

УРОК – СМОТР ЗНАНИЙ

В 11 классе
ГООУ Гимназии №63
Калининского района
Санкт-Петербурга

Учитель: Залыгина Т.И.

ТЕМА УРОКА:

«Решение нестандартных задач в рамках
итогового повторения курса алгебры и
начала анализа»

ЦЕЛИ:

- **образовательная:** повторение, обобщение и систематизация знаний за 10-11 классы по данным темам;
- **воспитательная:** воспитание толерантности и ответственности;
- **развивающая:** умение собирать, анализировать и систематизировать информацию, объяснять сложные ключевые моменты, находить нестандартные решения.

ЗАДАНИЕ № 1

Решить уравнение :

$$\left(5 + 2\sqrt{6}\right)^x + \left(5 - 2\sqrt{6}\right)^x = 10$$

Решение:

Уравнения, решаемые заменой неизвестного.

$$(5 + 2\sqrt{6})^x + (5 - 2\sqrt{6})^x = 10$$

Основания – иррациональные выражения, произведение которых равно 1:

$$(5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6}) = 1$$

ВАЖНО!

Выражения $(5 + 2\sqrt{6})$ и $(5 - 2\sqrt{6})$
называются
сопряженными

Домножим каждый член уравнения
на

$$(5 + 2\sqrt{6})^x$$

Получим:

$$(5 + 2\sqrt{6})^{2x} + 1 = 10 (5 + 2\sqrt{6})^x$$

2) Обозначим $(5 + 2\sqrt{6})^x = t > 0$, получим уравнение

$$t + \frac{1}{t} = 10$$

3) умножим это уравнение на t

Получим: $t^2 - 10t + 1 = 0$, получаем $t_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$

1. $(5 + 2\sqrt{6})^x = (5 + 2\sqrt{6}) \Rightarrow x = 1$

2. $(5 + 2\sqrt{6})^x = (5 - 2\sqrt{6}) \Rightarrow x = -1$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = -1$

ЗАДАНИЕ № 2

Решить неравенство :

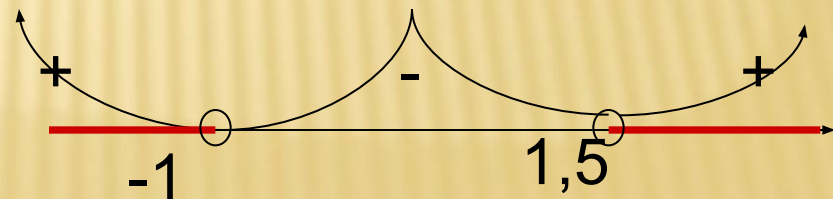
$$\left(x^2 - x + 2\right)^{\log_{0,6} \frac{2x-3}{x+1}} > 1$$

Решение:

Решение трансцендентных неравенств.

$$\left(x^2 - x + 2\right)^{\log_{0,6} \frac{2x-3}{x+1}} > 1$$

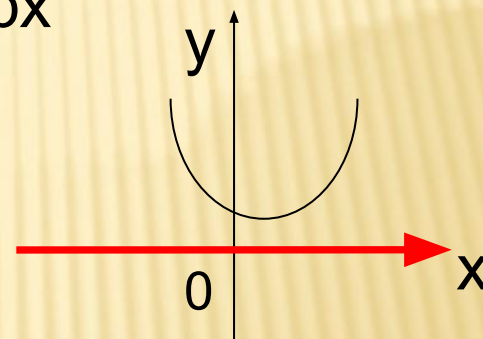
Решение: **ОДЗ** $\frac{2x-3}{x+1} > 0$



Докажем, что $(x^2 - x + 2)$ положителен при любых значениях x .

$$(x^2 - x + 2) = 0 \quad \begin{array}{l} D < 0 \\ a > 0 \end{array} \Bigg| \Rightarrow$$

ветви параболы
вверх



следовательно, неравенство $(x^2 - x + 2) > 0$

выполняется при любых x из ОДЗ

рассмотрим две системы неравенств:

$$1) \begin{cases} x^2 - x + 2 > 1 \\ \log_{0,6} \frac{2x-3}{x+1} > 0 \end{cases}$$

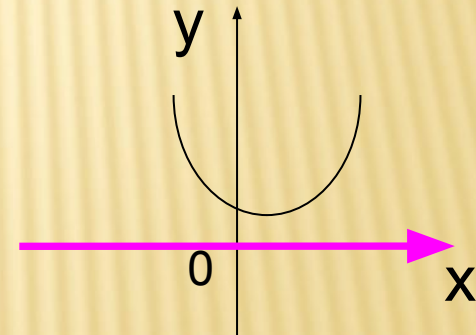
$$2) \begin{cases} x^2 - x + 2 < 1 \\ \log_{0,6} \frac{2x-3}{x+1} < 0 \end{cases}$$

Решим вторую систему

$$x^2 - x + 2 < 1$$

$$x^2 - x + 1 < 0$$

$$/ x^2 - x + 1 = 0 \quad D < 0, a > 0 \Rightarrow$$



ВАЖНО!

на множестве всех действительных значений $x^2 - x + 2 < 1$ не имеет решения, следовательно вторая система решений не имеет.

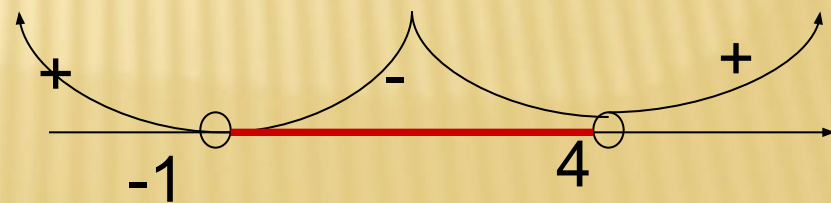
Тогда рассмотрим систему (1)

Система эквивалентна неравенству: $\log_{0,6} \frac{2x-3}{x+1} > 0$

$$0 < \frac{2x-3}{x+1} < 1$$

1) $\frac{2x-3}{x+1} > 0$ решением этого неравенства является ОДЗ

$$2) \frac{2x-3}{x+1} < 1 ; \quad \frac{2x-3-x-1}{x+1} < 0 ; \quad \frac{x-4}{x+1} < 0$$



Ответ : $(1,5;4)$

ЗАДАНИЕ № 3

Найти наибольший корень уравнения:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{x+4}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{x}\right)$$

Решение:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{x+4}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{x}\right)$$

Так как период функции $f(x)=\operatorname{tg}x$ равен π , то аргументы левой и правой части равны с точностью до πk , где k – целое. ОДЗ не находим, так как проще сделать проверку.

$$\frac{3\pi}{x+4} = \frac{3\pi}{x} + \pi k \quad \Bigg| : \pi$$

$$\frac{3}{x+4} = \frac{3+kx}{x}$$

$$3x = (3+kx)(x+4)$$

$$3x = 3x + kx^2 + 12 + 4kx$$

$$kx^2 + 4kx + 12 = 0$$

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 12k}}{k} = -2 \pm \sqrt{4 - \frac{12}{k}}$$

x принимает максимальное значение, когда

$$\frac{12}{k}$$

принимает минимальное значение, то есть,
когда $k = -1$, так как k — целое число

$$x = -2 + \sqrt{16} = 2$$

Ответ : $x = 2$

ЗАДАНИЕ № 4

Найдите наименьшее значение периметра прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, и с диагональю OM , где O – начало координат, а M – точка на графике функции

$$y = 5 - 2 \ln(0,4x - 3) \quad 8 \leq x \leq 9,8$$

Периметр прямоугольника равен $2(|x| + |y|)$, т.к. его стороны параллельны осям координат, а одна его вершина является началом координат.

$8 \leq x \leq 9,8$, подставив эти крайние точки в функцию $y = 5 - 2\ln(0,4x - 3)$
получаем $5 - 2\ln 0,2 \geq y \geq 5 - 2\ln 0,32$, т.е. $\begin{matrix} 0,4x - 3 > 3 \\ x > 7,5 \end{matrix}$ О.Д.З: $y > 0$

положителен, так как функция является непрерывно убывающей на данном промежутке. Значит периметр можно записать в виде $2(x + y)$

Периметр минимален, значит необходимо найти минимум функции $2(x + y) = p$
на промежутке $[8; 9,8]$

Ищем производную функции p по x :

$$p' = (2(x + 5 - 2\ln(0,4x - 3)))' = 2\left(1 - \frac{2 \cdot 0,4}{0,4x - 3}\right) = \frac{0,8x - 6 - 1,6}{0,4x - 3} = \frac{0,8x - 7,6}{0,4x - 3};$$

находим нули производной:

$$\begin{aligned} 0,8x &= 7,6 & 0,4x &\neq 3 \\ x &= 9,5 & x &\neq 7,5 \end{aligned}$$

Область определения

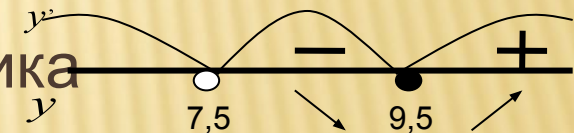
функции y : $0,4x - 3 > 3$

$$x > 7,5$$

Находим знаки производной методом интервалов, т.к.
производная непрерывна на своей области определения:

$x = 9,5$ точка минимума функции

Нашли одну искомую сторону прямоугольника



$$y = 5 - 2\ln(0,4x - 3)$$

- вторая сторона

Периметр:

$$y = 5 - 2\ln(0,4 \cdot 9,5 - 3) = 5 - 2\ln 0,8 = 5 - \ln 0,64$$

$$p = 2(9,5 + 5 - \ln 0,64) = 29 - \ln 0,4096$$

$$\text{Ответ: } p_{\min} = 29 - \ln 0,4096$$

ЗАДАНИЕ № 5

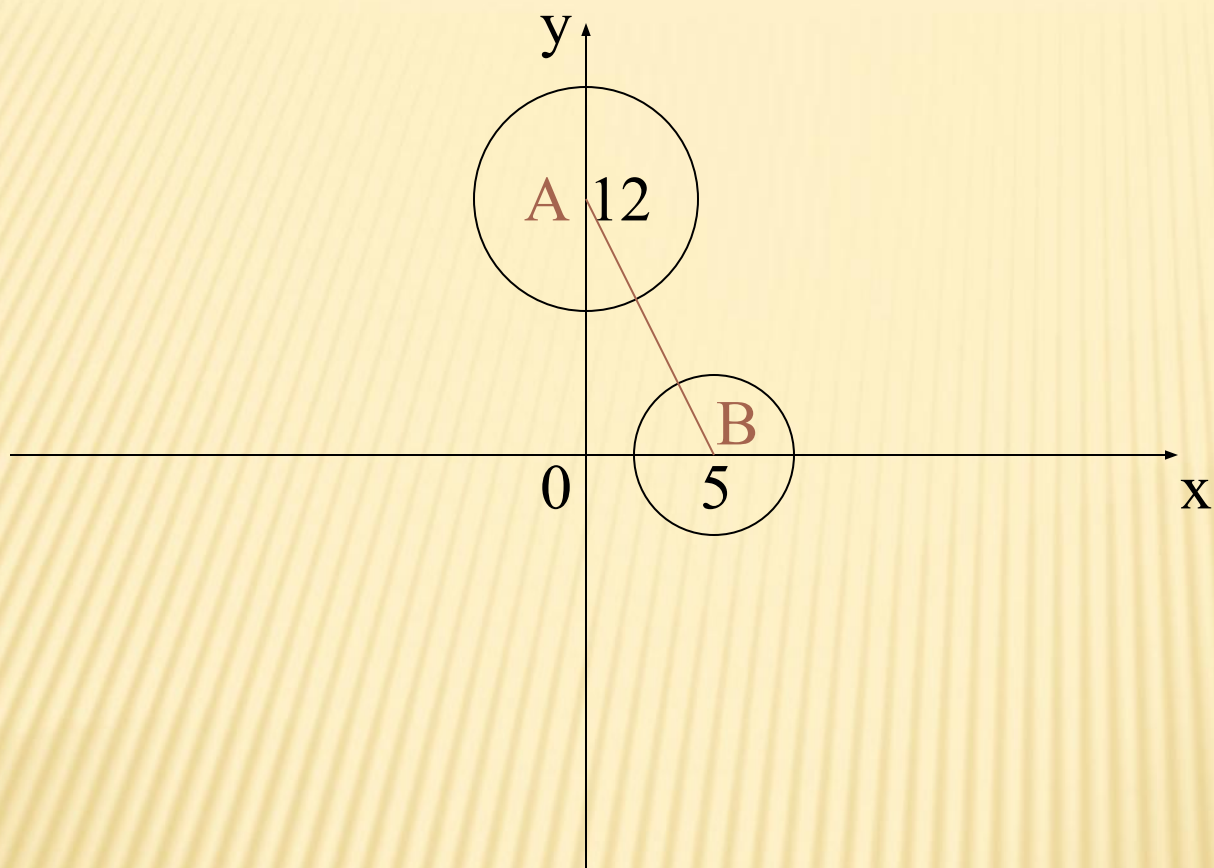
Найти все значения параметра a , при которых система имеет хотя бы одно решение.

$$\begin{cases} (x-5)^2 + y^2 = 36a^2 \\ x^2 + (y-12)^2 = 49a^2 \end{cases}$$

Решение:

Уравнения, составляющие систему, являются уравнениями окружностей

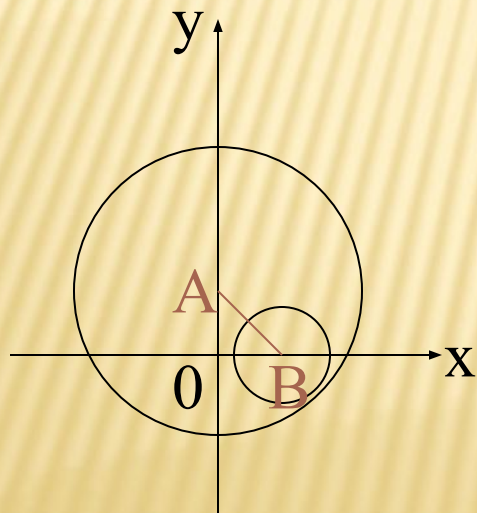
$$\left\{ \begin{array}{l} (x-5)^2 + y^2 = 36a^2 \\ x^2 + (y-12)^2 = 49a^2 \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} R=6a, \text{ центр} - (5;0) \\ R=7a, \text{ центр} - (0;12) \end{array} \right.$$



Из прямоугольного треугольника OAB расстояние между центрами окружностей по теореме Пифагора равно 13.

Для того, чтобы система имела хотя бы одно решение, окружности должны иметь хотя бы одну общую точку, а значит, сумма их радиусов должна быть не меньше расстояния между центрами этих окружностей.

С другой стороны, при увеличении параметра a одна окружность полностью войдет в другую, поэтому радиус большей окружности должен быть не больше суммы радиуса меньшей и расстояния между центрами.



$$\begin{cases} 6|a| + 7|a| \leq 13 \\ 7|a| \leq 6|a| + 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6|a| + 7|a| \leq 13 \\ 7|a| \leq 6|a| + 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |a| \geq 1 \\ |a| \leq 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \\ a \in [-13; 13] \end{cases}$$

$$\text{Ответ : } a \in [-13; -1] \cup [1; 13]$$

ЗАДАНИЕ № 6

Даны два уравнения. $\log_7(x(12\sqrt{-p})) = p(p-1) - 6x + 3$

$$2x - \frac{25}{x} = \frac{x^2 - (5p-3)x + 15}{x(p+1)}$$

Параметр p выбирается так, что $p \leq 0, p \neq 1$

и число различных корней уравнения в сумме с числом $p+5$ дает число различных корней второго уравнения. Решите первое уравнение при каждом значении параметра, выбранным таким образом

Решение:

1) так как $12 + \sqrt{-p} > 0$, то функция $y = \log_7(x(12 + \sqrt{-p}))$ определена на промежутке $(0; +\infty)$. Так как основание логарифма больше 1, то эта функция возрастает. Линейная функция убывает, так как коэффициент при x отрицателен. Поэтому число n корней первого уравнения равно 0 или 1.

$$y = p(p - 1) - 6x + 3$$

2) С возрастанием x функция $y = \log_7(x(12 + \sqrt{-p}))$ возрастает неограниченно. При достаточно больших x ее график расположен выше прямой $y = p(p-1) - 6x + 3$. При приближении x к нулю значения функции $y = \log_7(x(12 + \sqrt{-p}))$ неограниченно убывают, и ее график окажется ниже этой прямой. Значит, прямая и график функции пересекутся, т.е. $n=1$.

3) Число 0 не является корнем второго уравнения. При $x \neq 0$ уравнение равносильно уравнениям:

$$2x - \frac{25}{x} = \frac{x^2 - (5p-3)x + 15}{x(p+1)}$$

$$2x^2(p+1) - 25(p+1) = x^2 - (5p-3)x + 15$$

$$(2p+1)x^2 + (5p-3)x - 5(5p+8) = 0$$

$$(x+5)((2p+1)x - (5p+8)) = 0(*)$$

Уравнение (*) всегда имеет ненулевой корень $x = -5$. поэтому число k различных корней второго уравнения равно 1 или 2.

$$(x + 5)((2p + 1)x - (5p + 8)) = 0(*)$$

4) По условию $1 + (p + 5) = k$, т.е. $p = k - 6$. Поэтому $p = -5$ или $p = -4$. Если $p = -5$,

то $k = 1$, а уравнение (*) примет вид $(x + 5)(-9x + 17) = 0$. у него два ненулевых

корня, т.е. $k = 2$, что противоречит условию $k = 1$. если $p = -4$, то $k = 2$, а

уравнение (*) примет вид $(x + 5)(-7x + 12) = 0$. у него два ненулевых корня,

т.е. $k = 2$. значит, $p = -4$ удовлетворяет условию задачи.

5) При $p = -4$ первое уравнение примет вид

$$\log_7(14x) = 23 - 6x$$

Его единственным корнем является число $x = 3,5$, найденное подбором:

$$\log_7 49 = 2,$$

$$23 - 21 = 2.$$

Ответ : $x = 3,5$

ЗАДАНИЕ № 7

(АВТОР УЧЕНИК 11 Б КЛАССА МОРОЗКИН ИЛЬЯ,
ТВОРЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ В РАМКАХ СПЕЦКУРСА «НЕСТАНДАРТНЫЕ
ЗАДАЧИ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛА АНАЛИЗА»)

Найти Sf. , ограниченной осями координат и лежащую в квадрате, у которого пересечение диагоналей находится в начале системе координат, стороны квадрата параллельны осям координат и равны по 12; при этом координаты точек, составляющих фигуру, удовлетворяют следующему условию

$$y \leq 16/x$$

$$y \geq x \quad ; (*)$$

и не удовлетворяют условию: $x^2 + y^2 + 4 < 4x + 4y$. (**)

Решение:

Преобразуем $x^2 + y^2 + 4 = 4x + 4y$ в уравнение окружности.

Для этого перенесем $4x + 4y$ в левую часть, а также прибавим к обеим частям уравнения 4 (четыре);

Получаем $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$;

где радиус окружности равен 2,
а центр окружности находится в точке
(2;2).

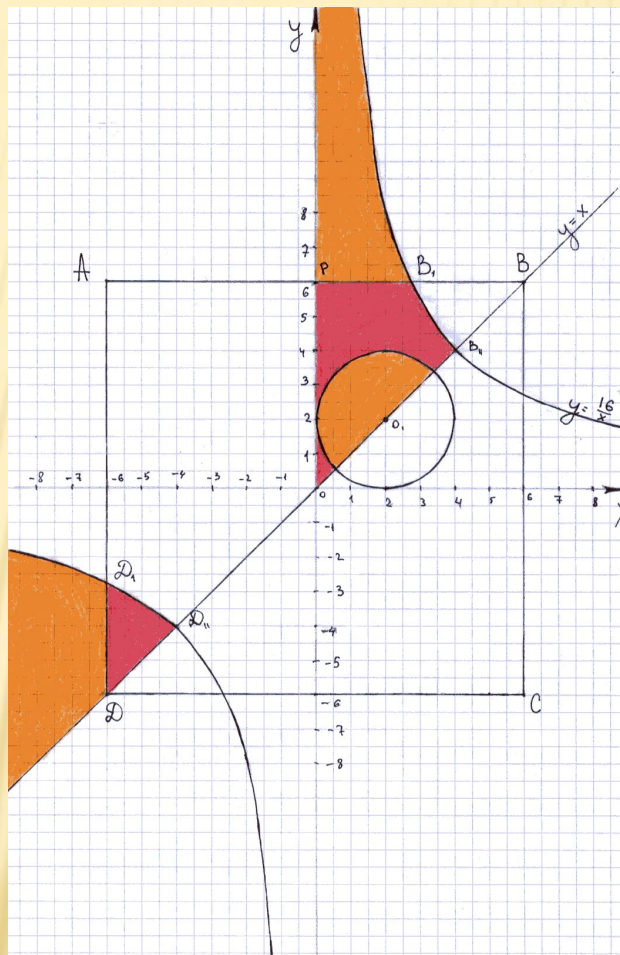
Построим фигуру с учетом (*) и (**),
построение не вызывает сложностей.

Ответом этой системы является
красная и оранжевая области.

Теперь изобразим на координатной
плоскости квадрат со стороной 12,
заметим что координаты его вершин
будут удовлетворять точки $(6;6)$, $(-6;6)$,
 $(-6;-6)$ и $(6;-6)$.

Также изображаем круг с центром $(2;2)$ и
 $R=2$.

Площадь
фигуры
выделена
красным



Очевидно, что сегменты $DD'D''$ и $BB'B''$ имеют равные площади (в силу нечетности функций $y=16/x$ и равенства отрезков). То есть можно заменить $BB'B''$ на $DD'D''$.

Далее задача упрощается. Найдем площадь треугольника OPB по формуле $S = (1/2) \cdot OP \cdot PB$; $S = (1/2) \cdot 36$; $S = 18$ (кв. ед.).

Нас интересует площадь, закрашенная

красным. Итак, $S_{\text{ф}} = S_{\text{ОРВ}} - S_{\text{полукруга}};$

$$S_{\text{полукруга}} = (\pi R^2)/2 = 2\pi \text{ (кв. ед.)}.$$

$$\text{Откуда } S_{\text{ф}} = 18 - 2\pi \text{ (кв. ед.)}.$$

$$\text{Ответ: } S_{\text{ф}} = 18 - 2\pi \text{ (кв. ед.)}.$$

$$\text{Ответ: } S_{\text{ф}} = 18 - 2\pi \text{ (кв. ед.)}$$

ЗАДАНИЕ № 8 (АВТОР УЧЕНИК 11 Б КЛАССА МОРОЗКИН ИЛЬЯ, ТВОРЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ В РАМКАХ СПЕЦКУРСА «НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛА АНАЛИЗА»)

Решить систему:

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{\sin y}} 2 + 1 \geq \cos 2y - 2 \cos y \\ 4x^5 - 107x^3 - 149x \leq 12x^4 - 234x^2 - 30 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = x \\ y \in [0; 2] \end{cases}$$

Решение:

1. Упростим систему.

$$\begin{cases} \log_{\sin y} 2 \geq -1 \\ 4x^5 - 12x^4 - 107x^3 + 234x^2 - 149x + 30 \leq 0 \\ \sin y = x \\ y \in [0; 2] \end{cases}$$

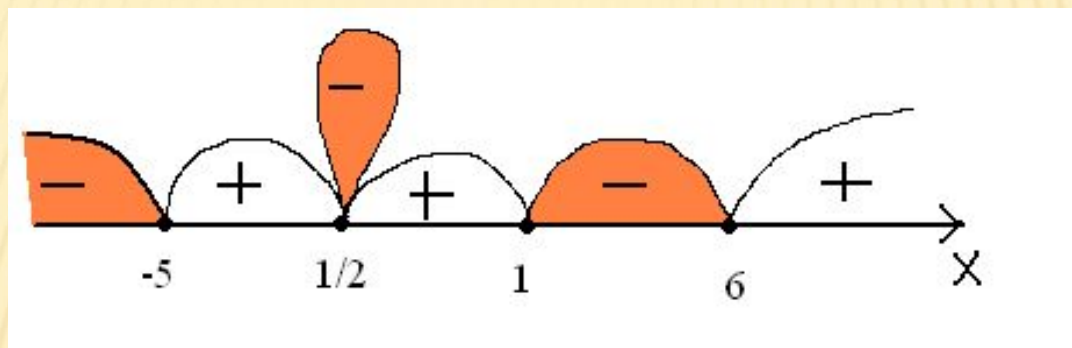
2. Теперь необходимо упростить второе неравенство. Для этого разложим многочлен на множители, воспользуемся теоремой Безу.

$$4x^5 - 12x^4 - 107x^3 + 234x^2 - 149x + 30 = 0$$

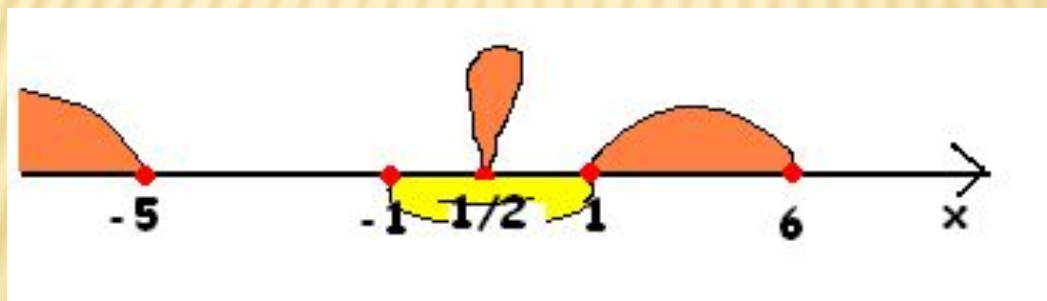
$$x = -5; x = \frac{1}{2}; x = 1; x = 6$$

$$(x + 5) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 1) \cdot (x - 6) \leq 0$$

3. Решением данного неравенства являются интервалы.
Необходимо заметить что при переходе через точку $\frac{1}{2}$
~~знак не меняется из-за четности.~~



4. Теперь посмотрим на уравнение 3. По определению $|\sin y| \leq 1$, откуда $|x| \leq 1$. Получаем два корня $x = \frac{1}{2}$ и $x = 1$.



5. Решим неравенство 1. В основании логарифма стоит тригонометрическая функция. $0 < \sin y < 1$, так как $|\sin y| \leq 1$ и $\sin y > 0$, так как стоит в основании логарифма. При освобождении от логарифма знак будет меняться на противоположный. Откуда $x \leq 1/2$, то есть $x = 1/2$.

6. Решаем уравнение 3. $\sin y = 1/2$. Решением данного уравнения является совокупность.

$$\left[\begin{array}{l} y = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

7. Существует условие $y \in [0; 2]$ делаем выборку корней.

$$]k = 0; y = \frac{\pi}{6} \in [0; 2]$$

$$y = \frac{5\pi}{6} \notin [0; 2] \frac{5\pi}{6} > 2$$

Необходимо сделать проверку системы.

Для нее является решением :

$$x = 1/2 \text{ и } y = \pi/6.$$

$$\text{Ответ : } \left(\frac{1}{2}; \frac{\pi}{6} \right)$$