



2. Элементы теории множеств

Понятие множества

- Основу теории математики составляют **понятия и отношения** между этими понятиями, которые устанавливаются при помощи соответствующих **аксиом и определений**.
- Дальнейшее построение математической теории осуществляется последовательной системой теорем и новых определений, устанавливающей свойства изучаемых математических объектов.

Определение

- Одним из фундаментальных, неопределяемых математических понятий является понятие **множества**.
- Множество можно представить себе как *соединение, совокупность, собрание* некоторых предметов, объединенных по какому-либо признаку:
 - множество учащихся класса,
 - множество букв алфавита,
 - множество натуральных чисел,
 - множество точек на прямой,
 - множество книг на полке и т.д..

Определение

- Предметы, из которых состоит множество, называются его **элементами**
- например, буква К – элемент множества букв русского алфавита.
- Для названия множества иногда используют какое-либо одно слово, выступающее в роли синонима слова «множество» (зрители, стая, семья, фрукты).

- Обозначают множества заглавными буквами латинского алфавита или символически с помощью фигурных скобок, в которых указываются его элементы.
- Сами элементы некоторого множества будем обозначать малыми латинскими буквами, если они не имеют специальных обозначений:
- $A; \{a, b, c\}; \{*, s, h, g\}; N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$.

- Принадлежность предмета некоторому множеству обозначают с помощью символа \in (в противном случае используется символ \notin).
- Запись $a \in A$ означает, что a *есть элемент множества* A .
- Аналогично имеем: $\Delta \in \{\Delta, o\}$.
- Запись $4 \notin \{1, 2, 3\}$ означает, что 4 *не принадлежит множеству* $\{1, 2, 3\}$.

- Основными способами задания множества являются:
- 1) перечисление всех его элементов:
 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\};$
- 2) описание (указание характеристического свойства его элементов).
- Этот способ требует указания такого признака, который имеется у всех элементов данного множества и не свойственен элементам, не входящим в данное множество.

- Например, характеристическим свойством **натуральных чисел** является возможность их использования при счете каких-либо предметов.
- Говоря о множестве **четных чисел**, мы указываем характеристическое свойство его элементов:
- $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x \div 2\}$, т.е. каждое число, принадлежащее этому множеству, делится на два.

Определение 3

- Множества, состоящие из одних и тех же элементов (одинаковыми). Пишут $A=B$.

Определение 4

- Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом \emptyset .

- Слово «много» и математический термин «множество» имеют различный смысл.
- Множество может состоять из небольшого количества элементов.
- Будем обозначать количество элементов в некотором множестве A через $m(A)$.
- Например, если $A=\{a, b, c\}$, то $m(A)=3$. Если N – множество всех натуральных чисел, то $m(N) = \infty$.

Подмножество. Основные числовые множества

- **Определение 1.**
- Множество B , состоящее из некоторых элементов данного множества A (и только из них), называется *подмножеством* (частью) этого множества.
- Иначе, если любой элемент множества B принадлежит также множеству A , то множество B называется подмножеством множества A .
- Это записывается так: $B \subset A$ или $A \supset B$. Говорят, что « B – подмножество A » или « B содержится в A » или « A содержит B ».
- Заметим, что $m(B) \leq m(A)$.

- Если в множестве B найдется хотя бы один элемент, не принадлежащий множеству A , то B не является подмножеством множества A : $B \not\subseteq A$.
- Например, отрезок $[a, b]$ не является подмножеством полуинтервала $(a, b]$, т. к. $a \in [a, b]$, но $a \notin (a, b]$.

- Из опр. 1 следует, что любое множество является подмножеством самого себя, т.е. справедливо утверждение $A \subset A$.
- Полагают также, что пустое множество является подмножеством любого множества.
- Пустое множество не содержит ни одного элемента, а значит в нем нет элемента, не принадлежащего любому другому множеству.

- Знак \subset называется знаком включения.
- Отметим основные свойства отношения включения между множествами:
- 1) $\emptyset \subset A$ для любого множества A ;
- 2) $A \subset A$ для любого множества A (рефлексивность);
- 3) из того, что $B \subset A$ не следует $A \subset B$ (не симметричность);
- 4) если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A=B$ (антисимметричность);
- 5) если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$ (транзитивность).

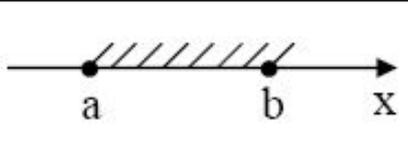
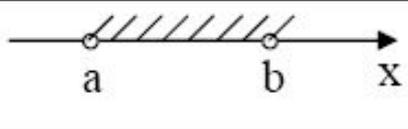
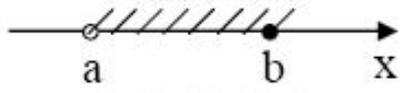
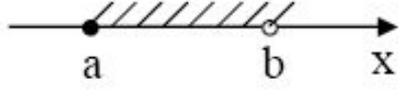
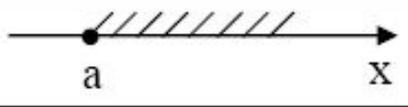
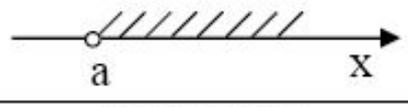
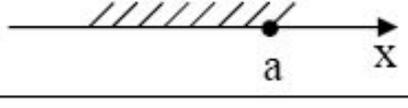
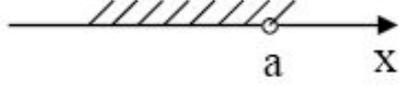
Основные числовые

множества:

- $\mathbf{N}=\{1,2,3,4,\dots\}$ – множество натуральных чисел;
- $\mathbf{Z}=\{\dots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\dots\}$ – множество целых чисел (содержит все натуральные числа и числа, им противоположные), $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$;
- $\mathbf{Q}=\{x \mid x = p/q, \text{ где } p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}\}$ – множество рациональных чисел (состоит из чисел, допускающих представление в виде дроби), $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$;
- $\mathbf{R}=(-\infty; +\infty)$ – множество действительных чисел, $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ (кроме всех рациональных чисел, содержит иррациональные числа).

- Действительные числа изображаются точками координатной прямой (числовой оси).
- *Координатная прямая* – это всякая прямая (обычно горизонтальная), на которой указаны положительное направление, начало отсчета и единичный отрезок.

Таблица 1. Правила изображения числовых промежутков.

Название	Неравенство, определяющее множество	Обозначение	Изображение
Отрезок от a до b (замкнутый промежуток)	$a \leq x \leq b$	$[a; b]$	
Интервал от a до b	$a < x < b$	$(a; b)$	
Полуинтервалы от a до b	$a < x \leq b$	$(a; b]$	
	$a \leq x < b$	$[a; b)$	
Числовой луч от a до $+\infty$	$a \leq x$	$[a; +\infty)$	
Открытый числовой луч от a до $+\infty$	$a < x$	$(a; +\infty)$	
Числовой луч от $-\infty$ до a	$x \leq a$	$(-\infty; a]$	
Открытый числовой луч от $-\infty$ до a	$x < a$	$(-\infty; a)$	

Операции над множествами

- Два множества могут иметь одинаковые элементы,
- из всех элементов двух множеств можно составить одно новое множество,
- также можно рассмотреть отдельно элементы одного множества, которых во втором множестве нет.

- Например, A – множество наклеек (марок), которые есть у Пети, B – множество наклеек, которые собрал Вася.
- Можно выделить множество наклеек, которые есть у обоих ребят;
- коллекцию различных наклеек, собранных ими вместе;
- множество наклеек Пети, которых нет у Васи.
- Таким образом, мы проделали операции ***пересечения, объединения и разности*** двух множеств.

Определение

- **Пересечением** множеств A и B называется множество C , состоящее из **всех тех и только тех элементов**, которые принадлежат каждому из данных множеств: $C = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$. Обозначается $A \cap B$.

Определение

- **Объединением** множеств A и B называется множество C , которое состоит из всех элементов данных множеств A и B и только из них: $C = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.
- Обозначается, $A \cup B$.

- Если множества A и B не содержат одинаковых элементов, т.е. не пересекаются ($A \cap B = \emptyset$), то $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ (1).
- В противном случае, когда множества имеют $m(A \cap B)$ одинаковых элементов, следует пользоваться более общей формулой:
$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$$
 (2).

Определение

- **Разностью** множеств A и B называется множество C , состоящее из всех элементов множества A , не принадлежащих множеству B :
 $C = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.
- Обозначается, $A \setminus B$.
- В случае, когда B является подмножеством A , т.е. $B \subset A$, разность $A \setminus B$ называется **дополнением** множества B до множества A (или относительно множества A).

Определение

- **Универсальным** *множеством* называется множество, подмножества которого (и только они) в данный момент рассматриваются.
- Обозначают **U** .
- При работе с числовыми множествами в качестве основного (универсального) множества будем считать множество \mathbb{R} действительных чисел.

Определение

- *Дополнением* множества A называется разность $U \setminus A$.
- Обозначается, A' или \bar{A} и читается «не A » .
- Иначе, дополнением множества A называется множество A' , состоящее из всех элементов, не принадлежащих множеству A .

Свойства операции пересечения:

- 1) $A \cap A = A$;
- 2) $A \cap \emptyset = \emptyset$;
- 3) $A \cap A' = \emptyset$;
- 4) $A \cap U = A$;
- 5) $A \cap B = B \cap A$.

Свойства операции объединения:

- 1) $A \cup A = A$;
- 2) $A \cup \emptyset = A$;
- 3) $A \cup A' = U$;
- 4) $A \cup U = U$;
- 5) $A \cup B = B \cup A$.

Свойства операции разности:

- 1) $A \setminus A = \emptyset$;
- 2) $A \setminus \emptyset = A$;
- 3) $A \setminus A' = A$;
- 4) $A \setminus U = \emptyset$;
- 5) $U \setminus A = A'$;
- 6) $\emptyset \setminus A = \emptyset$;
- 7) $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Справедливы равенства $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$; $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (3).

Диаграммы Эйлера-Венна

- Для наглядного представления множеств и результатов операций над ними удобно пользоваться диаграммами Эйлера-Венна (кругами Эйлера).
- При этом множества изображаются на плоскости в виде замкнутых кругов, а универсальное множество в виде прямоугольника.
- Элементы множества – точки внутри соответствующего круга.

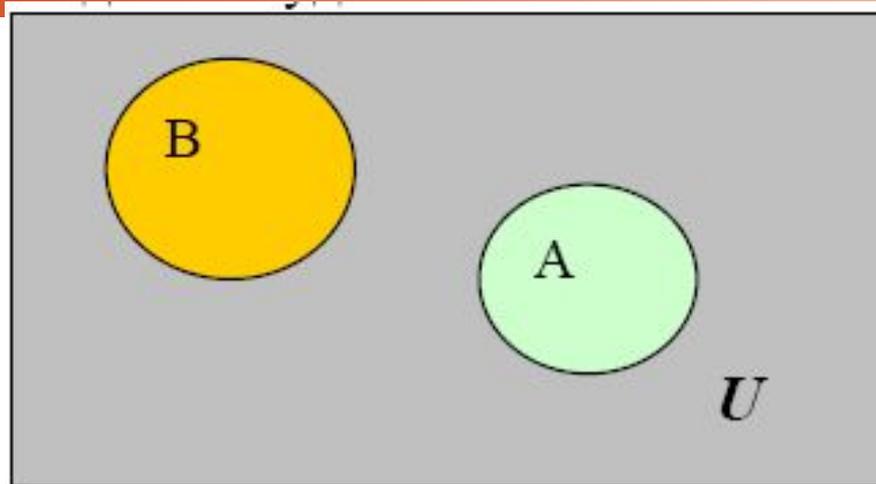


Рис. 1

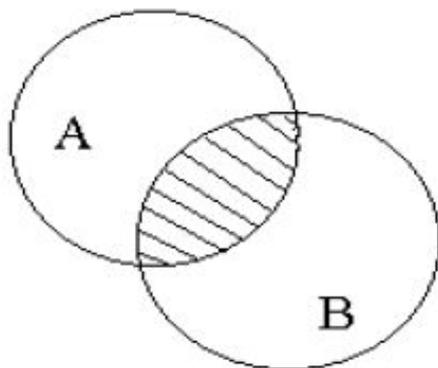


Рис.2 Пересечение множеств

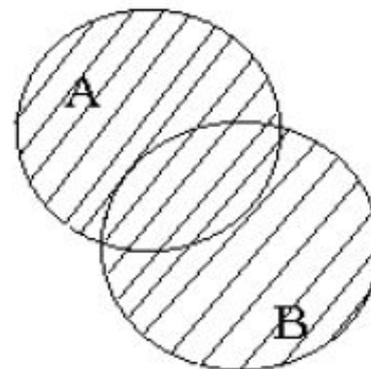


Рис.3 Объединение множеств

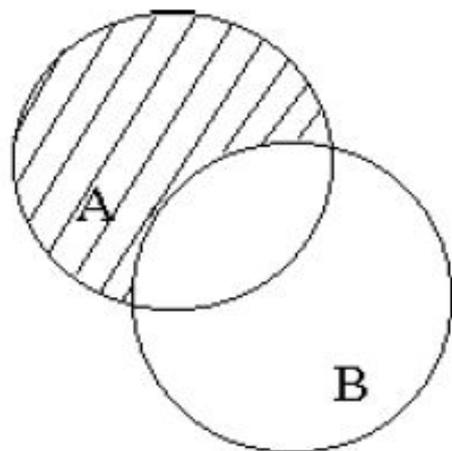


Рис.4 Разность множеств $A \setminus B$

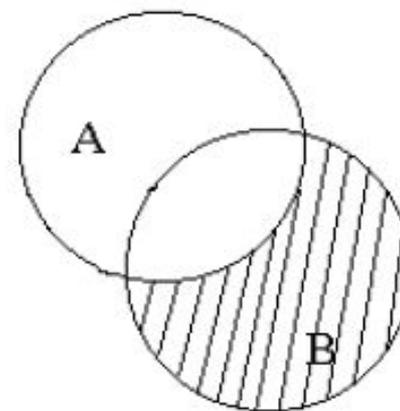


Рис.5 Разность множеств $B \setminus A$

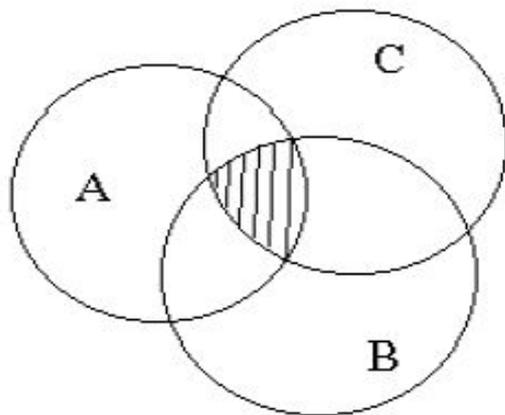


Рис.6 Пересечение трех множеств

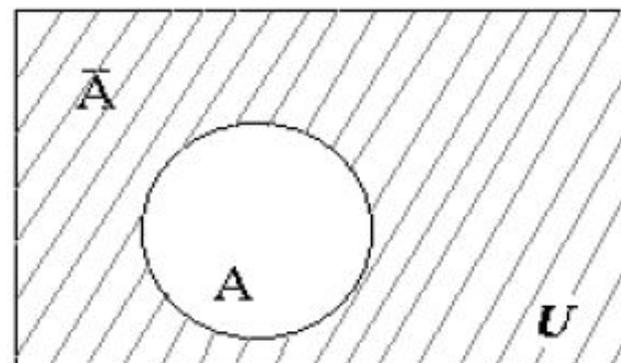


Рис.7 Дополнение множества
(множество *не-A*)

- Формула для подсчета числа элементов в объединении трех множеств:
- $m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - m(A \cap C) - m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C)$

Примеры

- **Пример 1.** Записать множество всех натуральных делителей числа 15 и найти число его элементов.
- Решение: $A = \{1, 3, 5\}$, $m(A) = 3$.

Пример 2

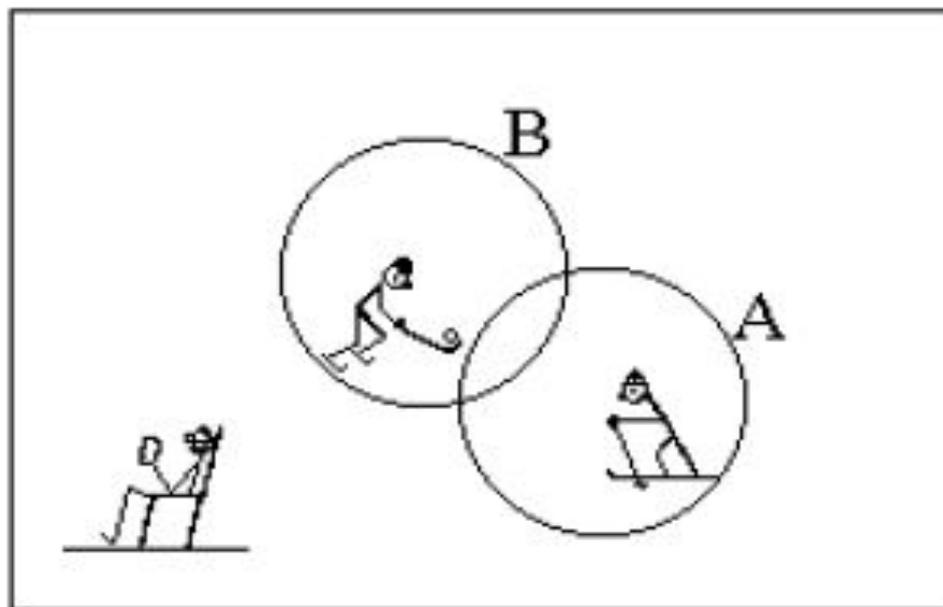
- Даны множества $A=\{2, 3, 5, 8, 13, 15\}$, $B=\{1, 3, 4, 8, 16\}$, $C=\{12, 13, 15, 16\}$, $D=\{0, 1, 20\}$.
- Найти $A \cup B$, $C \cup D$, $B \cap C$, $A \cap D$, $A \setminus C$, $D \setminus B$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $B \cup D \cap C$, $A \cap C \setminus D$.
- **Решение:**
- Учтем, что сначала должна выполняться операция пересечения множеств, а затем объединение или разность.
- Получим
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 13, 15, 16\}$,
- $C \cup D = \{0, 1, 12, 13, 15, 16, 20\}$,
- $B \cap C = \{16\}$, $A \cap D = \emptyset$, $A \setminus C = \{2, 3, 5, 8\}$, $D \setminus B = \{0, 20\}$,
- $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 12, 13, 15, 16\}$,
- $A \cap B \cap C = \emptyset$, $B \cup D \cap C = \{1, 3, 4, 8, 16\}$, $A \cap C \setminus D = \{13, 15\}$

Пример 3.

- Экзамен по математике сдавали 250 абитуриентов, оценку ниже пяти получили 180 человек, а выдержали этот экзамен 210 абитуриентов. Сколько человек получили оценки 3 и 4?
- Решение: Пусть A – множество абитуриентов, выдержавших экзамен, B – множество абитуриентов, получивших оценку ниже 5, по условию $m(A)=210$, $m(B)=180$, $m(A \cup B)=250$. Абитуриенты, получившие оценки 3 и 4, образуют множество $A \cap B$.
- Из формулы (2) находим $m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B) = 210 + 180 - 250 = 140$.

Пример 4.

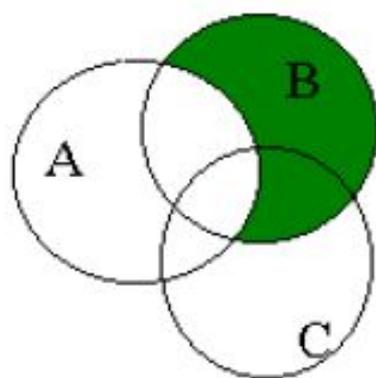
- В школе 1400 учеников.
- Из них 1250 умеют кататься на лыжах, 952 – на коньках.
- Не умеют кататься 60 учащихся.
- Сколько учащихся умеют кататься и на коньках и на лыжах?
- Решение: Множество учеников школы будем считать основным множеством U , A и B – соответственно множества учеников, умеющих кататься на лыжах и на коньках .



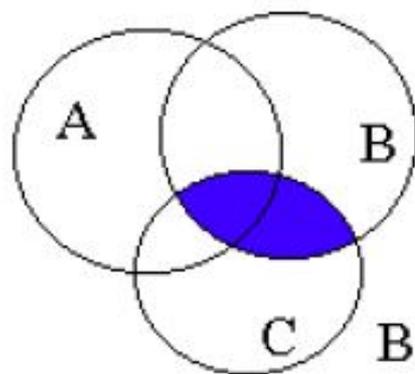
- Учащиеся, не умеющие кататься ни на лыжах, ни на коньках, составляют множество $A' \cap B' = (A \cup B)'$
- $m(A \cup B) = m(U) - m(A \cup B)' = 1340.$
- $m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B) = 862$

Пример 5. Показать на кругах Эйлера множество $(A' \setminus B') \cup (B \cap C)$.

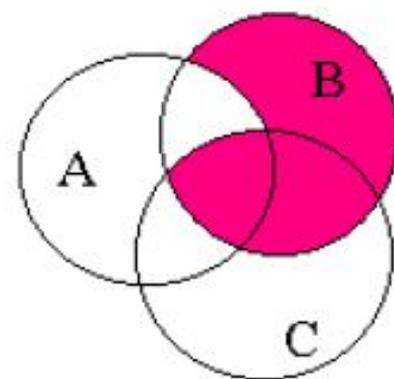
Решение:



$A' \setminus B'$



$B \cap C$



$(A' \setminus B') \cup (B \cap C)$