисления пределов.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 5) &= \lim_{x \rightarrow 3} 2x + \lim_{x \rightarrow 3} 5 = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x + \lim_{x \rightarrow 3} 5 = \\ &= 6 + 5 = 2 \cdot 3 + 5 = 11\end{aligned}$$



Примеры вычисления пределов

Пример 2. Вычислить $\lim_{x \rightarrow (-2)} (x^2 + 2x - 3)$

Решение.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow (-2)} (x^2 + 2x - 3) &= \lim_{x \rightarrow (-2)} x^2 + \lim_{x \rightarrow (-2)} 2x - \lim_{x \rightarrow (-2)} 3 = \\ &= \lim_{x \rightarrow (-2)} x^2 + 2 \bullet \lim_{x \rightarrow (-2)} x - \lim_{x \rightarrow (-2)} 3 = \\ &= (-2)^2 + 2 \bullet (-2) - 3 = 4 - 4 - 3 = -3\end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x}{2x-1}$

Решение.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x}{2x-1} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} 3x}{\lim_{x \rightarrow 3} (2x-1)} = \frac{3 \bullet \lim_{x \rightarrow 3} x}{2 \bullet \lim_{x \rightarrow 3} x - \lim_{x \rightarrow 3} 1} = \\ &= \frac{3 \bullet 3}{2 \bullet 3 - 1} = 1,8\end{aligned}$$



Методика вычисления пределов в точке

Если же функция в точке $x = a$ не существует, в знаменателе дроби ноль, то вычисляем значение числителя в этой точке.

1.
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{x^3 - x^2 - 4} = \infty$$

2.
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x + 1}{x^2 - 1} = \infty$$

3.
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x - 3} = \infty$$



Примеры вычисления пределов

Пример 1. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{x^3 - x^2 - 4}$

Решение. Подставим вместо x число 2 (т.к. $x \rightarrow 2$) и применим правила вычисления пределов.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{x^3 - x^2 - 4} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^3}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - x^2 - 4)} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^3}{\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 4} = \frac{2^3}{2^3 - 2^2 - 4} = \\ &= \frac{8}{8 - 4 - 4} = \frac{8}{0} = \infty \end{aligned}$$



Примеры вычисления пределов

Пример 2. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x - 1}{x^2 - 1}$

Решение. Подставим вместо x число 2 (т.к. $x \neq 2$) и применим правила вычисления пределов.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x}{x^2 - 1} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 5x}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)} = \\ &= \frac{5 \bullet \lim_{x \rightarrow 1} x}{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 1} = \frac{5 \bullet 1}{1^2 - 1} = \\ &= \frac{5}{1 - 1} = \frac{5}{0} = \infty \end{aligned}$$



Примеры вычисления пределов

Пример 3. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x-3}$

Решение. Подставим вместо x число 3 (т.к. $x \rightarrow 3$) и применим правила вычисления пределов.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x-3} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} 2x}{\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} 2x}{\lim_{x \rightarrow 3} x - \lim_{x \rightarrow 3} 3} = \\ &= \frac{2 \bullet \lim_{x \rightarrow 3} x}{\lim_{x \rightarrow 3} x - \lim_{x \rightarrow 3} 3} = \frac{2 \bullet 3}{3 - 3} = \frac{6}{0} = \infty \end{aligned}$$



Методика вычисления пределов в точке

Если и в знаменателе и в числителе нули, то, говорят, имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Методика раскрытия таких неопределенностей проста. Если числитель и знаменатель дробно-рациональной функции при $x = a$, то разложение на множители и числителя и знаменателя обязательно содержат сомножитель $(x - a)$, на который будет сокращена. Покажем на примере.

Примеры вычисления пределов

Пример 1. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 4x + 3}$

Решение. Выяснили, что при $x = 1$ и числитель и знаменатель равны нулю, значит имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, раскладываем числитель и знаменатель на множители, используя известную школьную методику разложения квадратного трехчлена на линейные множители $ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 4x + 3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 5)}{(x - 1)(x - 3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 5)}{(x - 3)} = \frac{6}{-4}$$



Примеры вычисления пределов

Пример 2. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 + 3x - 10}$

Решение. Выяснили, что при $x = 2$ и числитель и знаменатель равны нулю, значит имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, раскладываем числитель и знаменатель на множители, используя известную школьную методику разложения квадратного трехчлена на линейные множители $ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 + 3x - 10} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 7)}{(x - 2)(x + 5)} =$$



$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 7)}{(x + 5)} = -\frac{5}{7}$$

Примеры вычисления пределов

Активно используйте формулы сокращенного умножения

Пример 3. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$

Решение. Выяснили, что при $x = 2$ и числитель и знаменатель равны нулю, значит имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, воспользуемся формулами сокращенного умножения

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)}{(x^2 + 2x + 4)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$



Следующие пределы вычислите самостоятельно

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{2x^2 + 3x - 5}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 11x - 3}{x - 3}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 2x^2}{6x^3 - 4x^2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{t^2 + 6t + 9}{t^2 + t - 6}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 4x - 21}{3x^2 + 8x - 3}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5a^2 + 9a - 2}{3a^2 + 5a - 2}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{2x^2 - 7x - 4}{6x^2 + 7x + 2}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 25}$$



ОТВЕТЫ

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{2x^2 + 3x - 5} = -\frac{5}{3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 11x - 3}{x - 3} = 13$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 2x^2}{6x^3 - 4x^2} = 1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{t^2 + 6t + 9}{t^2 + t - 6} = 0$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 4x - 21}{3x^2 + 8x - 3} = 1\frac{3}{7}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5a^2 + 9a - 2}{3a^2 + 5a - 2} = \frac{11}{7}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{2x^2 - 7x - 4}{6x^2 + 7x + 2} = -2$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 25} = \frac{1}{5}$$

