

# Продольные и поперечные магнитооптические эффекты.

- Распространение электромагнитной волны в среде. Уравнения Максвелла
- Показатель преломления при продольном распространении волны
  - ✓ Гироэлектрическая, гиромагнитная и бигиротропная среды
  - ✓ Частотно независимый эффект Фарадея
- Показатель преломления при поперечном распространении волны

# Двулучепреломление

- Симметрия тензоров  $[\epsilon]$  и  $[\mu]$ .
- Анизотропные среды. Оптическая ось. Одноосные и двуосные кристаллы. Обыкновенный и необыкновенный луч.
- Двулучепреломление в одноосном кристалле. «Положительные» и «отрицательные» кристаллы.
- Линейно поляризованная волна в одноосном кристалле.
- Случай изотропной среды

## Симметрия тензора $[\epsilon]$ .

$D_i = \sum_j \epsilon_{ij} E_j$  — компоненты вектора индукции электрического поля

Плотность энергии электрического поля в среде

$$w = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D}) = \frac{1}{2} \sum_i E_i D_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} E_i \epsilon_{ij} E_j$$

Поменяем местами  
индексы  $i$  и  $j$ , получим

$$w = \frac{1}{2} \sum_{i,j} E_j \epsilon_{ji} E_i$$

Почленно вычитаем

$$0 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (E_i \epsilon_{ij} E_j - E_j \epsilon_{ji} E_i)$$

$$0 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} E_i E_j (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ji})$$

Поскольку  $E_i$  и  $E_j$  независимы, то

$$\epsilon_{ij} - \epsilon_{ji} = 0$$

следовательно

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$$

**Тензор  $[\epsilon]$  симметричен для анизотропной среды без поглощения.**

Аналогично доказывається  
симметрия тензора  $[\mu]$

# Симметричный тензор можно привести к диагональному виду

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \varepsilon_{ji} E_i E_j \rightarrow \frac{1}{2} (\varepsilon_{xx} E_x^2 + \varepsilon_{yy} E_y^2 + \varepsilon_{zz} E_z^2)$$

Уравнение имеет вид:  $\frac{1}{2W} (\varepsilon_{xx} E_x^2 + \varepsilon_{yy} E_y^2 + \varepsilon_{zz} E_z^2) = 1$

Сделаем замену переменных  $x = \frac{E_x}{\sqrt{2W}}, y = \frac{E_y}{\sqrt{2W}}, z = \frac{E_z}{\sqrt{2W}},$

Тогда уравнение имеет вид:  $\varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \varepsilon_z z^2 = 1$

### Уравнение эллипсоида

$$\varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \varepsilon_z z^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Это уравнение описывает эллипсоид, главные оси которого равны

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_x}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_y}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_z}}$$

Это величины, обратные показателям преломления по разным направлениям.

В общем случае  $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$

## Уравнение эллипсоида

$$\frac{x^2}{\frac{1}{\varepsilon_x}} + \frac{y^2}{\frac{1}{\varepsilon_y}} + \frac{z^2}{\frac{1}{\varepsilon_z}} = 1 \qquad \frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_x}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_y}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_z}}\right)^2} = 1$$

В левой части уравнения умножим числитель и знаменатель на  $c^2$ .

$$\frac{(cx)^2}{\left(\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_x}}\right)^2} + \frac{(cy)^2}{\left(\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_y}}\right)^2} + \frac{(cz)^2}{\left(\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_z}}\right)^2} = 1$$

Сделаем замены переменных:  $V_x = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_x}}, \quad V_y = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_y}}, \quad V_z = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_z}},$

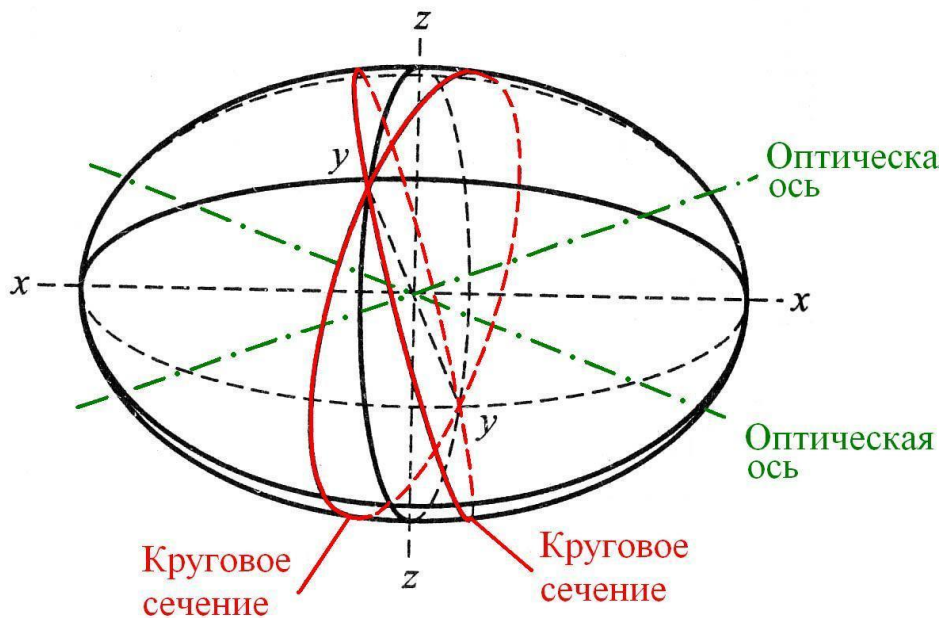
$$X = cx, \quad Y = cy, \quad Z = cz$$

Окончательно уравнение имеет вид:

$$\frac{X^2}{V_x^2} + \frac{Y^2}{V_y^2} + \frac{Z^2}{V_z^2} = 1$$

Это уравнение – эллипсоид скоростей,  
а  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  – главные лучевые скорости.

Через центр эллипсоида можно провести два круговых сечения.



Направление, перпендикулярное  
плоскости кругового сечения –  
ОПТИЧЕСКАЯ ОСЬ.

- ✓ Если  $V_x = V_y = V_z$ , эллипсоид – сфера, среда изотропна.
- ✓ Если  $V_x = V_y \neq V_z$ , одноосный кристалл.
- ✓ Если  $V_x \neq V_y \neq V_z$ , двуосный кристалл.

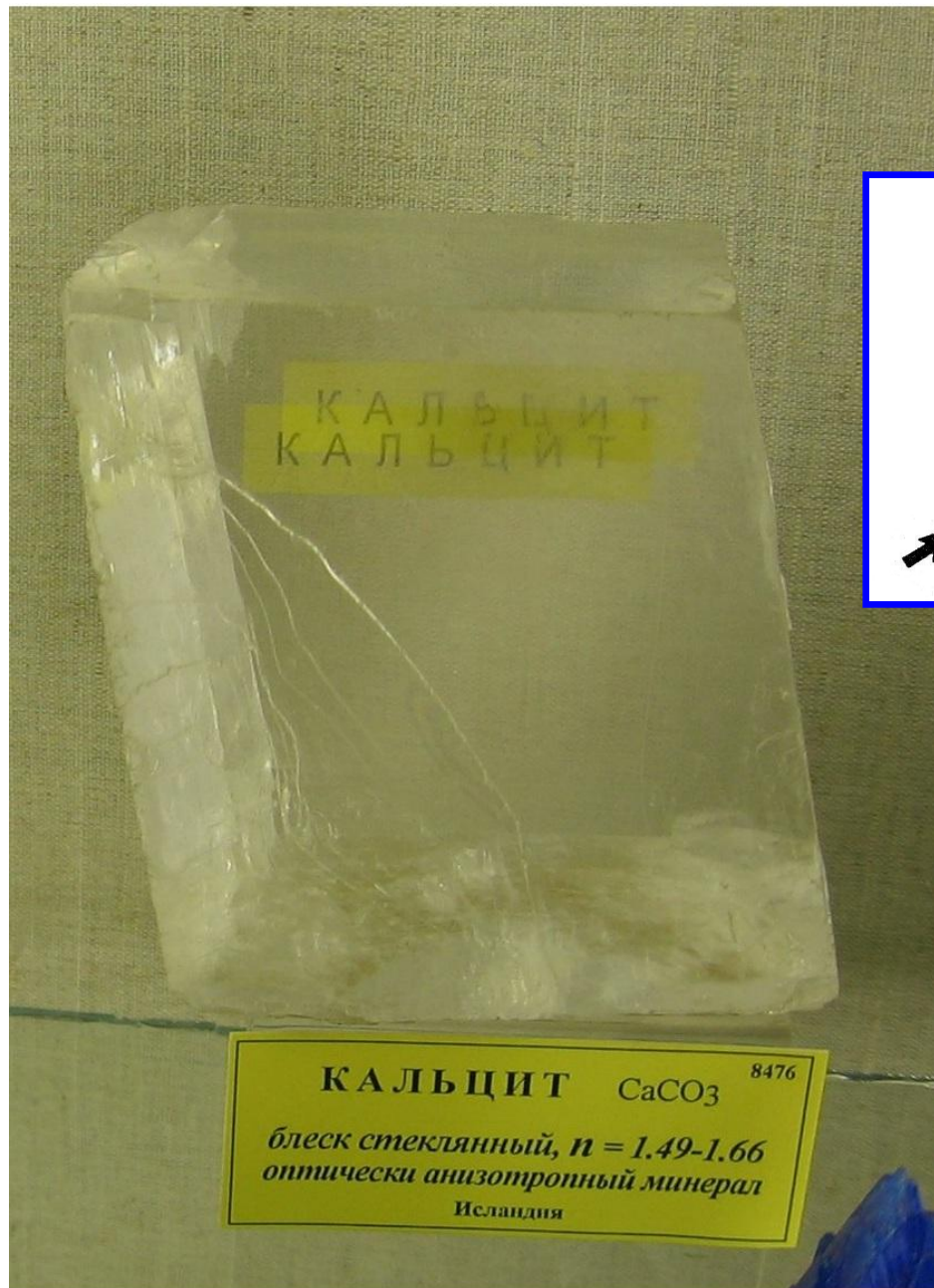
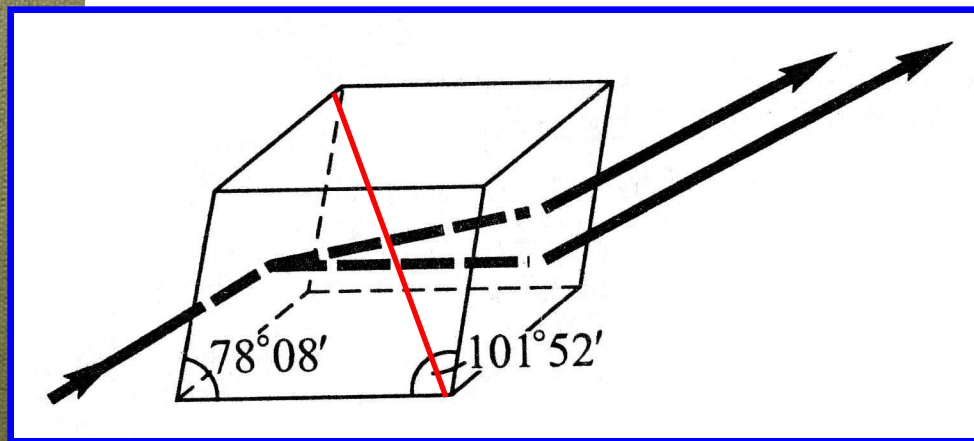
# Двулучепреломление



**Erasmus Bartholinus**  
**1625–1698**

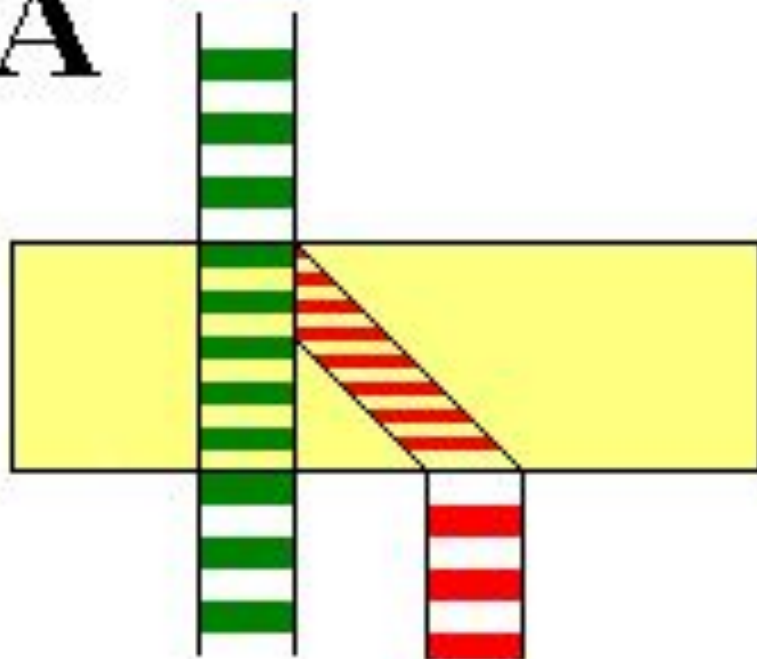
- ✓ Впервые явление было обнаружено в 1669 году датским учёным Э. Бартолиным (Бартолиниусом) на кальците (исландский шпат).
- ✓ Тогда спец.комиссия Английского королевского общества посчитала это курьёзом.
- ✓ Через 20 лет в "Трактате о свете" Гюйгенс объяснил это явление с позиций волновых представлений о свете.

# Двулучепреломление

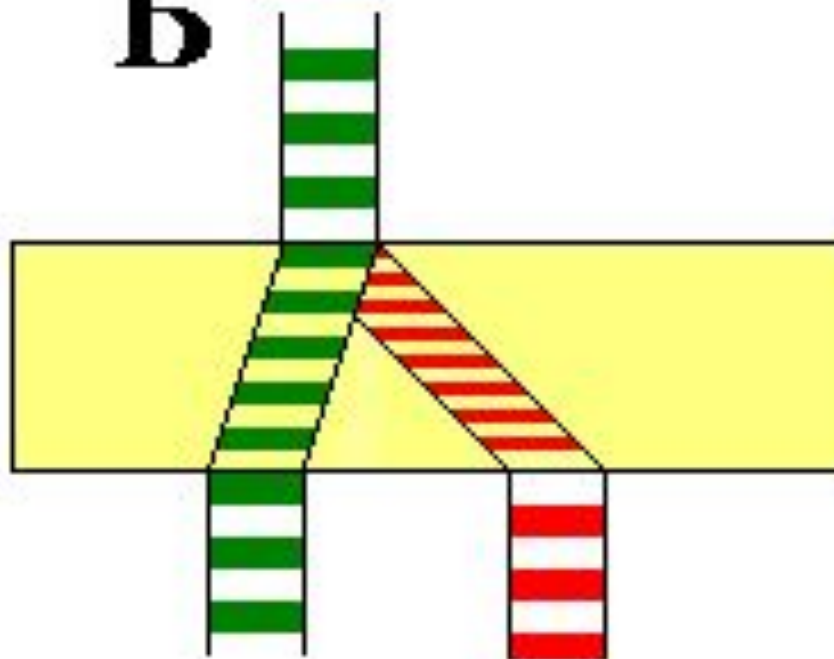


# Ход лучей в одноосном (А) и двуосном (Б) кристаллах

А



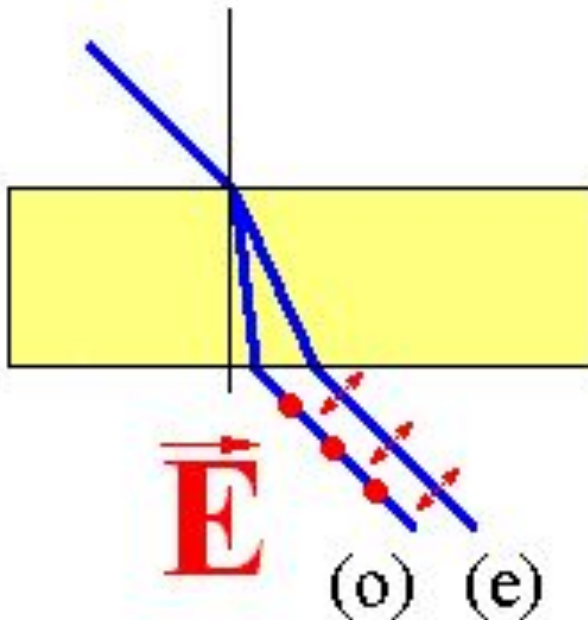
Б



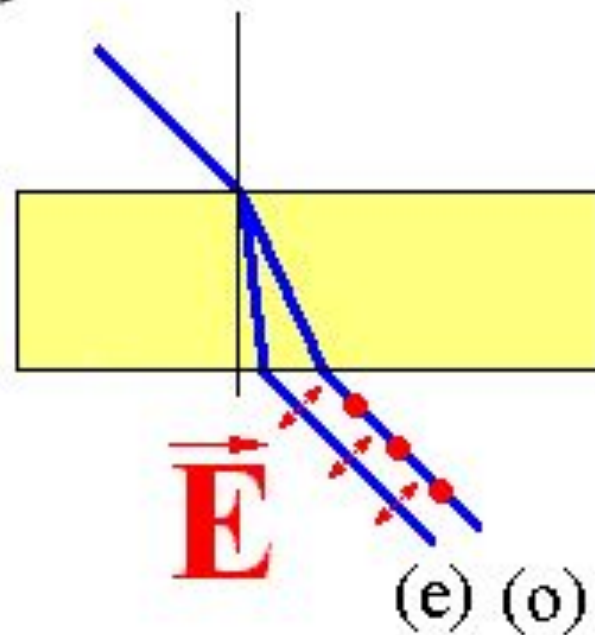
Падающий на пластинку луч разделяется на два: **обыкновенный** и **необыкновенный**. В случае **двупреломляющего кристалла** оба луча **необыкновенные**.

# Ход лучей в одноосном отрицательном (А) и положительном (Б) кристаллах

А



Б



(o) – обыкновенный луч  
(e) – необыкновенный луч

✓ У «-» кристаллов  $V_o < V_e$   
✓ У «+» кристаллов  $V_o > V_e$

# Двулучепреломление в одноосном кристалле

## Уравнения Максвелла

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{D} = [\varepsilon] \vec{E}$$

$$\text{div} \vec{D} = 0$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = [\mu] \vec{H}$$

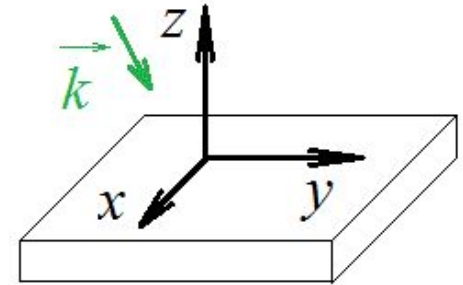
$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$[\varepsilon] = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & -i\varepsilon_{xy} & 0 \\ i\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}$$

$$[\mu] = 1$$

# Электромагнитная волна

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{i\omega(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c}n)} \quad \vec{H} = \vec{H}_o e^{i\omega(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c}n)}$$



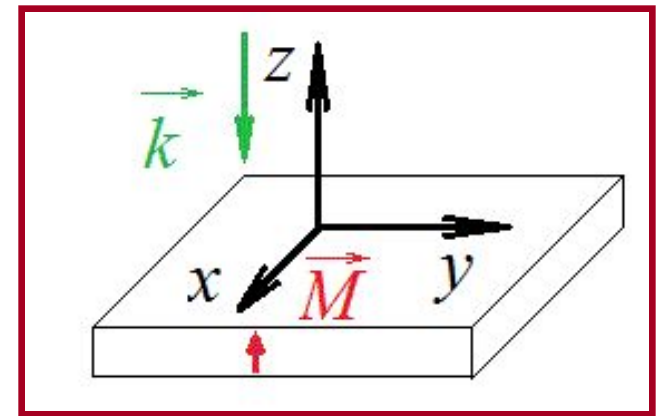
$\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  – направляющие косинусы электромагнитной волны.

$n$  – комплексный показатель преломления.

В случае продольного эффекта  $\alpha = \beta = 0$ ;  $\gamma = 1$

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{i\omega(t - \frac{z}{c}n)} \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} = 0$$

$$\vec{H} = \vec{H}_o e^{i\omega(t - \frac{z}{c}n)} \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0$$



# Вектор D

$$\vec{D} = [\varepsilon] \cdot \vec{E} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & -i\varepsilon_{xy} & 0 \\ i\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_x \varepsilon_{xx} - E_y i\varepsilon_{xy} \\ E_x i\varepsilon_{xy} + E_y \varepsilon_{yy} \\ E_z \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = i\omega \cdot \begin{vmatrix} E_x \varepsilon_{xx} - E_y i\varepsilon_{xy} \\ E_x i\varepsilon_{xy} + E_y \varepsilon_{yy} \\ E_z \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}$$

# Вектор В

$$\vec{B} = \vec{H}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega \cdot \begin{vmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{vmatrix}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \left( \cancel{\frac{\partial H_z}{\partial y}} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial H_z}{\partial x}} \right) + \vec{k} \left( \cancel{\frac{\partial H_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial H_x}{\partial y}} \right) =$$

$$= \vec{i} \left( -\frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} \right)$$

Поскольку  $\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{i\omega n}{c} H_y$ ;  $\frac{\partial H_x}{\partial z} = -\frac{i\omega n}{c} H_x$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{i} \left( - \left( -\frac{i\omega n}{c} \right) H_y \right) + \vec{j} \left( \left( -\frac{i\omega n}{c} \right) H_x \right)$$

Имеем уравнения

$$\frac{i\omega n}{c} H_y = \frac{i\omega}{c} (\varepsilon_{xx} E_x - i\varepsilon_{xy} E_y)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$-\frac{i\omega n}{c} H_x = \frac{i\omega}{c} (i\varepsilon_{xy} E_x + \varepsilon_{yy} E_y)$$

## Ротор E

$$\text{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} =$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$= \vec{i} \left( \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial y}} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial x}} \right) + \vec{k} \left( \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial E_x}{\partial y}} \right) = \vec{i} \left( -\frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} \right)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{i\omega n}{c} E_x$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{i\omega n}{c} E_y;$$

$$\text{rot} \vec{E} = \vec{i} \left( -\left( -\frac{i\omega n}{c} \right) E_y \right) + \vec{j} \left( \left( -\frac{i\omega n}{c} \right) E_x \right)$$

Имеем уравнения

$$-\left( -\frac{i\omega n}{c} \right) E_y = -\frac{i\omega}{c} H_x$$

$$-\frac{i\omega n}{c} E_x = -\frac{i\omega}{c} H_y$$

## Система уравнений для компонент векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ .

$$\begin{cases} nH_y = \varepsilon_{xx}E_x - i\varepsilon_{xy}E_y \\ -nH_x = i\varepsilon_{xy}E_x + \varepsilon_{yy}E_y \\ -nE_y = H_x \\ nE_x = H_y \end{cases}$$

Подставим два последние уравнения системы в первые два.

$$\begin{cases} n^2E_x = \varepsilon_{xx}E_x - i\varepsilon_{xy}E_y \\ n^2E_y = i\varepsilon_{xy}E_x + \varepsilon_{yy}E_y \end{cases} \quad \begin{cases} E_x(n^2 - \varepsilon_{xx}) + i\varepsilon_{xy}E_y = 0 \\ i\varepsilon_{xy}E_x + E_y(\varepsilon_{yy} - n^2) = 0 \end{cases}$$

Однородная система уравнений имеет решение, если ее определитель равен 0.

$$n^4 - n^2(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xy}^2 = 0$$

$$D = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})^2 - 4\varepsilon_{yy}\varepsilon_{xx} + 4\varepsilon_{xy}^2 =$$

$$= (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + 4\varepsilon_{xy}^2$$

$$n_{1,2}^2 = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \pm \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + 4\varepsilon_{xy}^2}}{2}$$

Поскольку существуют два различных значения **n**, в веществе могут распространяться две различные волны.

Из уравнения  $E_x(n^2 - \varepsilon_{xx}) + i\varepsilon_{xy}E_y = 0$

получим величину эллиптичности этих волн

$$\frac{E_y}{E_x}$$

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{\varepsilon_{xx} - n^2}{i\varepsilon_{xy}} = \frac{i(n^2 - \varepsilon_{xx})}{\varepsilon_{xy}}$$

$$\left(\frac{E_y}{E_x}\right)_{1,2} = \frac{i}{\varepsilon_{xy}} \left( \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \pm \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + 4\varepsilon_{xy}^2}}{2} - \varepsilon_{xx} \right)$$

$$\left(\frac{E_y}{E_x}\right)_{1,2} = \frac{i}{\varepsilon_{xy}} \left( \frac{\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx} \pm \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + 4\varepsilon_{xy}^2}}{2} \right) = i \cdot K_{1,2}$$

Определим связь эллиптичностей первой и второй волн.

$$\begin{aligned} \left( \frac{E_y}{E_x} \right)_1 \cdot \left( \frac{E_y}{E_x} \right)_2 &= \\ &= \left( \frac{i}{\varepsilon_{xy}} \right)^2 \cdot \left( \frac{\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx} + \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + 4\varepsilon_{xy}^2}}{2} \right) \times \\ &\times \left( \frac{\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx} - \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + 4\varepsilon_{xy}^2}}{2} \right) = 1 \end{aligned}$$

Эллиптичности первой и второй волн обратны.

Рассмотрим случай  $(\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy})^2 \gg \epsilon_{xy}^2$ , т.е.  $\frac{\epsilon_{xy}^2}{(\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy})^2} \ll 1$

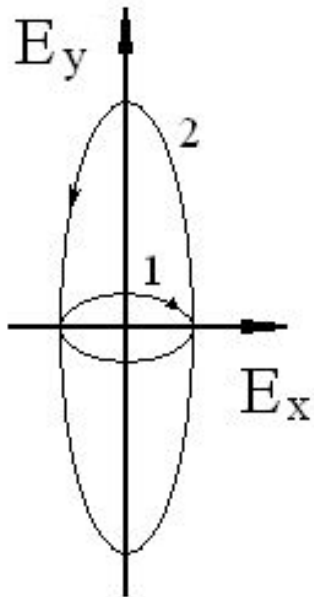
При этом эллиптичность волн имеет вид:

$$\begin{aligned} \left( \frac{E_y}{E_x} \right)_1 &= \frac{i}{\epsilon_{xy}} \left( \frac{\epsilon_{yy} - \epsilon_{xx} + \sqrt{(\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy})^2 + 4\epsilon_{xy}^2}}{2} \right) \\ \left( \frac{E_y}{E_x} \right)_1 &= \frac{i}{2\epsilon_{xy}} \left( \epsilon_{yy} - \epsilon_{xx} + (\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}) \left\{ 1 + \frac{2\epsilon_{xy}^2}{(\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy})^2} \right\} \right) = \\ &= \frac{i}{2\epsilon_{xy}} \left( \cancel{\epsilon_{yy}} - \cancel{\epsilon_{xx}} + \cancel{\epsilon_{xx}} - \cancel{\epsilon_{yy}} + \frac{2\epsilon_{xy}^2}{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}} \right) = \frac{i}{\cancel{2\epsilon_{xy}}} \cdot \frac{\cancel{2}\epsilon_{xy}}{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}} = \\ &= \frac{i\epsilon_{xy}}{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}} \end{aligned}$$

Поскольку  $\left| \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}} \right| \ll 1$ , первая волна малая

В силу того, что эллиптичности волн обратны,  
эллиптичность второй волны имеет вид:

$$\left(\frac{E_y}{E_x}\right)_2 = \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{i\varepsilon_{xy}} = \frac{i(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx})}{\varepsilon_{xy}}$$



Вторая волна является «большой».

# Рассмотрим линейно поляризованную волну в одноосном кристалле

Линейно поляризованную волну представим в виде суммы двух эллиптически поляризованных волн.

$$E = E_1 + E_2$$

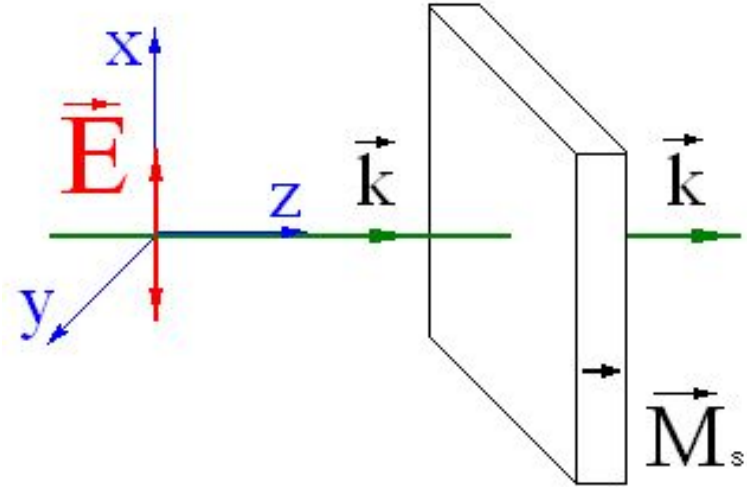
Эллипс можно задать:  $\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases}$  или  $\begin{cases} x = a \cdot e^{i\varphi} \\ y = -ib \cdot e^{i\varphi} \end{cases}$

Компоненты волн имеют вид:

$$\begin{cases} (E_1)_x = a_1 \cdot e^{i\omega \left( t - \frac{zn_1}{c} \right)} \\ (E_1)_y = -ib_1 \cdot e^{i\omega \left( t - \frac{zn_1}{c} \right)} \end{cases} \quad \begin{cases} (E_2)_x = a_2 \cdot e^{i\omega \left( t - \frac{zn_2}{c} \right)} \\ (E_2)_y = -ib_2 \cdot e^{i\omega \left( t - \frac{zn_2}{c} \right)} \end{cases}$$

На входе в оптически активную пластинку толщиной  $d$ :

$$E_x = E_0; E_y = 0. \text{ Значит, } \begin{cases} a_1 + a_2 = E_0 \\ b_1 + b_2 = 0 \end{cases}$$



Следовательно,  $b_1 = -b_2$

Ранее было показано, что  $\frac{b_1}{a_1} = K_1 \ll 1$  и  $\frac{b_2}{a_2} = K_2 \gg 1$

Поскольку  $\frac{b_1 \cdot b_2}{a_1 \cdot a_2} = 1$ ,  $-\frac{b_1^2}{a_1 \cdot a_2} = 1$

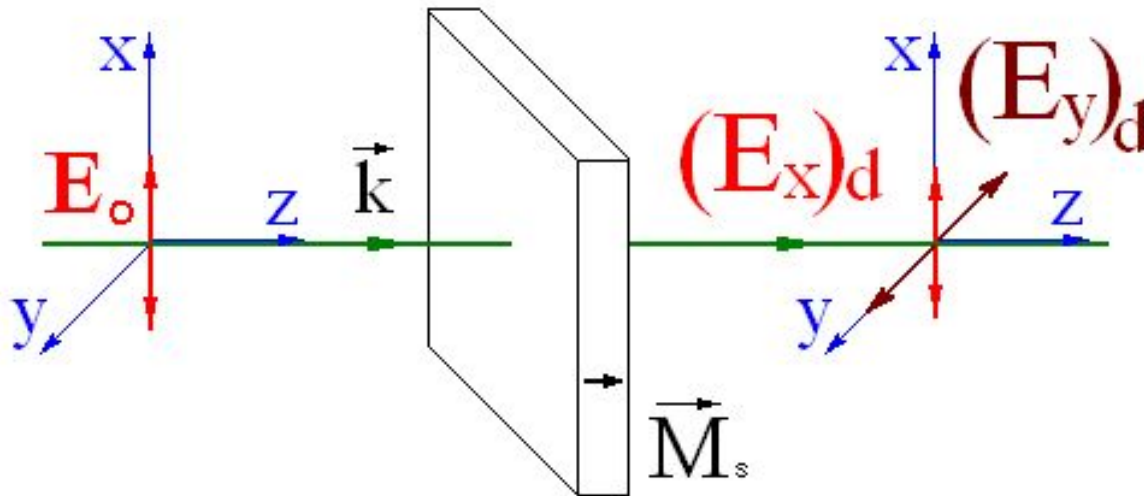
Следовательно  $a_2 = -\frac{b_1^2}{a_1} = -b_1 \cdot K_1$

На выходе из пластинки толщиной  $d$  имеем волну с компонентами:

$$(E_x)_d = (E_1)_x + (E_2)_x = a_1 \cdot e^{i\omega\left(t - \frac{dn_1}{c}\right)} + a_2 \cdot e^{i\omega\left(t - \frac{dn_2}{c}\right)}$$

$$(E_y)_d = (E_1)_y + (E_2)_y = -i \cdot \left( b_1 \cdot e^{i\omega\left(t - \frac{dn_1}{c}\right)} + b_2 \cdot e^{i\omega\left(t - \frac{dn_2}{c}\right)} \right) =$$

$$= -i \cdot \left( b_1 \cdot e^{i\omega\left(t - \frac{dn_1}{c}\right)} - b_1 \cdot e^{i\omega\left(t - \frac{dn_2}{c}\right)} \right)$$



Тогда

ЭЛЛИПТИЧНОСТЬ

ВОЛНЫ НА

ВЫХОДЕ:

$$\left(\frac{E_y}{E_x}\right)_d = \frac{-i \cdot \left( b_1 \cdot e^{i\omega\left(t-\frac{dn_1}{c}\right)} - b_1 \cdot e^{i\omega\left(t-\frac{dn_2}{c}\right)} \right)}{a_1 \cdot e^{i\omega\left(t-\frac{dn_1}{c}\right)} + a_2 \cdot e^{i\omega\left(t-\frac{dn_2}{c}\right)}} =$$

$$= \frac{-i \cdot \cancel{b_1} \cdot \cancel{e^{i\omega\left(t-\frac{dn_1}{c}\right)}} \left( 1 - e^{i\omega\left(\frac{d(n_1-n_2)}{c}\right)} \right)}{\cancel{a_1} \cdot \cancel{e^{i\omega\left(t-\frac{dn_1}{c}\right)}} \left( 1 + \frac{a_2}{a_1} \cdot e^{i\omega\left(\frac{d(n_1-n_2)}{c}\right)} \right)} =$$

$$\frac{-i \cdot K_1 \cdot \left( 1 - e^{i\omega\left(\frac{d(n_1-n_2)}{c}\right)} \right)}{\left( 1 - K_1^2 \cdot e^{i\omega\left(\frac{d(n_1-n_2)}{c}\right)} \right)} = 1$$

$\frac{b_1}{a_1} = K_1$   
 $a_2 = -b_1 \cdot K_1$   
 $K_1 \ll 1$

$$\begin{aligned}
&= -i \cdot K_1 \cdot \left( 1 - e^{i\omega \left( \frac{d(n_1 - n_2)}{c} \right)} \right) = \\
&= -i \cdot K_1 \cdot \left( 1 - \cos\left( \frac{\omega d(n_1 - n_2)}{c} \right) - i \cdot \sin\left( \frac{\omega d(n_1 - n_2)}{c} \right) \right) = \\
&= K_1 \cdot \sin\left( \frac{\omega d(n_2 - n_1)}{c} \right) - K_1 \cdot i \cdot \left( 1 - \cos\left( \frac{\omega d(n_1 - n_2)}{c} \right) \right) = \\
&= K_1 \cdot \sin\left( \frac{\omega d(n_2 - n_1)}{c} \right) - 2K_1 \cdot i \cdot \sin^2\left( \frac{\omega d(n_1 - n_2)}{2c} \right)
\end{aligned}$$

Действительная часть эллиптичности «отвечает» за поворот плоскости поляризации (большой оси эллипса), а мнимая — за эллиптичность.

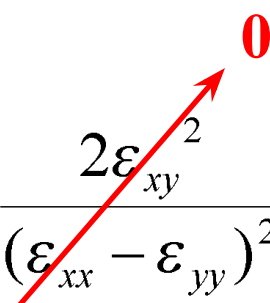
Угол поворота плоскости поляризации на выходе:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \operatorname{Re} \left( \left( \frac{E_y}{E_x} \right)_d \right) = K_1 \cdot \sin \left( \frac{\omega d (n_2 - n_1)}{c} \right) = \\ &= \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}} \cdot \sin \left( \frac{\omega d (n_2 - n_1)}{c} \right) \end{aligned}$$

Тангенс угла поворота пропорционален недиагональной компоненте тензора  $\varepsilon$ .

## Определим величину угла поворота плоскости поляризации

из условия  $\frac{\epsilon_{xy}^2}{(\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy})^2}$  Показатели преломления:

$$n_{1,2} = \left( \frac{\epsilon_{yy} + \epsilon_{xx} \pm \sqrt{(\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy})^2 + 4\epsilon_{xy}^2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \left( \frac{\epsilon_{yy} + \epsilon_{xx} \pm (\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}) \left( 1 + \frac{2\epsilon_{xy}^2}{\cancel{(\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy})^2}} \right)}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$


$$n_1 \approx \sqrt{\epsilon_{xx}}$$

$$n_2 \approx \sqrt{\epsilon_{yy}}$$

## Угол поворота плоскости поляризации:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}} \cdot \sin \left( \frac{\omega d (n_2 - n_1)}{c} \right) = \\ &= \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}} \cdot \sin \left( \frac{\omega d}{c} (\sqrt{\varepsilon_{yy}} - \sqrt{\varepsilon_{xx}}) \right) \end{aligned}$$

Для изотропной среды ( $\varepsilon_{xx} \approx \varepsilon_{yy} \approx \varepsilon$ )

$$|tg\theta| = \left| \frac{\varepsilon_{xy} \cdot \sin\left(\frac{\omega d}{c}(\sqrt{\varepsilon_{yy}} - \sqrt{\varepsilon_{xx}})\right)}{(\sqrt{\varepsilon_{xx}} - \sqrt{\varepsilon_{yy}}) \cdot (\sqrt{\varepsilon_{xx}} + \sqrt{\varepsilon_{yy}})} \right|$$

Для малых углов

$$tg\theta \approx \theta$$

$$\theta = \frac{\varepsilon_{xy} \cdot \omega d}{c \cdot \sqrt{\varepsilon}}$$

$$|tg\theta| = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_{xy} \cdot \sin\left(\frac{\omega d}{c} \alpha\right)}{\alpha \cdot (\sqrt{\varepsilon_{xx}} + \sqrt{\varepsilon_{yy}})} = \frac{\varepsilon_{xy} \cdot \omega d \cancel{\alpha}}{c \cdot \cancel{\alpha} \sqrt{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon_{xy} \cdot \omega d}{c \cdot \sqrt{\varepsilon}}$$

где  $\alpha = \left| \sqrt{\varepsilon_{xx}} - \sqrt{\varepsilon_{yy}} \right|$

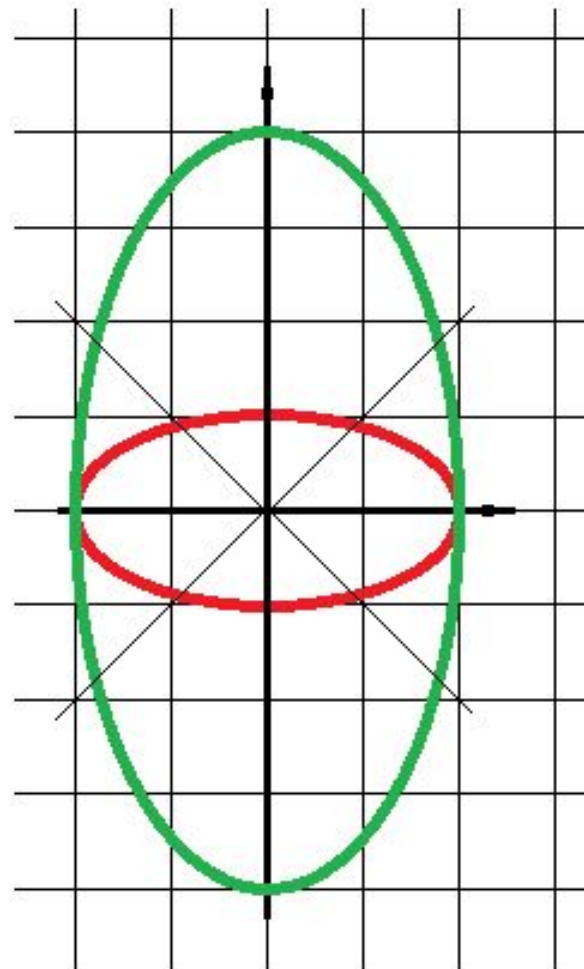
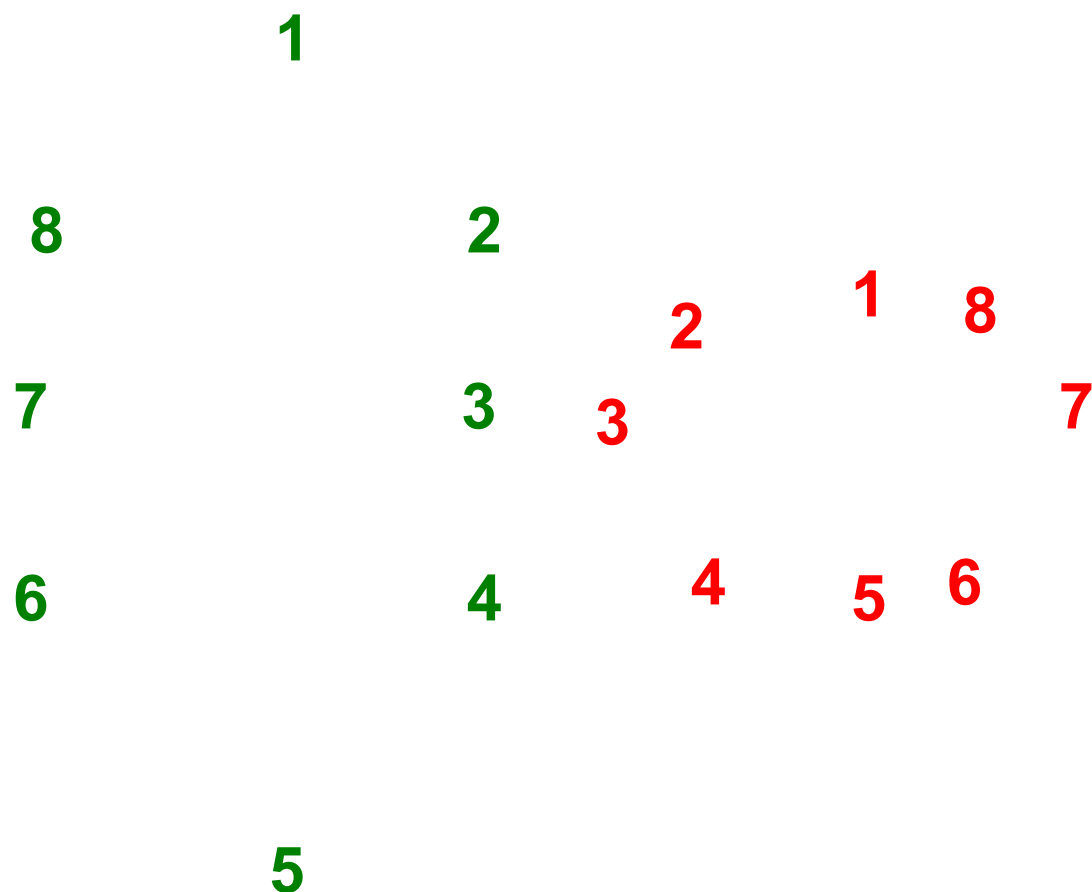
Ранее для гироэлектрической среды было получено:

$$\theta = \frac{\omega d \sqrt{\varepsilon \mu}}{c} Q \quad \text{Здесь} \quad Q = \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon \mu}, 1$$

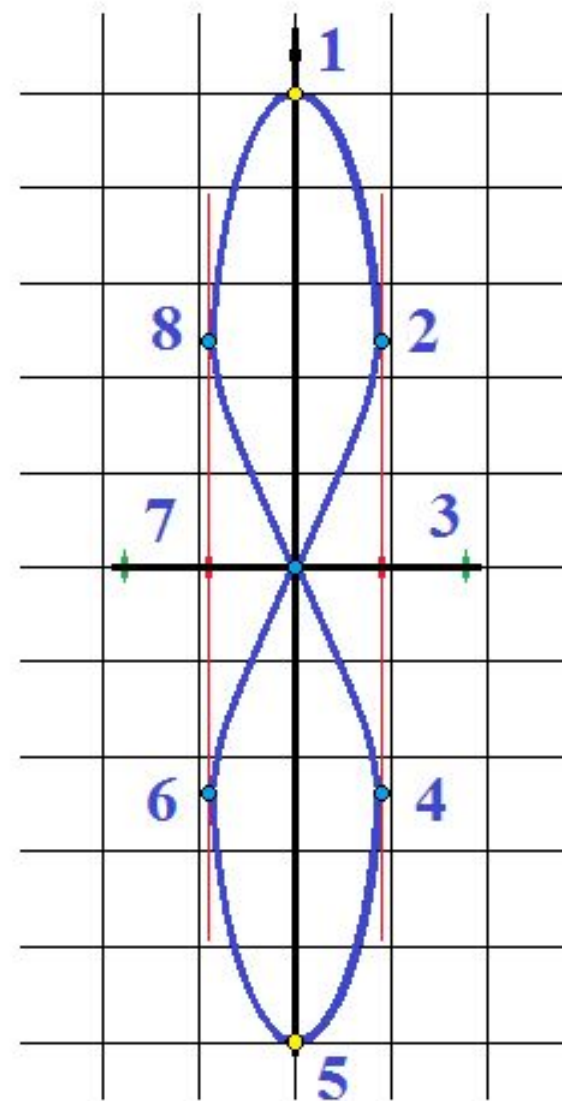
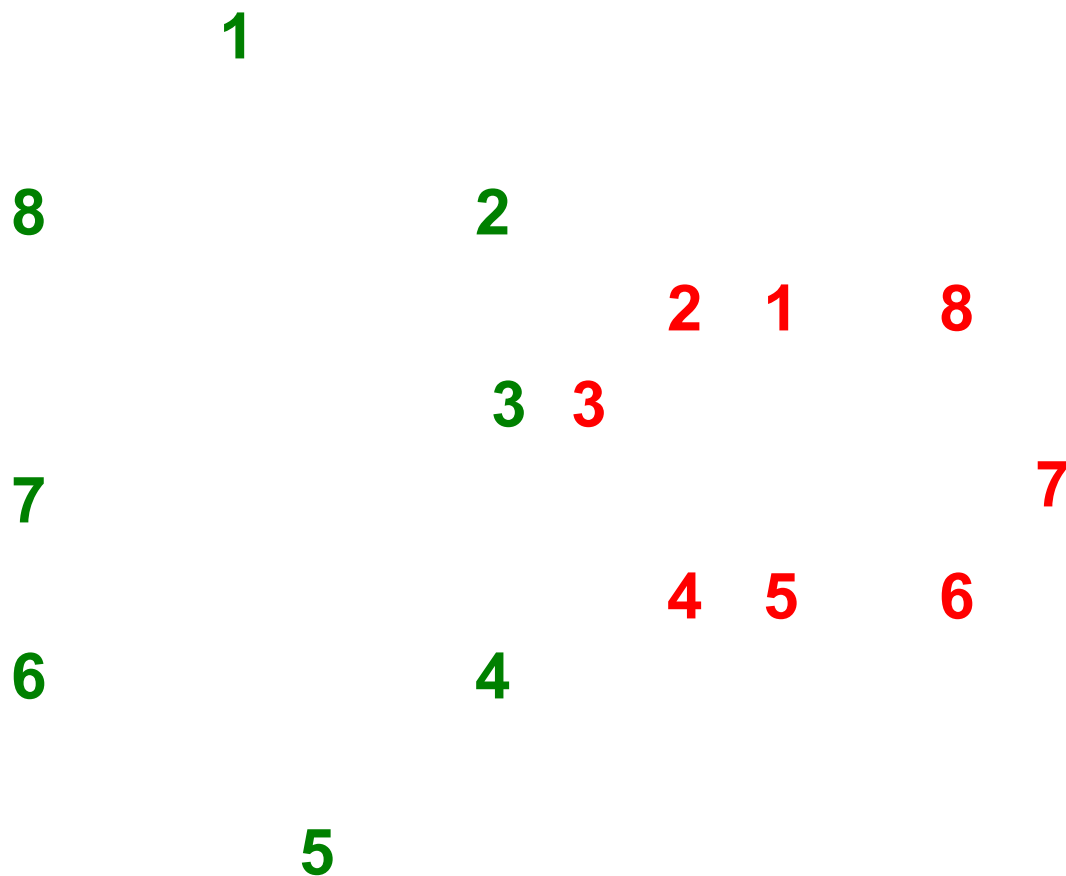
$$\theta = \frac{\omega d \sqrt{\varepsilon \mu}}{c} Q = \frac{\omega d \sqrt{\varepsilon}}{c} \cdot \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon} = \frac{\omega d \varepsilon_{xy}}{c \sqrt{\varepsilon}}$$

**Формулы совпадают!**

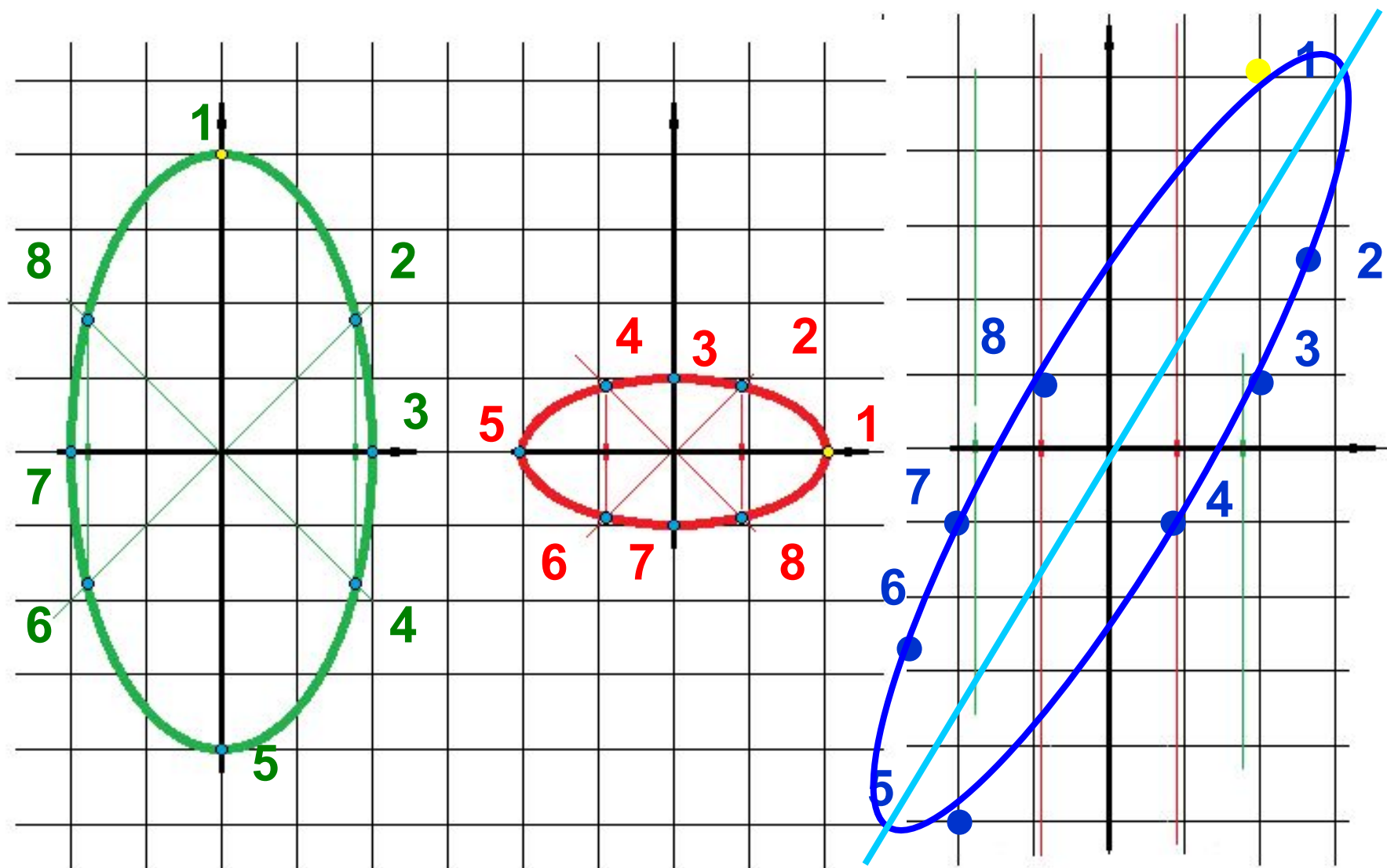
# Разложение линейно поляризованной волны на две эллиптически поляризованные



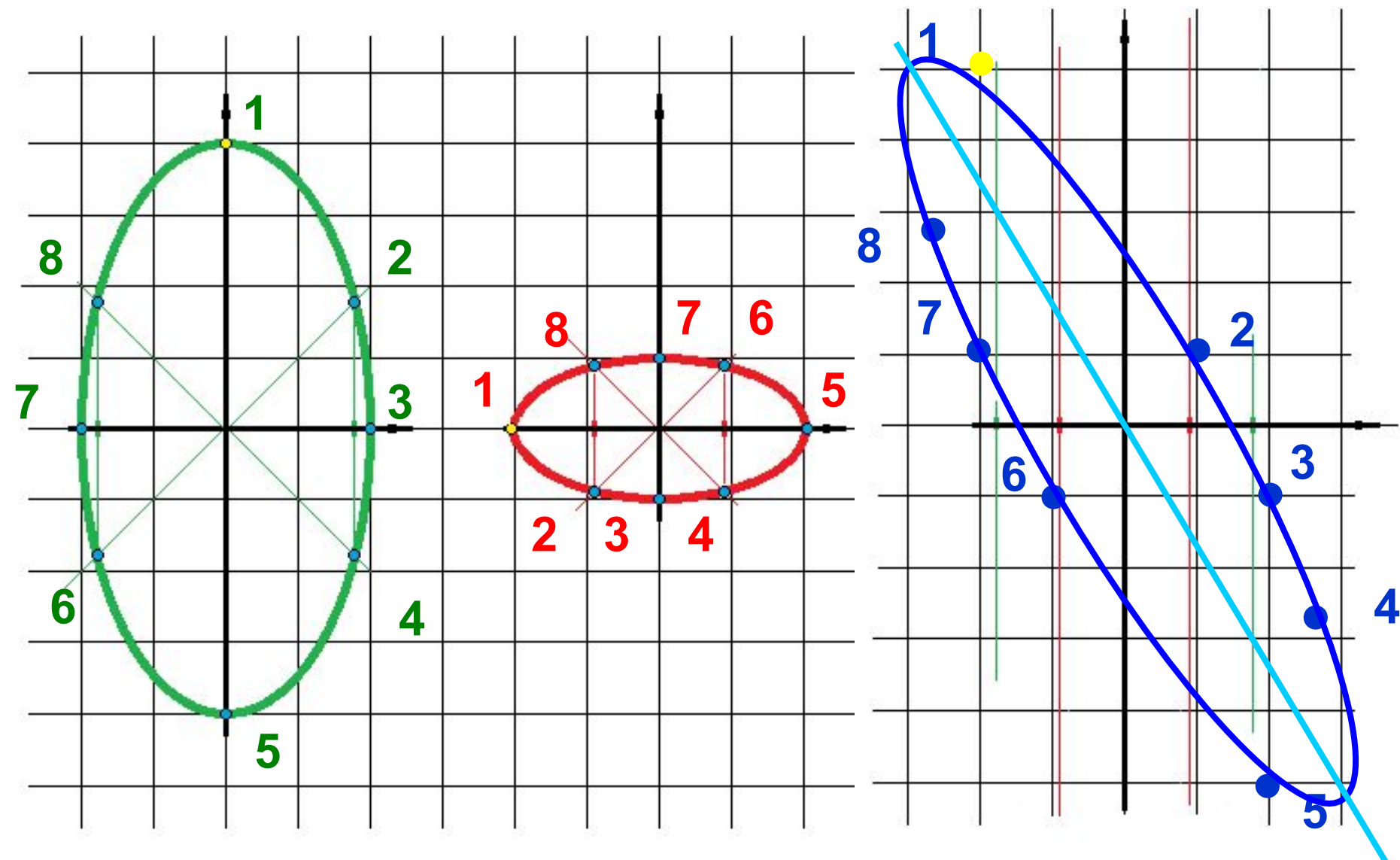
# Разложение линейно поляризованной волны на две эллиптически поляризованные (перед образцом)



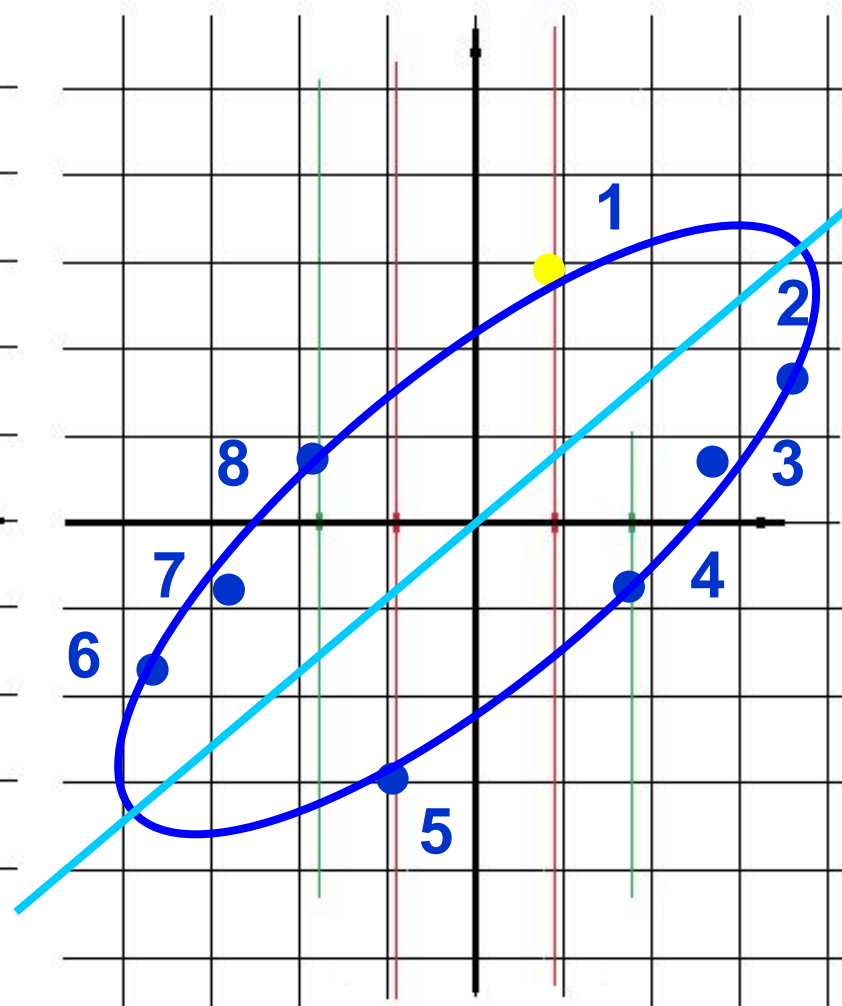
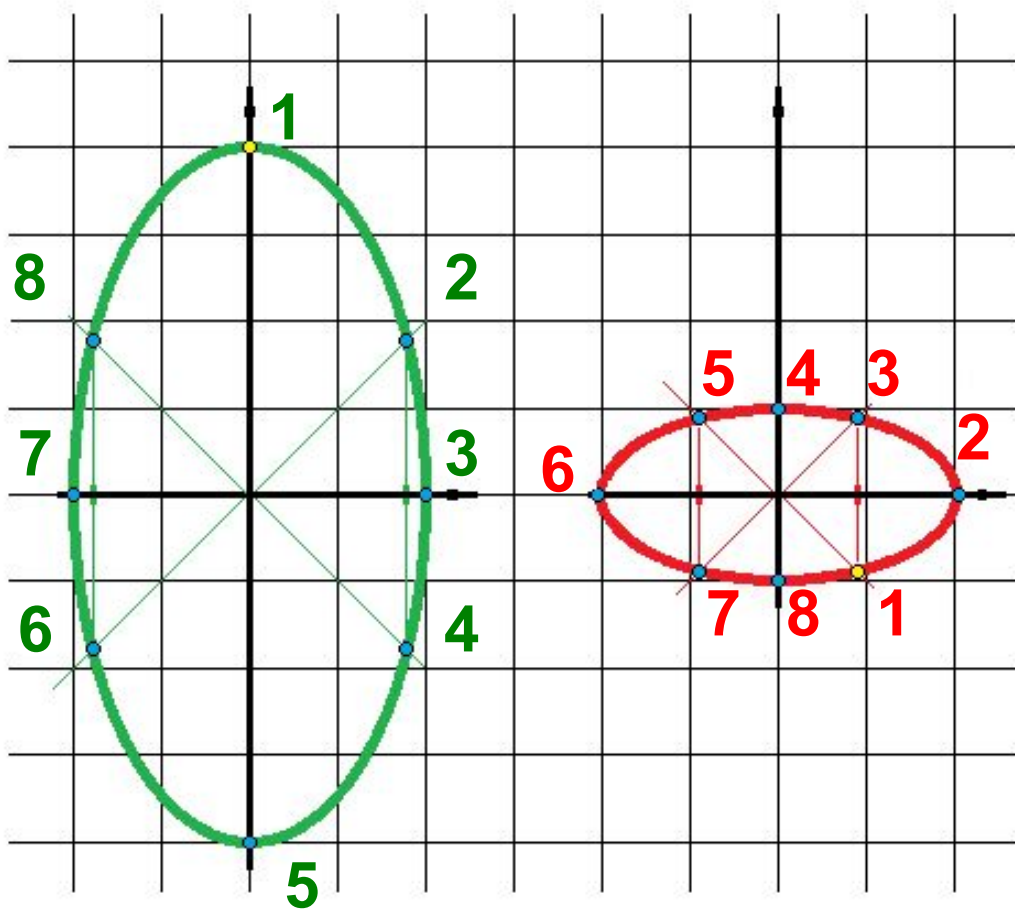
# Разложение линейно поляризованной волны на две эллиптически поляризованные со сдвигом $+\pi/2$



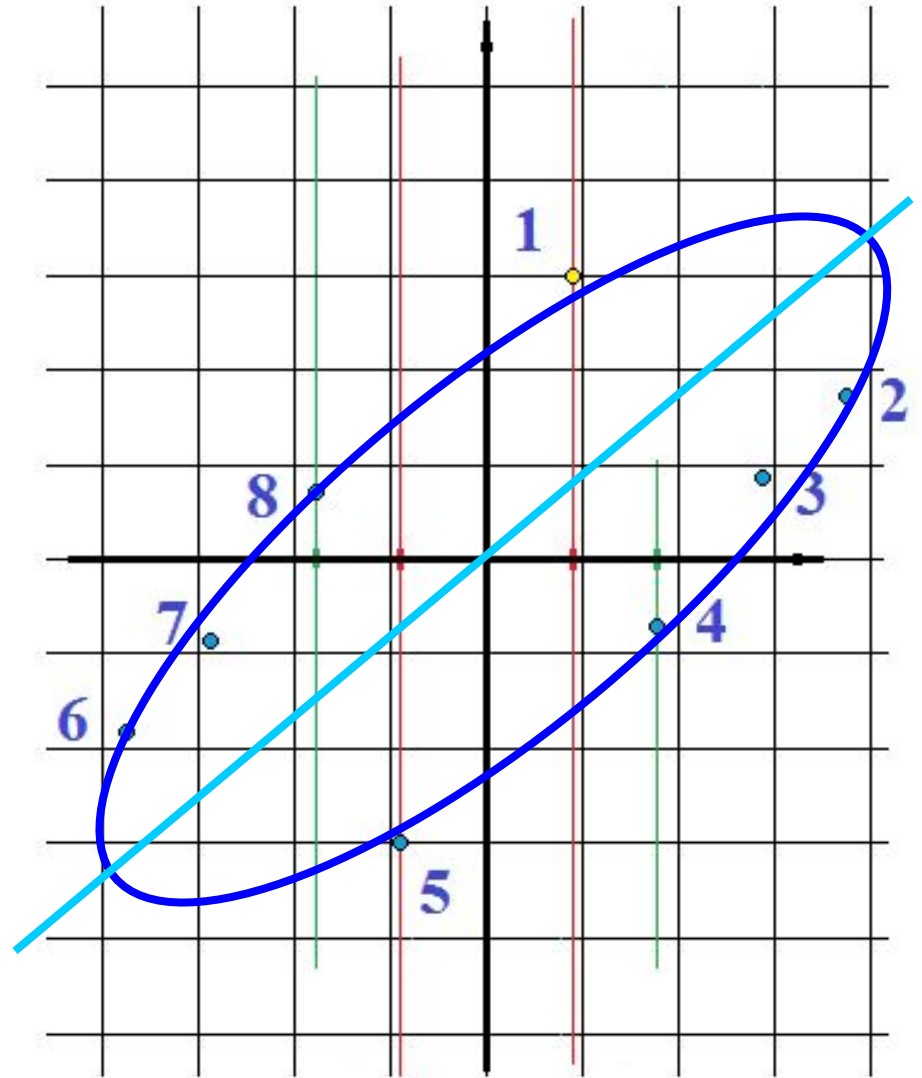
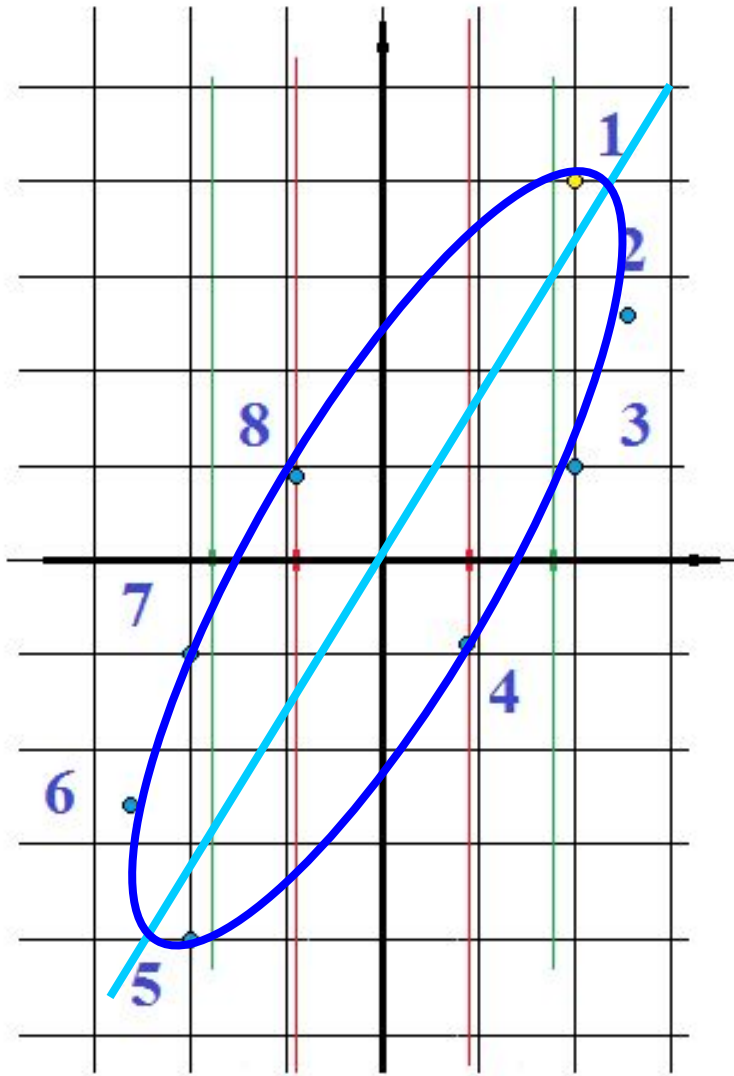
# Разложение линейно поляризованной волны на две эллиптически поляризованные со сдвигом $-\pi/2$



# Разложение линейно поляризованной волны на две эллиптически поляризованные со сдвигом $+3\pi/4$

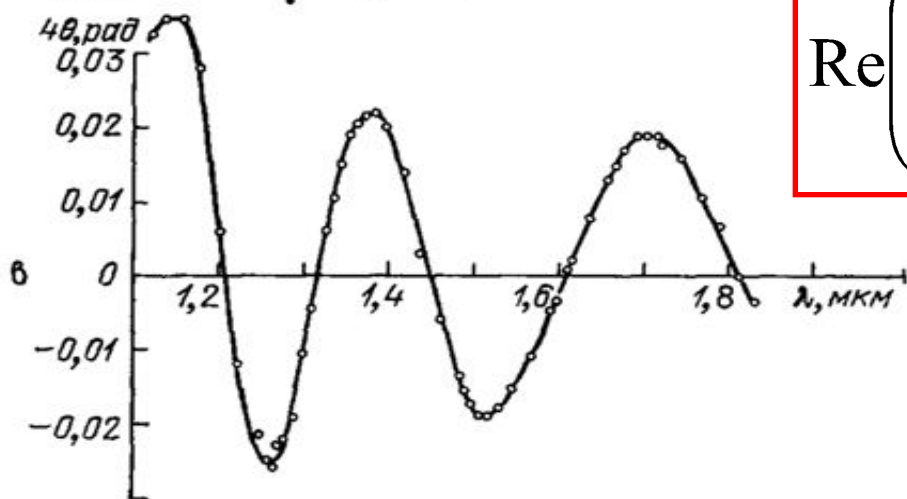
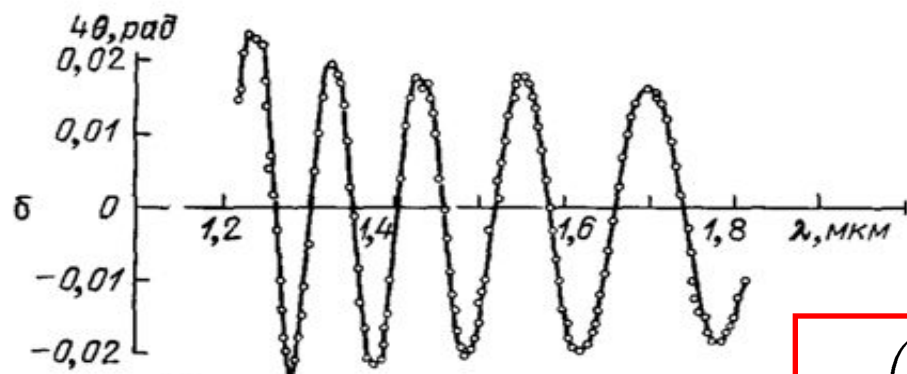
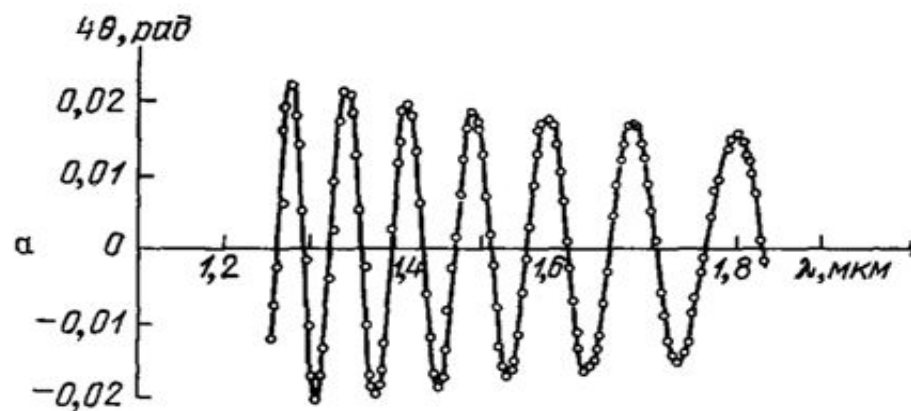


# Разложение линейно поляризованной волны на две эллиптически поляризованные со сдвигом $+\pi/2$ и $+3\pi/4$



## Эллиптичность волны на выходе:

$$\begin{aligned}\left(\frac{E_y}{E_x}\right)_d &= \frac{-i \cdot \left( b_1 \cdot e^{i\omega\left(t-\frac{dn_1}{c}\right)} - b_1 \cdot e^{i\omega\left(t-\frac{dn_2}{c}\right)} \right)}{a_1 \cdot e^{i\omega\left(t-\frac{dn_1}{c}\right)} + a_2 \cdot e^{i\omega\left(t-\frac{dn_2}{c}\right)}} = \\ &= K_1 \cdot \sin\left(\frac{\omega d(n_2 - n_1)}{c}\right) - 2K_1 \cdot i \cdot \sin^2\left(\frac{\omega d(n_1 - n_2)}{2c}\right)\end{aligned}$$



**Зависимость угла поворота  
большой оси эллипса  
поляризации в пластинках  
ортоферрита иттрия  $\text{YFeO}_3$ ,  
перпендикулярных оси  $[001]$ ,  
разных толщин:**

**а – 750 мкм, б – 515 мкм,  
в – 210 мкм.**

$$\text{Re} \left( \left( \frac{E_y}{E_x} \right)_d \right) = K_1 \cdot \sin \left( \frac{\omega d (n_2 - n_1)}{c} \right)$$

**Четкин М.В., Щербаков Ю.И.  
ФТТ, 11, 1620 (1969)**

## Двулучепреломление

- Симметрия тензоров  $[\epsilon]$  и  $[\mu]$ .
- Анизотропные среды. Оптическая ось.
- Двулучепреломление в одноосном кристалле
- Линейно поляризованная волна в одноосном кристалле.

Если в одноосном кристалле линейно поляризованный свет распространяется не по оптической оси, то на выходе из кристалла свет становится эллиптически поляризованным

- Случай изотропной среды