

1.1. Определение модуля. Решение по определению.

По определению, модуль, или абсолютная величина, неотрицательного числа a совпадает с самим числом, а модуль отрицательного числа равен противоположному числу, то есть $-a$:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

Запишем решение простейших уравнений в общем виде:

$$|x| = b \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm b, & b > 0 \\ x = 0, & b = 0 \\ \emptyset, & b < 0 \end{cases}$$

Пример. Решить уравнение $|x - 3| = 3 - 2x$.

Рассматриваем два случая.

При $x - 3 > 0$ уравнение принимает вид $x - 3 = 3 - 2x$, откуда $x = 2$. Но это значение не удовлетворяет неравенству $x - 3 > 0$, потому не входит в ответ исходного уравнения.

При $x - 3 < 0$ получаем $3 - x = 3 - 2x$ и $x = 0$. Этот корень удовлетворяет соответствующему условию $x - 3 < 0$.

Итак, ответ к исходному уравнению: $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

1.2. Решение уравнений по правилам

1-е правило:

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0; \\ -f(x) = g(x), \\ f(x) < 0; \end{cases} \right.$$

2-е правило:

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{cases} g(x) \geq 0; \\ f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{cases} \right.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Фигурные скобки обозначают системы, а квадратные – совокупности.

Решения системы уравнений – это значения переменной, одновременно удовлетворяющие всем уравнениям системы.

Решениями совокупности уравнений являются все значения переменной, каждое из которых есть корень хотя бы одного из уравнений совокупности.

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

Пример . Решить уравнение $|x^2 - x - 6| = |2x^2 + x - 1|$.

Решение. Мы уже знаем, что рассматривать (целых 4) варианта распределения знаков выражений под модулями здесь не нужно: это уравнение равносильно совокупности двух квадратных уравнений без каких-либо дополнительных неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 = 2x^2 + x - 1, \\ x^2 - x - 6 = -2x^2 - x + 1. \end{cases}$$

Которая равносильна:
$$\begin{cases} x^2 + 2x + 5 = 0, \\ 3x^2 = 7. \end{cases}$$

Первое уравнение совокупности решений не имеет (его дискриминант отрицателен), второе уравнение имеет два корня .

Ответ
:
$$-\sqrt{\frac{7}{3}}; \sqrt{\frac{7}{3}}$$

Третий способ освобождения от модуля – замена переменной

Пример . Решить уравнение: $(x - 7)^2 - |x - 7| = 30$.

Решение. Заметим, что $(x - 7)^2 = |x - 7|^2$, тогда уравнение примет вид:
 $|x - 7|^2 - |x - 7| - 30 = 0$.

Пусть $|x - 7| = t$, $t \geq 0$, тогда решим квадратное уравнение: $t^2 - t - 30 = 0$

Его корни $t_1 = 6, t_2 = -5$, условию $t \geq 0$ удовлетворяет первый корень.

Возвращаясь к переменной x , получаем уравнение $|x - 7| = 6$

решая которое находим: $x = 13, x = 1$

Ответ: . $x = 13, x = 1$

Задачи с несколькими модулями. Два основных подхода к решению.

«последовательное» раскрытие модулей



Сначала один из модулей изолируется в одной части уравнения (или неравенства) и раскрывается одним из описанных ранее методов. Затем то же самое повторяется с каждым из получившихся в результате уравнений с модулями и так продолжается, пока мы не избавимся ото всех модулей.

«параллельное» раскрытие модулей



Можно снять сразу все модули в уравнении или неравенстве и выписать все возможные сочетания знаков подмодульных выражений. При снятии модуля может получить один из двух знаков – плюс или минус. Эти области определяются знаками выражений под модулями.

Пример. Решить уравнение: $|1 - 3x| + 4|3 + x| = 12$ **1 способ**

Решение.

Уединим второй модуль и раскроем его, пользуясь первым способом, то есть просто определением абсолютной величины:

$$4|3 + x| = 12 - |1 - 3x| \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 3 + x \geq 0, \\ 12 + 4x = 12 - |1 - 3x|, \end{cases} \\ \begin{cases} 3 + x < 0, \\ -12 - 4x = 12 - |1 - 3x| \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 3 + x \geq 0, \\ -4x = |1 - 3x|, \end{cases} \\ \begin{cases} 3 + x < 0, \\ 24 + 4x = |1 - 3x|. \end{cases} \end{cases}$$

К полученным двум уравнениям применяем второй способ освобождения от модуля:

$$\begin{cases} \begin{cases} -3 \leq x \leq 0, \\ \begin{cases} 1 - 3x = -4x, \\ 1 - 3x = 4x, \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} -6 \leq x < -3, \\ \begin{cases} 1 - 3x = 24 + 4x, \\ 1 - 3x = -4x - 24. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Наконец, решаем получившиеся четыре линейных уравнения и отбираем те их корни, которые удовлетворяют соответствующим неравенствам :

Ответ: $-1; -\frac{23}{7}$

Пример. Решить уравнение: $|1 - 3x| + 4|3 + x| = 12$ **2 способ**

Решение.

Рассмотрим 4 возможных набора знаков выражений под модулями.

1. $1 - 3x \geq 0, 3 + x \geq 0: (1 - 3x) + 4(3 + x) = 12 \Leftrightarrow x = -1.$
2. $1 - 3x < 0, 3 + x \geq 0: -(1 - 3x) + 4(3 + x) = 12 \Leftrightarrow x = \frac{1}{7}.$
3. $1 - 3x \geq 0, 3 + x < 0: (1 - 3x) - 4(3 + x) = 12 \Leftrightarrow x = -\frac{23}{7}.$
4. $1 - 3x < 0, 3 + x < 0: -(1 - 3x) - 4(3 + x) = 12 \Leftrightarrow x = -25.$

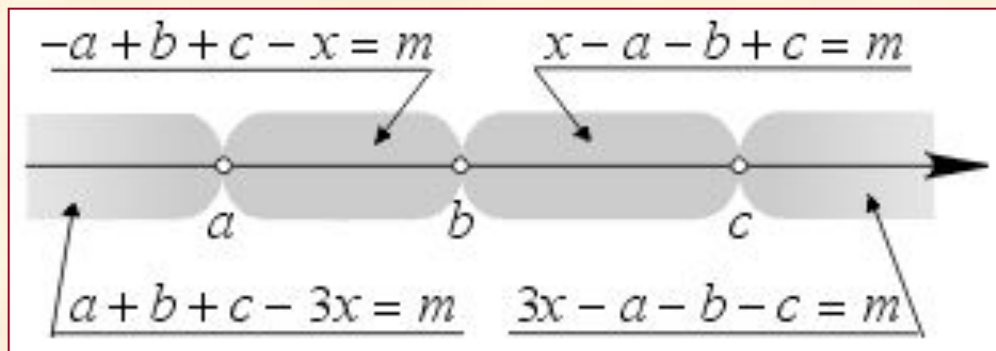
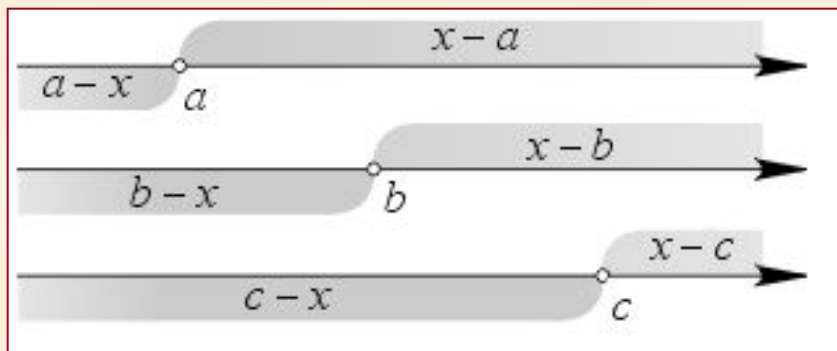
Лишь первый и третий из этих корней удовлетворяют соответствующим неравенствам, а значит, и исходному уравнению.

Ответ: $-1; -\frac{23}{7}$

Метод интервалов в задачах с модулями.

Пусть имеется уравнение, в которое входят три модуля от линейных выражений; например: $|x - a| + |x - b| + |x - c| = m$.

Первый модуль равен $x - a$ при $x \geq a$ и $a - x$ при $x < a$. Второй равен $x - b$ или $b - x$ при $x \geq b$ и $x < b$ соответственно. Аналогично раскрывается и третий модуль. Нарисуем эти области и возьмем их пересечения.

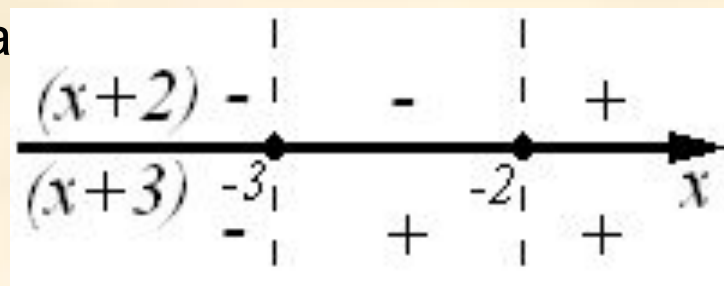


В частности, если все выражения под модулями рациональны, то достаточно отметить на оси их корни, а также точки, где они не определены, то есть корни их знаменателей. Отмеченные точки и задают искомые промежутки знакопостоянства.

Пример. Решить уравнение: $|x+2| + |x+3| = x$

Решение.

Найдем нули функции $x+2=0$ или $x+3=0$, откуда $x=-2$, $x=-3$.
Рассмотрим 3 возможных набора знаков выражений под модулями.
Решаем задачу на каждом интервале



$$1) x < -3: -x-2-x-3=x, -3x=5 \Rightarrow x=-\frac{5}{3} \notin (-\infty; -3)$$

$$2) -3 \leq x < -2: -x-2+x+3=x, x=-5 \Rightarrow x=-5 \notin [-3; -2)$$

$$3) x \geq -2: x+2+x+3=x, x=-5 \Rightarrow x=-5 \notin [-2; +\infty)$$

Итак, данное уравнение не имеет решений.

Ответ: $\emptyset$

Вложенные модули

Последовательное раскрытие модулей наиболее эффективно в "задачах-матрешках", где внутри одного модуля находится другой, а то и несколько.

Пример. Решить уравнение: $||x - 1| + 2| = 3$

Решение.

Освободимся от внешнего модуля, получим:

$$\begin{cases} |x - 1| + 2 = 3, \\ |x - 1| + 2 = -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 1| = 1, \\ |x - 1| = -5. \end{cases}$$

Второе уравнение совокупности решений не имеет, так как модуль всегда положителен, а первое уравнение

равносильно совокупности: $\begin{cases} x - 1 = 1, \\ x - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 0. \end{cases}$

Ответ: 0; 2.

Модули и квадраты

Существует простой и быстрый способ освобождения от знака модуля в уравнениях вида $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x)$

Он основан на двух очевидных соображениях. Во-первых, из двух неотрицательных чисел то больше, квадрат которого больше, а если квадраты равны, то и числа равны: $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$; $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$.

Во-вторых, квадрат модуля числа равен квадрату самого числа: $|a|^2 = a^2$. Поэтому допускается такое равносильное преобразование:

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x) \Leftrightarrow (f(x) + g(x))(f(x) - g(x)) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

Эту же идею можно применить к уравнениям или неравенствам, одна часть которых равна нулю, а другая содержит разность модулей как сомножитель. В такой задаче разность модулей можно заменить разностью квадратов тех же выражений: $(|f(x)| - |g(x)|)h(x) > 0 \Leftrightarrow (f^2(x) - g^2(x))h(x) > 0$

Модули неотрицательных выражений.

Пример 1. Решить уравнение: $\left| \dots \left| |x| + 1 \right| + \dots \right| + 10 = 55$

Решение.

Нетрудно догадаться, что все выражения, стоящие под знаком второго, третьего и т.д. модулей положительны. И поскольку модуль положительного выражения равен самому этому выражению, получим

$$\left| \dots \left| |x| + 1 \right| + \dots \right| + 10 = 55 \Leftrightarrow |x| + 1 + 2 + \dots + 10 = 55 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ответ: 0

Пример 2. Решить уравнение: $\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 3$

Решение.

Воспользуемся тождеством

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} = 3$$

, решая которое методом интервалов получим ответ

$\sqrt{f^2(x)} = |f(x)|$, и получим уравнение

Ответ: $x \in [2; +\infty)$

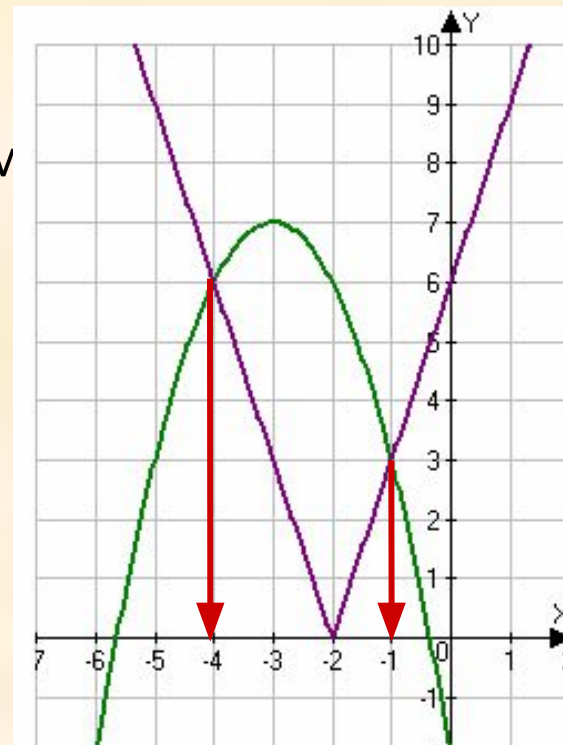
Графическое решение уравнений, содержащих знак абсолютной величины.

Решить уравнение : $3|x + 2| + x^2 + 6x + 2 = 0$.

Для решения уравнения графическим способом надо построить графики функций

$$y = 3|x + 2| \quad y = -x^2 - 6x - 2$$

Парабола пересеклась с «уголком» в точках с координатами $(-4; 6)$ и $(-1; 3)$, следовательно, решениями уравнения будут абсциссы точек: $x = -1, x = -4$



Ответ: $x = -1, x = -4$

Графическое решение уравнений, содержащих знак абсолютной величины.

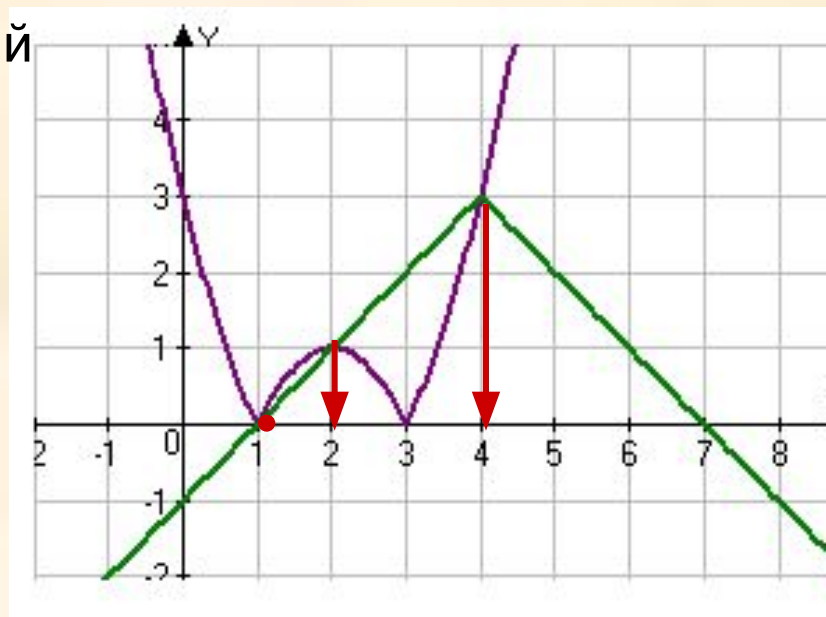
Решить уравнение: $|4 - x| + |(x - 1)(x - 3)| = 3$.

Для решения уравнения графическим способом, надо построить графики функций

$$y = 3 - |4 - x| \quad y = |(x - 1)(x - 3)|$$

Парабола пересеклась с «уголком» в точках с координатами $(1; 0)$, $(2; 1)$ и $(4; 3)$, следовательно, решениями уравнения будут абсциссы точек:

$$x = 1, x = 2, x = 4$$



Ответ: $x = 1, x = 2, x = 4$

Графическое решение уравнений, содержащих знак абсолютной величины.

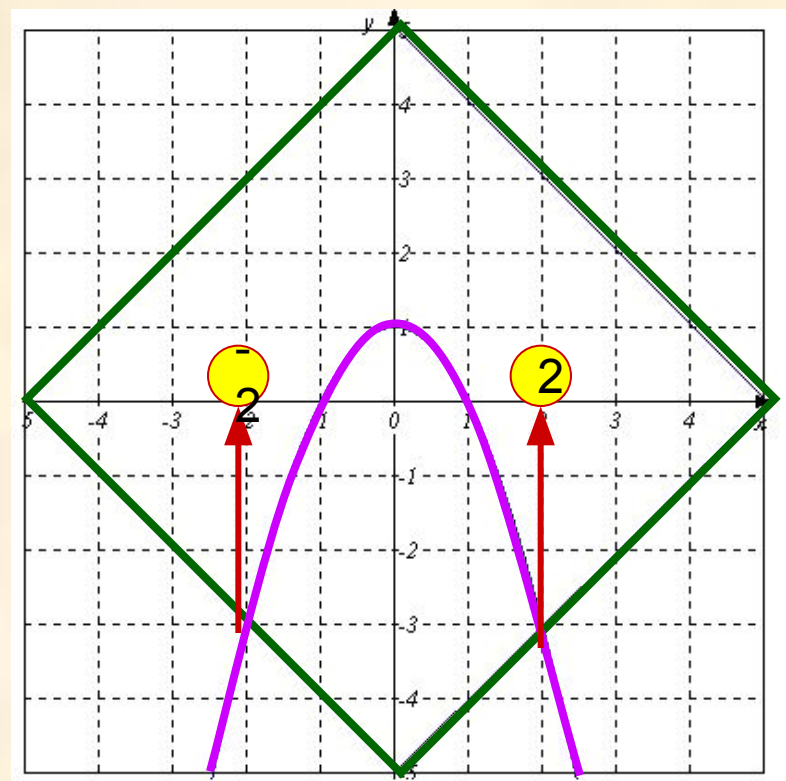
Решить графически уравнение $\begin{cases} 1 - x^2 = y \\ |x| + |y| = 5 \end{cases}$

Для решения уравнения
графическим способом, надо
построить графики:

$$|y| = 5 - |x| \quad y = 1 - x^2$$

Эти графики пересекаются в
двух точках $(-2; -3)$ и $(2; 3)$,
следовательно, исходное
уравнение имеет два решения

$$x = -2, x = 2$$



Ответ: $x = -2, x = 2$

Найти все значения a , при которых уравнение

$$(a + 4x - x^2 - 1)(a + 1 - |x - 2|) = 0$$

 имеет ровно три корня?

Данное уравнение равносильно совокупности параметр a ,
 выражая которую
 получаем:

$$a = x^2 - 4x + 1$$

$$a = |x - 2| - 1$$

График этой совокупности –
 объединение уголка
 параболы.

Прямая $a = -1$
 пересекает полученное
 объединение в трех
 точках.

Ответ: $a = -1$

равносильно

$$\begin{cases} a - x^2 + 4x - 1 = 0 \\ a - |x - 2| + 1 = 0 \end{cases}$$

