

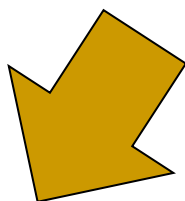


Системы счисления

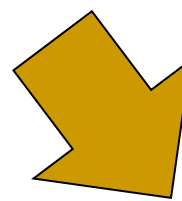


Система счисления - это способ наименования и изображения чисел с помощью цифр, то есть символов, имеющих определенные количественные значения.

Число



Значение



Форма записи

Система счисления

Система счисления - совокупность приемов
наименования и записи чисел



Системы счисления

Основание	Система счисления	Знаки
2	Двоичная	0,1
3	Троичная	0,1,2
4	Четвертичная	0,1,2,3
5	Пятиричная	0,1,2,3,4
8	Восьмиричная	0,1,2,3,4,5,6,7
10	Десятичная	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
12	Двенадцатиричная	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B
16	Шестнадцатиричная	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

Непозиционная система счисления

В **непозиционных** системах счисления каждая цифра имеет одно и тоже значение независимо от положения в записи числа (значение знака не зависит от того места, которое он занимает числе).

Непозиционной системой счисления является самая простая система с одним символом (палочкой). Для изображения какого-либо числа в этой системе надо записать количество палочек, равное данному числу.

Примером непозиционной системы счисления является римская система, в которой в качестве цифр используются латинские буквы.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Непозиционная система счисления

Запись чисел в непозиционной системе счисления осуществляется по следующим правилам:

- если цифра слева меньше, чем цифра справа, то левая цифра вычитается из правой

Пример: (IV: $1 < 5$, следовательно, $5 - 1 = 4$, XL: $10 < 50$, следовательно, $50 - 10 = 40$);

- если цифра справа меньше или равна цифре слева, то эти цифры складываются

Пример: (VI: $5 + 1 = 6$, VIII: $5 + 1 + 1 + 1 = 8$, XX: $10 + 10 = 20$).

Позиционная система счисления

В *позиционной* системе счисления количественное значение каждой цифры зависит от ее места (позиции) в числе.

Основанием системы счисления называется количество различных цифр, используемых для изображения числа в позиционной системе счисления,.

Позицией называется место каждой цифры в числе.

Число в системе счисления с основанием P равно:

$$\begin{array}{ccccccccccc} A_n & A_{n-1} & A_{n-2} & \dots & A_1 & A_0 & A_{-1} & \dots & A_{-s} \\ + & A_1 * P^1 & + & A_0 * P^0 & + & A_{-1} * P^{-1} & + & A_{-2} * P^{-2} & + & \dots & A_{-s} * P^{-s} \end{array} = A_n * P^n + A_{n-1} * P^{n-1} + \dots$$

нижние индексы - определяют месторасположение цифры в числе

n и **S** - количества разрядов для записи целой и дробной части числа соответственно.

Позиционная система счисления

Число в системе счисления с основанием P равно:

$$\begin{array}{ccccccccccc} A_n & A_{n-1} & A_{n-2} & \dots & A_1 & A_0 & , & A_{-1} & \dots & A_{-s} \\ & + & A_1 * P^1 & + & A_0 * P^0 & + & A_{-1} * P^{-1} & + & A_{-2} * P^{-2} & + & \dots & A_{-s} * P^{-s} \end{array} = A_n * P^n + A_{n-1} * P^{n-1} + \dots$$

Примеры

Десятичная система

$$23,43_{10} = 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$$

$$692_{10} = 6 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 2$$

Двоичная система

$$1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Восьмиричная система

$$341,5_8 = 3 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 + 5 \cdot 8^{-1}$$

Шестнадцатеричная система

$$A1F,4_{16} = A \cdot 16^2 + 1 \cdot 16^1 + F \cdot 16^0 + 4 \cdot 16^{-1}$$

Позиционная система счисления

$$N_{\max} = P^n - 1$$

максимальное целое число, которое может быть представлено в n разрядах

$$N_{\min} = P^{-s}$$

минимальное значащее число (не равное 0), которое можно записать в s разрядах дробной части

Всего можно записать

$$N = P^{n+s}$$

разрядных чисел

Двоичная система счисления

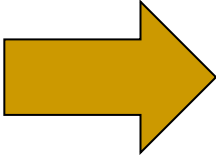
Двоичная система счисления - позиционная система счисления с основанием 2, цифры 0 и 1.

Преимущества:

1. Чем меньше значений существует в системе, тем проще изготовить отдельные элементы.
2. Чем меньше количество состояний у элемента, тем выше помехоустойчивость и скорость работы.
3. Простота создания таблиц сложения и умножения.

Двоичная система счисления

Восемь бит дают 256 различных комбинаций включенных и выключенных состояний:

"выключено" (00000000)  "включено" (11111111).

Номера битов:	7	6	5	4	3	2	1	0
Значения битов:	0	1	0	0	0	0	0	1

Число в двоичной системе счисления

$$A = A_n * 2^n + A_{n-1} * 2^{n-1} + \dots + A_1 * 2^1 + A_0 * 2^0$$

$$A_i = 0 / 1$$

Двоичная система счисления

Таблица сложения:

$0 + 0 = 0$	$0 + 1 = 1$
$1 + 0 = 1$	$1 + 1 = 0$ (перенос 1 в старший разряд)

Таблица умножения:

$0 * 0 = 0$	$0 * 1 = 0$	$1 * 0 = 0$	$1 * 1 = 1$
-------------	-------------	-------------	-------------

Преобразование чисел из двоичной системы

Преобразование двоичных чисел в десятичные

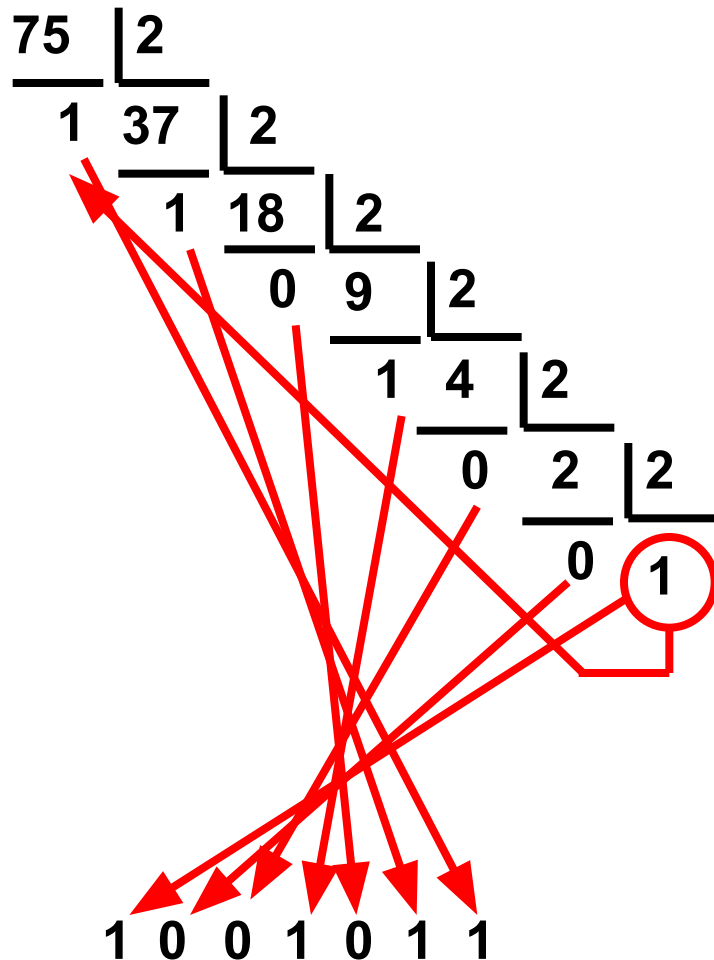
512	256	128	64	32	16	8	4	2	1.
				1	1	0	0	1	1
				32	+16			+2	+1

или $1*2^0+1*2^1+0*2^2+0*2^3+1*2^4+1*2^5 = 51$

$$2^0=1$$

$$2^1=2$$

Преобразование десятичных чисел в двоичные



$$75_{10} = 1\ 001\ 011_2$$

Восьмеричная система счисления

Восьмеричная система счисления - позиционная система счисления с основанием 8, цифры от 0 до 7.

Таблица сложения для восьмеричной системы счисления

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

Таблица умножения для восьмеричной системы счисления

*	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Двоичное, десятичное и шестнадцатеричное представления

10	2	8	16
0	0000		
1	0001		
2	0010		
3	0011		
4	0100		
5	0101		
6	0110		
7	0111		
8	1000	10	
9	1001	11	
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E



Перевод целых чисел из одной
системы счисления в другую.

Информатика

Правило 1

Перевод числа x из системы счисления основанием P в систему счисления с основанием Q заключается в последовательном нахождении остатков от деления числа x на основание Q , при этом процесс продолжается до тех пор, пока частное от деления не будет меньше основания Q . Все вычисления выполняются в системе счисления с основанием P , т.е. основание Q должно также быть выражено в системе счисления с основанием P .

Остатки от деления должны быть выражены цифрами системы счисления с основанием Q . Представление искомого числа в системе счисления с основанием Q получается выписыванием последнего частного и остатков от деления в обратном порядке.

Правило 2

Перевод числа x из системы счисления основанием P в систему счисления с основанием Q осуществляется путем представления числа x по степеням основания P . Все вычисления выполняются в системе счисления с основанием Q , т. е. основание P и цифры исходного числа должны также быть выражены в системе счисления с основанием Q .

На практике такой порядок перевода чисел используется при переводе десятичную систему счисления.

$$23E_{16} = ?_{10} = 2 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16^1 + E \cdot 16^0 = 574_{10}$$

$$1078_8 = 1 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = 574_{10}$$

Правило 3.

Перевод чисел из восьмеричной системы счисления в двоичную и наоборот переводится по **Триадам**.

Двоичный код	Восьмеричная цифра	Десятичный эквивалент
000	0	0
001	1	1
010	2	2
011	3	3
100	4	4
101	5	5
110	6	6
111	7	7

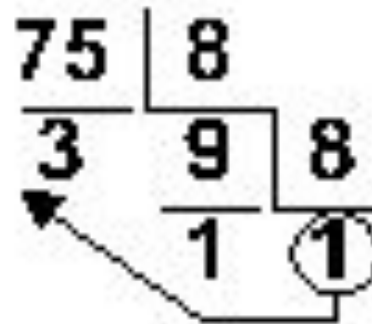
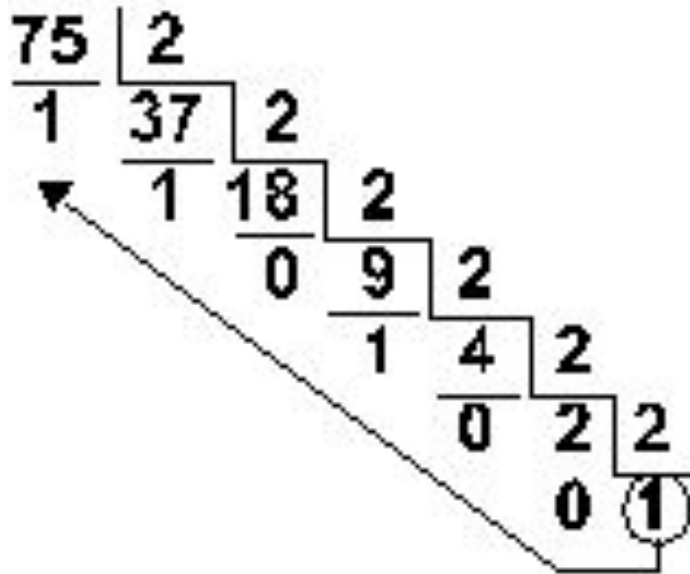
$$1076_8 = 001\ 000\ 111\ 110_2$$

Правило 4.

Перевод чисел из шестнадцатеричной системы счисления в двоичную и наоборот переводится по **тетрадам**.

$$23E_{16} = 0010\ 0011\ 1101_2$$

Пример: Перевести число 75 из десятичной системы в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную



Ответ: $75_{10} = 1\ 001\ 011_2 = 113_8 = 4B_{16}$.

Перевод дробных чисел из одной системы счисления в другую

Как правило, это происходит через промежуточный перевод в десятичную систему:

$$O, Y_p \rightarrow O, Y_{10}; \quad O, Y_{10} \rightarrow O, Y_q$$

Шаг 1

$$O, Y_p \rightarrow O, Y_{10}$$

Если основание СС - p , простая дробь содержит n цифр и b_k – цифры дроби ($1 \leq k \leq n$, $0 \leq b_k \leq p^{-1}$), то она может быть представлена в виде суммы:

$$O, Y_p = \sum b_k p^{-k}$$

$$0,011_2 = 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 0,375_{10}$$

Шаг 2

$$O, Y_{10} \rightarrow O, Y_q$$

1. Умножить исходную дробь в десятичной СС на **p**, выделить целую часть – она будет первой цифрой новой дроби, отбросить дробную часть;
2. Для оставшейся дробной части операцию умножения с выделением целой и дробной частей повторять, пока в дробной части не останется 0, или не будет достигнута желаемая точность. Появляющиеся при этом целые будут цифрами новой дроби;
3. Записать дробь в виде последовательности цифр после нуля с разделителем в порядке их появления в п.1 и 2.

Пример

$$0,375_{10} \rightarrow 0,Y_2$$

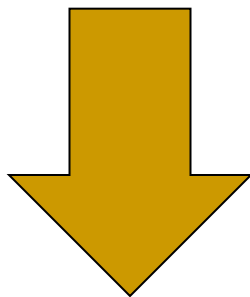
$$0,375 * 2 = \mathbf{0},750$$

$$0,75 * 2 = \mathbf{1},50$$

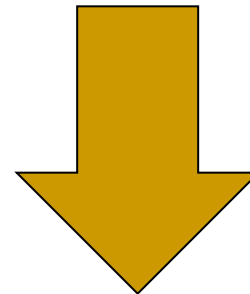
$$0,5 * 2 = \mathbf{1},0$$

$$0,375_{10} = 0,011_2$$

Формы представления чисел



С фиксированной точкой
(естественная форма)



С плавающей точкой
(нормализованный вид)

Естественная форма

С фиксированной точкой все числа изображаются в виде последовательности цифр с постоянным для всех чисел положением запятой, отделяющей целую часть от дробной.

0,25; -10,44; +0,9781

Пример: Диапазон чисел (N) в системе счисления с основанием P при наличии m разрядов в целой части и S разрядов в дробной (без учета знака числа) будет:

$$P^{-S} \leq N \leq P^m - P^{-S}$$

$$\text{При } p=2, m=10 \text{ и } S=6 \quad 0,015 \leq N \leq 1024.$$

Если в результате операции получится число, выходящее за допустимый диапазон, происходит переполнение разрядной сетки и дальнейшее вычисления теряют смысл.

С плавающей точкой

Определение: Число X_{10} называется **нормализованным**, если оно представлено в виде

$$X_{10} = \pm M_{10} * 10^{\pm K},$$

где M_{10} – мантисса, $0,1 \leq M_{10} < 1$, K -порядок, целое положительно десятичное число.

Пример: $-1234_{10} = -0,1234 * 10^4$, $0,003 = 0,3 * 10^{-2}$

При нормализации выполняется деление числа на 4 составляющих: знак числа, мантисса, знак порядка, порядок.

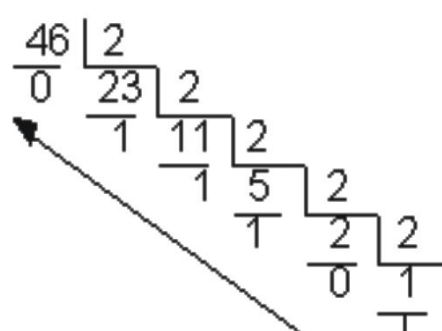
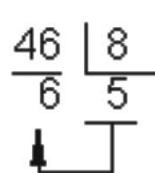
Для произвольной системы счисления.

$$X_p = \pm M_p * P^{\pm K}, \quad P^{-1} \leq M < 1$$

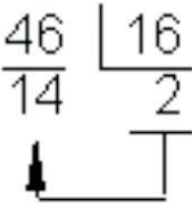
**Люди делятся на 10 типов: те
которые понимают двоичный код и
которые не понимают.**

Вопросы?

Сводная таблица переводов целых чисел

№ п./п	Перевод	№ п./п	Перевод
1	$10 \rightarrow 2$  Ответ: 101110_2	5	$2 \rightarrow 10$ $\begin{array}{rcccccc} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} 0_2 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = 46_{10}$ Ответ: 46_{10}
		6	$2 \rightarrow 16$ $101110_2 = 10 \quad \underbrace{1110_2}_{= 2E_{16}}$ Ответ: $2E_{16}$
		7	$8 \rightarrow 2$ $56_8 = \underbrace{101}_2 \underbrace{110}_2$ Ответ: 101110_2
2	$10 \rightarrow 8$  Ответ: 56_8	8	$8 \rightarrow 10$ $\begin{array}{r} 1 \ 0 \\ 5 \ 6 \end{array} 8 = 5 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = 40 + 6 = 46_{10}$ Ответ: 46_{10}
		9	$8 \rightarrow 16$ $5 \ 6_8 = \underbrace{101}_2 \underbrace{110}_2 = 10 \quad \underbrace{1110_2}_{= 2E_{16}}$ Ответ: $2E_{16}$

Сводная таблица переводов целых чисел

№ п./п	Перевод	№ п./п	Перевод
3	$10 \rightarrow 16$ $\begin{array}{r l} 46 & 16 \\ \hline 14 & 2 \end{array}$  Ответ: $2E_{16}$	10	$16 \rightarrow 2$ $2E_{16} = 0010 \ 1110_2 = 101110_2$ $\underbrace{\quad\quad}_2 \quad \underbrace{\quad\quad}_2$ Ответ: 101110_2
		11	$16 \rightarrow 8$ $2E_{16} = 10 \ 1110_2 = 101 \ 110_2 =$ $= 56_8 \quad \underbrace{\quad\quad}_4 \quad \underbrace{\quad\quad}_4$ Ответ: 56_8
4	$2 \rightarrow 8$ $101110_2 = \underbrace{101}_5 \ \underbrace{110}_6_2 = 56_8$ Ответ: 56_8	12	$16 \rightarrow 10$ $\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & E \end{array} E_{16} = 2*16^1 + E*16^0 =$ $= 32 + 14 = 46_{10}$ Ответ: 46_{10}