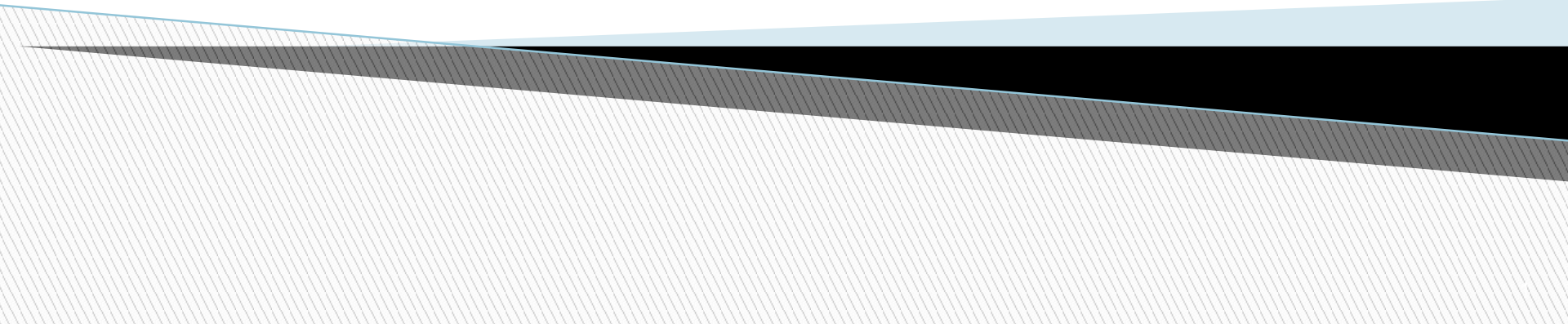


Решение обыкновенных дифференциальных уравнений (краевая задача)



Численные методы решения краевой задачи

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y') \quad a \leq x \leq b$$

граничные условия

$$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Две группы методов:

- **методы, основанные на замене решения краевой задачи решением нескольких задач Коши;**
- **методы, в которых используется конечно-разностная форма дифференциального уравнения.**

Методы «стрельбы»

Дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = f_1(x)y' + f_2(x)y + f_3(x) \text{ является линейным}$$

граничные условия

$$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Краевая задача сводится к задаче Коши с помощью начальных условий

1) $y(a) = A, \quad y'(a) = \alpha_1$ – решение $y_1(x);$

2) $y(a) = A, \quad y'(a) = \alpha_2$ – решение $y_2(x).$

Если $y_1(b) = \beta_1$, а $y_2(b) = \beta_2$, причем $\beta_1 \neq \beta_2$, то решение

$$y(x) = \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} [(B - \beta_2)y_1(x) + (\beta_1 - B)y_2(x)]$$

Конечно-разностные методы решения краевой задачи

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y') \quad a \leq x \leq b$$

граничные условия

$$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

**В основе конечно-разностных методов – замена
производных конечными разностями**

Интервал $[a, b]$ разделяется на n равных частей

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad h = (b - a)/n$$

$$y(x_i) = y_i \quad y'(x_i) = y'_i \quad y''(x_i) = y''_i$$

Конечно-разностные методы решения краевой задачи

Конечно-разностные выражения для первых производных

Односторонние производные (на концах отрезка):

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + O(h) \quad y'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + O(h)$$

Разложение функции в ряд Тейлора

$$y(x_i + h) = y(x_i) + \frac{y'(x_i)}{1!} h + \frac{y''(x_i)}{2!} h^2 + \dots$$

$$y(x_i - h) = y(x_i) - \frac{y'(x_i)}{1!} h + \frac{y''(x_i)}{2!} h^2 + \dots$$

Конечно-разностные методы решения краевой задачи

$$y_{i+1} = y_i + \frac{y_i'}{1!}h + \frac{y_i''}{2!}h^2 + \dots$$

$$y_{i-1} = y_i - \frac{y_i'}{1!}h + \frac{y_i''}{2!}h^2 + \dots$$

Центральные разностные производные (внутренние узлы):

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

$$y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' = 2x + 3y$$

граничные условия $y(0) = 0, \quad y(1) = 1$

$$h = 0,2$$

Разностная форма уравнения

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{0.04} = 2x_i + 3y_i$$

Пример. Решение дифференциального уравнения

Система линейных уравнений

$$\begin{aligned}-2.12y_1 + y_2 &= 0.016, \\ y_1 - 2.12y_2 + y_3 &= 0.032, \\ y_2 - 2.12y_3 + y_4 &= 0.048, \\ y_3 - 2.12y_4 &= -0.936.\end{aligned}$$

	численное решение	точное решение
0.0	0.0	0.0
0.2	0.0827	0.0818
0.4	0.1912	0.1897
0.6	0.3548	0.3529
0.8	0.6088	0.6073
1.0	1.0000	1.0000

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

граничные условия

$$c_1 y(a) + c_2 y'(a) = c$$

$$d_1 y(b) + d_2 y'(b) = d$$

$$|c_1| + |c_2| \neq 0 \quad |d_1| + |d_2| \neq 0$$

Аппроксимация производных

внутренние узлы:

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \quad y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

на концах отрезка:

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h} \quad y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}$$

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение

Разностная аппроксимация исходной задачи

$$c_1 y(a) + c_2 y'(a) = c$$

$$c_1 y_0 + c_2 \frac{y_1 - y_0}{h} = c$$

$$(hc_1 - c_2)y_0 + c_2 y_1 = hc$$

$$d_1 y(b) + d_2 y'(b) = d$$

$$d_1 y_n + d_2 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = d$$

$$-d_2 y_{n-1} + (d_1 h + d_2) y_n = hd$$

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение

Разностная аппроксимация исходной задачи

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i) \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i)y_i = f(x_i)$$

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + \frac{p(x_i)}{2}h(y_{i+1} - y_{i-1}) + q(x_i)h^2y_i = f(x_i)h^2$$

$$\left[1 - \frac{p(x_i)}{2}h\right]y_{i-1} + [q(x_i)h^2 - 2]y_i + \left[1 + \frac{p(x_i)}{2}h\right]y_{i+1} = f(x_i)h^2$$

$$\alpha_i y_{i-1} + \beta_i y_i + \gamma_i y_{i+1} = \varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение

Система уравнений

$$\beta_0 y_0 + \gamma_0 y_1 = \varphi_0$$

$$\alpha_i y_{i-1} + \beta_i y_i + \gamma_i y_{i+1} = \varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\alpha_n y_{n-1} + \beta_n y_n = \varphi_n$$

$$\beta_0 = hc_1 - c_2; \quad \gamma_0 = c_2; \quad \varphi_0 = hc;$$

$$\alpha_i = 1 - \frac{p(x_i)}{2}h; \quad \beta_i = q(x_i)h^2 - 2;$$

$$\gamma_i = 1 + \frac{p(x_i)}{2}h; \quad \varphi_i = f(x_i)h^2; \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\alpha_n = -d_2; \quad \beta_n = d_1h + d_2; \quad \varphi_n = hd.$$

Решение системы линейных уравнений методом прогонки

Система уравнений

$$b_0x_0 + c_0x_1 = d_0;$$

$$a_ix_{i-1} + b_ix_i + c_ix_{i+1} = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$a_nx_{n-1} + b_nx_n = d_n.$$

$$b_0x_0 + c_0x_1 = d_0;$$

$$a_1x_0 + b_1x_1 + c_1x_2 = d_1;$$

$$a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2;$$

$$x_0 + \frac{c_0}{b_0}x_1 = \frac{d_0}{b_0}; \quad a_1x_0 + a_1\frac{c_0}{b_0}x_1 = a_1\frac{d_0}{b_0};$$

$$\left(b_1 - a_1\frac{c_0}{b_0}\right)x_1 + c_1x_2 = d_1 - a_1\frac{d_0}{b_0};$$

Решение системы линейных уравнений методом прогонки

Прямой ход

$$b'_i = b_i - a_i \frac{c_{i-1}}{b_{i-1}}; \quad d'_i = d_i - a_i \frac{d_{i-1}}{b_{i-1}};$$

Система уравнений

$$b_0 x_0 + c_0 x_1 = d_0;$$

$$b'_i x_i + c_i x_{i+1} = d'_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$b'_n x_n = d'_n.$$

Обратный ход

$$x_n = \frac{d'_n}{b'_n}; \quad x_i = \frac{d'_i - c_i x_{i+1}}{b'_i}; \quad i = n-1, n-2, \dots, 1$$

Задание

- 1. Написать программу решения краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка методом прогонки (C++Builder) с построением графиков.**
- 2. Решить краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка в Mathcad с построением графиков.**

Варианты заданий

Плис А.И., Сливина. Лабораторный практикум по высшей математике (лабораторная работа №30, с. 198).

**Благодарю
за внимание!**