



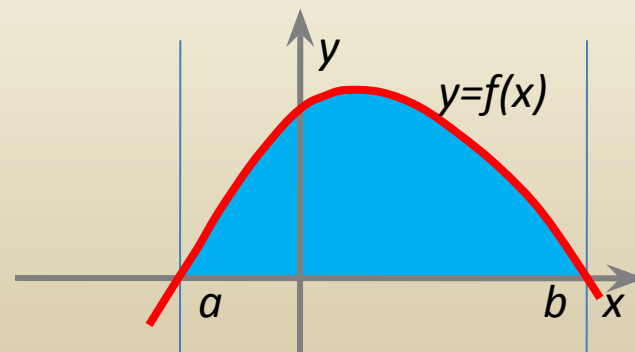
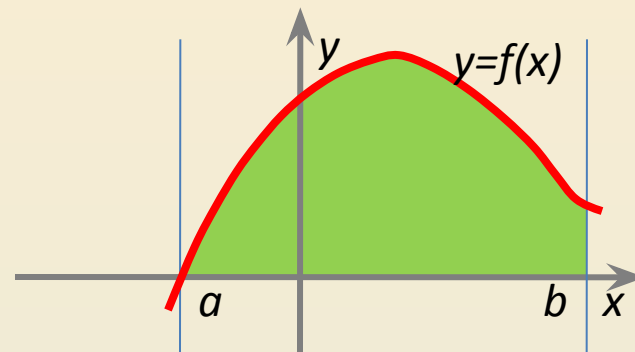
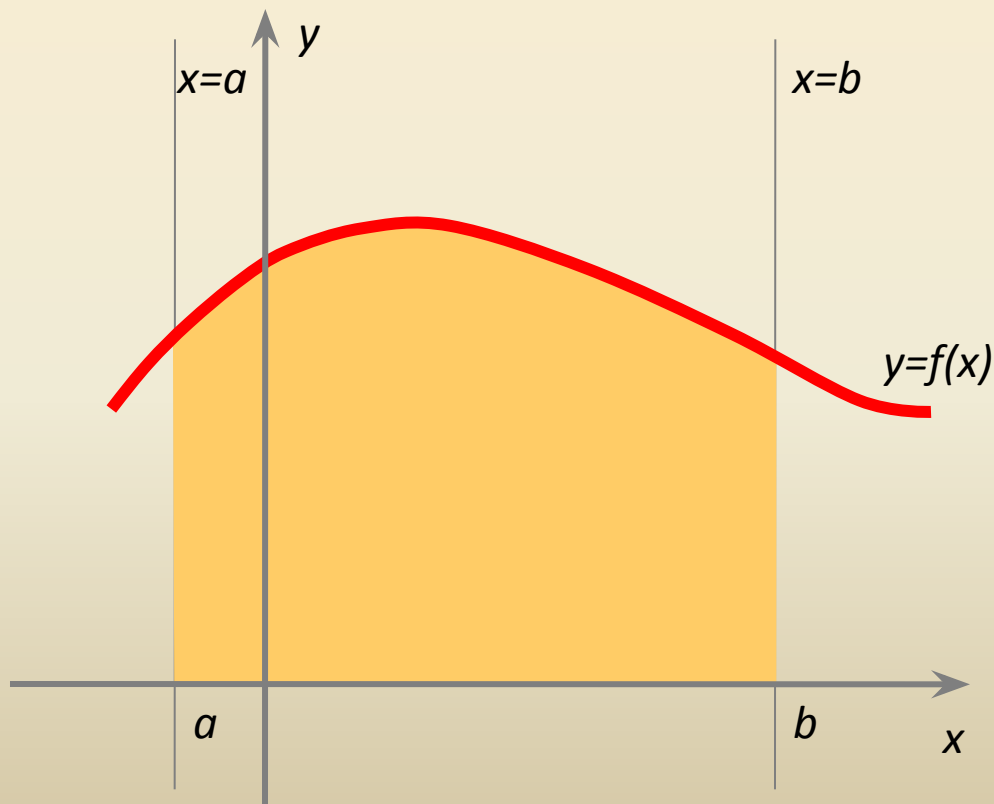
Определённый интеграл

Алгебра

Понятие о криволинейной трапеции



Фигура, ограниченная неотрицательной на отрезке $[a; b]$ функцией $y=f(x)$ и прямыми $y=0$, $x=a$, $x=b$ называется
криволинейной трапецией



Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла



Решение различных задач привело
к одной и той же математической модели:

Для функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$:

1. Разбить отрезок $[a;b]$ на n равных частей

2. Составить сумму $S_n = f(x_0) \cdot \Delta x_0 + \dots + f(x_n) \cdot \Delta x_n$

3. Вычислить предел этой суммы при $n \rightarrow \infty$

Понятие определённого интеграла



Предел такой суммы называют
определённым интегралом по отрезку $[a;b]$:

Стилизованная
буква S (сумма)

Напоминание о
слагаемых вида

$$f(x_n)\Delta x_n$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

Геометрический и физический смысл определённого интеграла



Задача о вычислении массы стержня



Геометрический смысл интеграла: $S = \int_a^b f(x) dx$

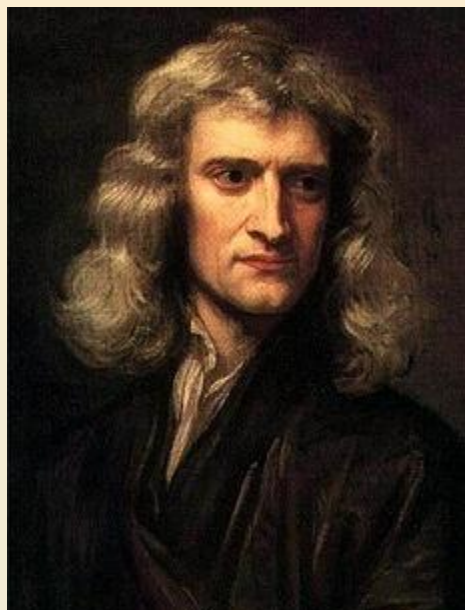
Физический смысл интеграла: $m = \int_a^b \rho(x) dx$

$$s = \int_a^b v(t) dt$$

$$m = \int_a^b p(x) dx$$



Формула Ньютона-Лейбница



Исаак НЬЮТОН
1642-1727

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная
для функции $f(x)$



Готфрид Лейбниц
1646-1716

Или

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b$$

Вычисление определённого интеграла



Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Примеры вычисления определённых интегралов



$$21.46 \int_{-2}^{\frac{1}{3}} \frac{2dx}{\sqrt{10-3x}}$$

$$21.8e \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2 \sin \frac{x}{3} dx$$

$$21.16a \int_0^4 e^{0,5x-1} dx$$

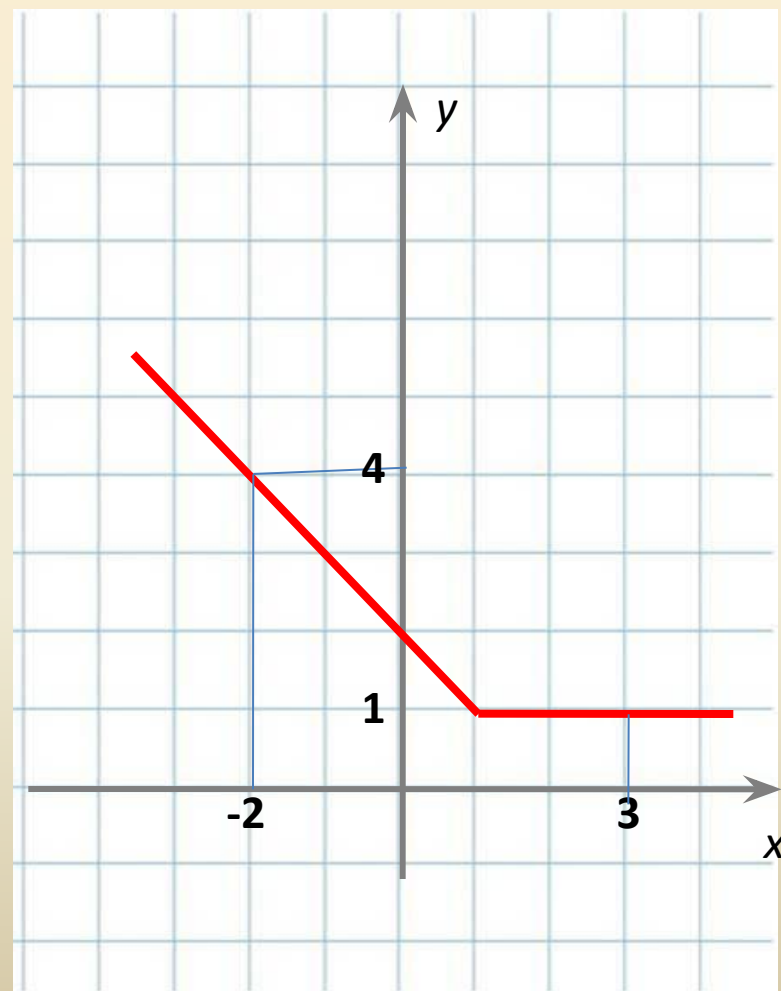
Геометрический смысл определённого интеграла



21.24a

Вычислить интеграл $\int_{-2}^3 f(x) dx$,

если график функции $y=f(x)$
изображён на рисунке



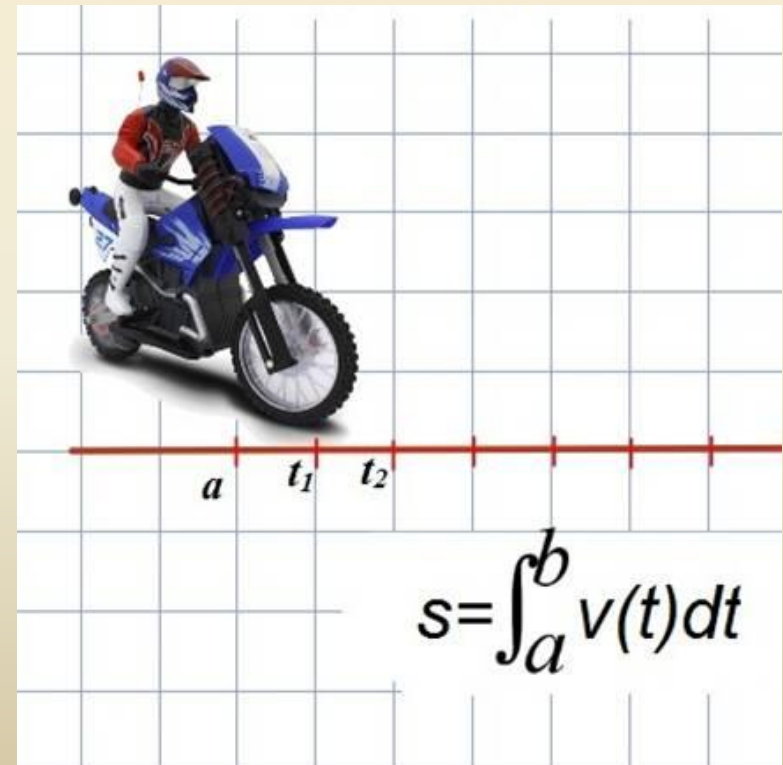
Ответ: **9,5**

Физический смысл определённого интеграла



21.40a Материальная точка движется по прямой со скоростью, определяемой формулой $v = 3t^2 - 4t + 1$, (время измеряется в секундах, скорость – в сантиметрах в секунду).

Какой путь пройдёт точка за 3 секунды, считая от начала движения ($t=0$)?

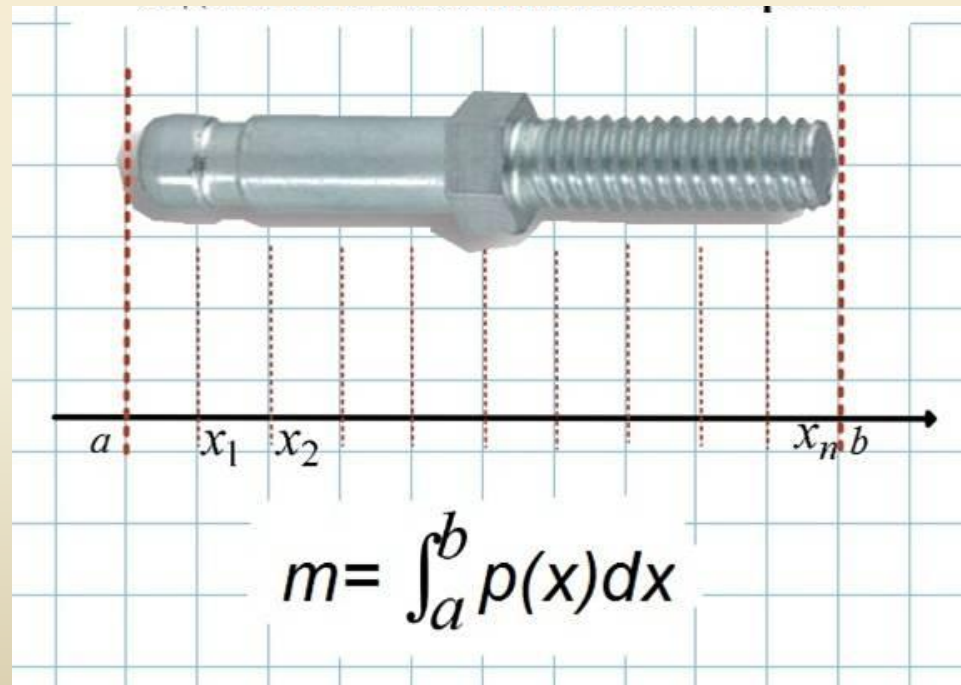


Ответ: **12см**

Физический смысл определённого интеграла



21.42a Дан прямолинейный неоднородный стержень $[0;6]$, его плотность в точке x определяется по формуле $\rho(x) = x^2 + x + 1$.
Найдите массу стержня.

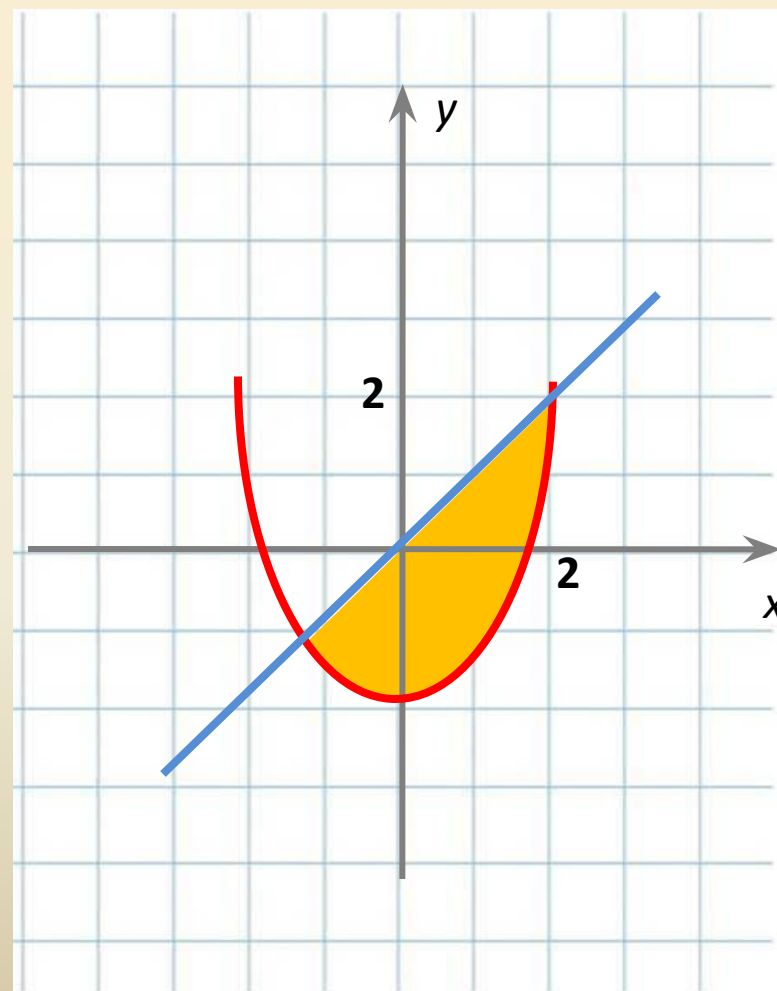
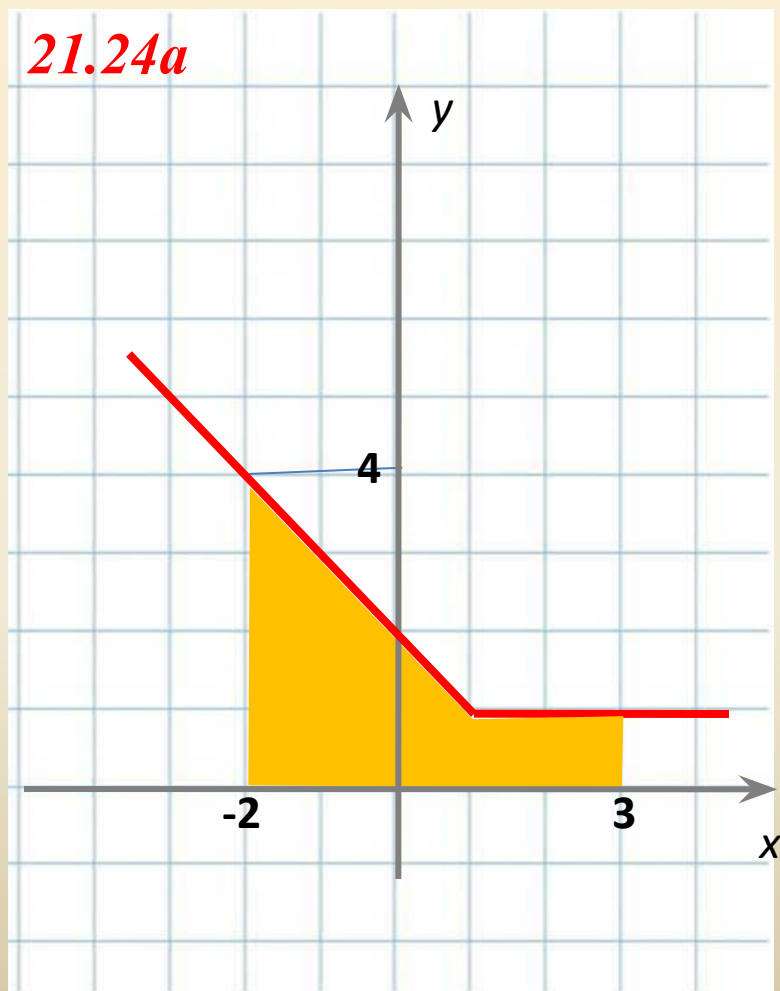


Ответ: **96**

Вычисление площадей фигур с помощью определённого интеграла



21.24a



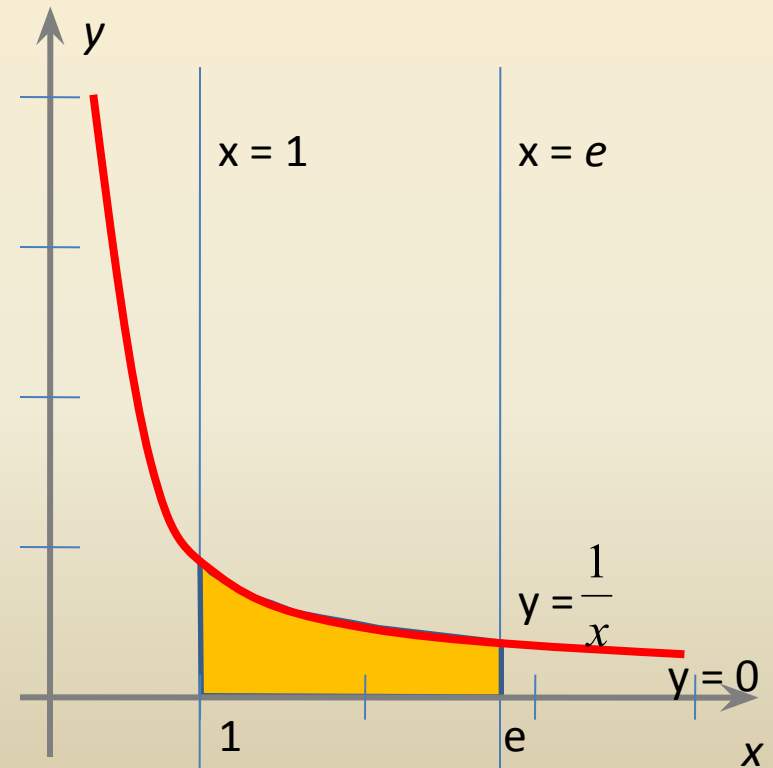
Вычисление площади криволинейной трапеции



Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 0$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = e$.

$$S = \int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

Ответ: **$S = 1$**



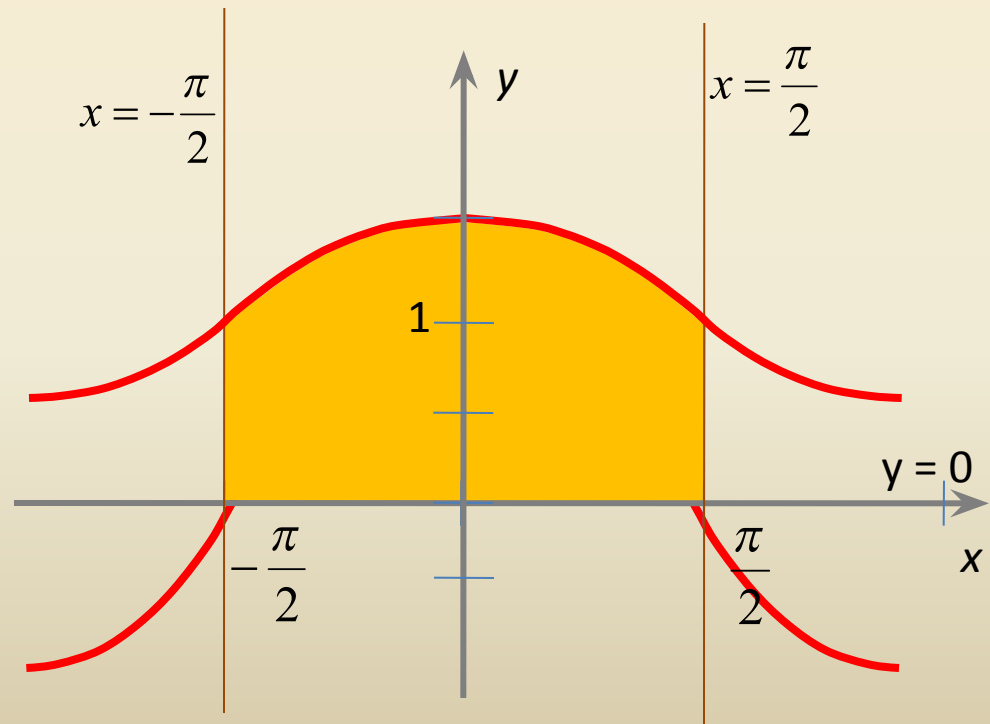
Вычисление площади криволинейной трапеции



21.47a Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

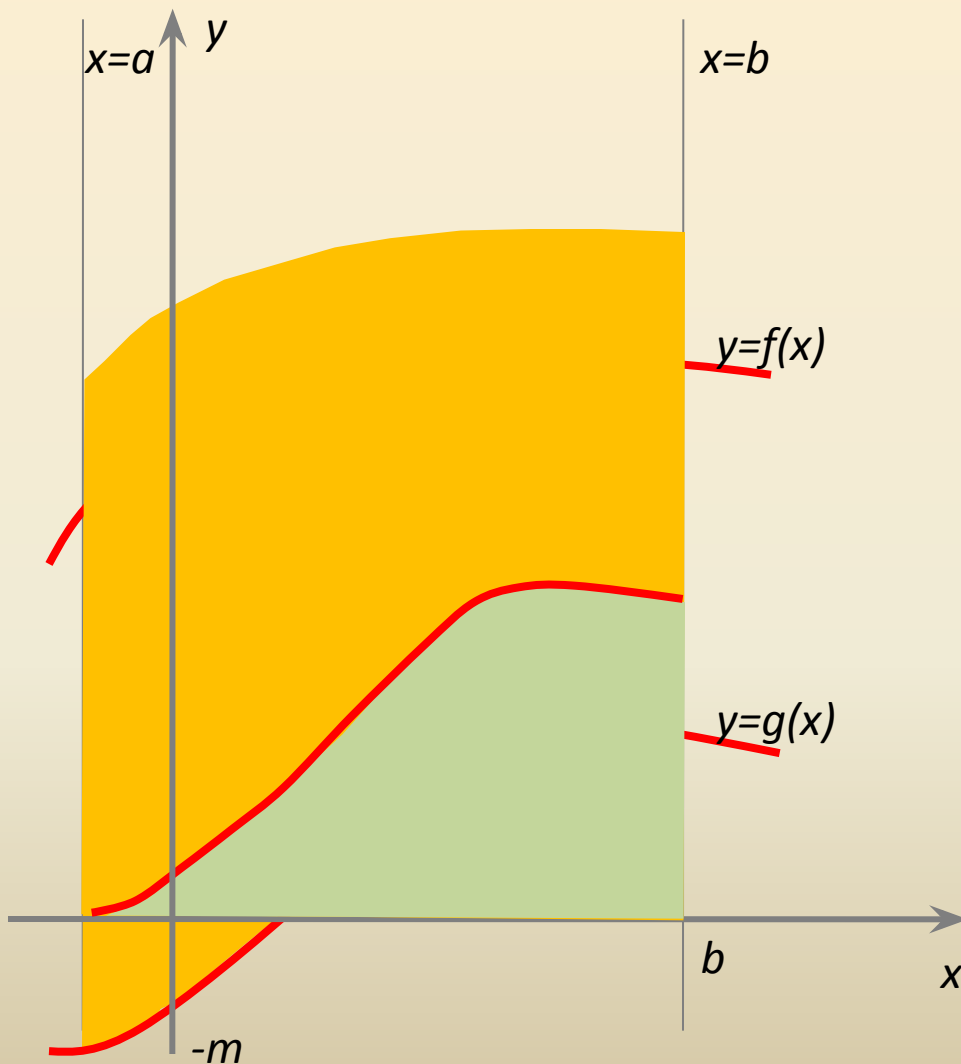
$$y = 1 + \frac{1}{2} \cos x, y = 0, x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \cos x\right) dx = \\ &= \left(x + \frac{1}{2} \sin x\right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi + 1 \end{aligned}$$



Ответ: $S = \pi + 1$

Вычисление площадей плоских фигур



- Перенесём фигуру выше оси абсцисс на m единиц
- Площадь фигуры равна разности площадей криволинейных трапеций

$$S = \int_a^b (f(x) + m)dx - \int_a^b (g(x) + m)dx$$

- Или:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Вычисление площадей плоских фигур



Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x-2$ и $y=x^2-4x+2$

1. $y=x^2-4x+2$, $x_0=2$, $y_0=-2$

2. $y=x-2$: $x=0$, $y=-2$; $x=2$, $y=0$

3. Абсциссы точек пересечения:

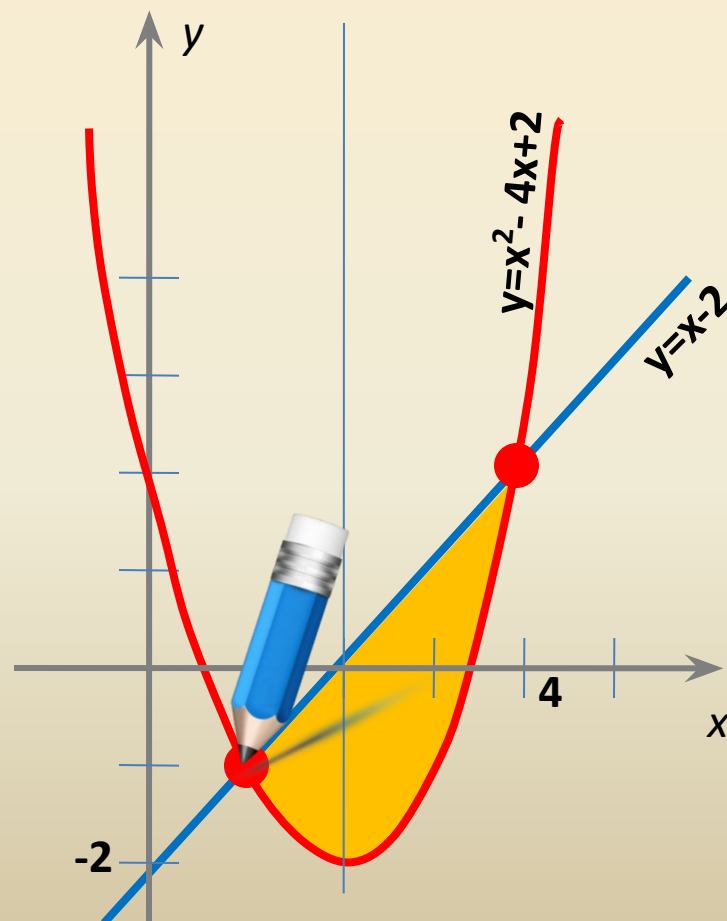
$$x^2-4x+2=x-2$$

$$x_1=1, x_2=4$$

4. $S = \int_1^4 ((x-2) - (x^2-4x+2)) dx =$

$$= \int_1^4 (5x - x^2 - 4) dx = \left(\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 4x \right) \Big|_1^4 = 4,5$$

Ответ: $S=4,5$

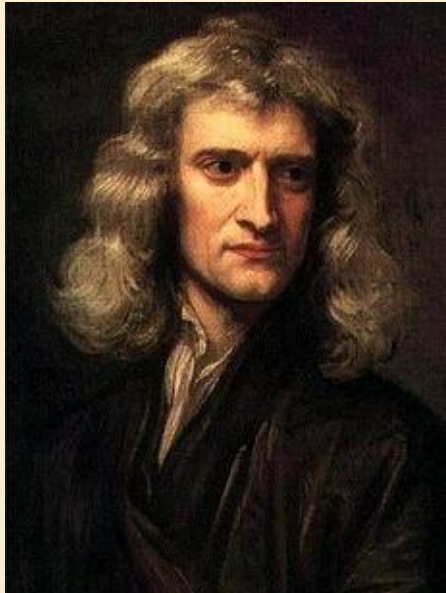


Рефлексия

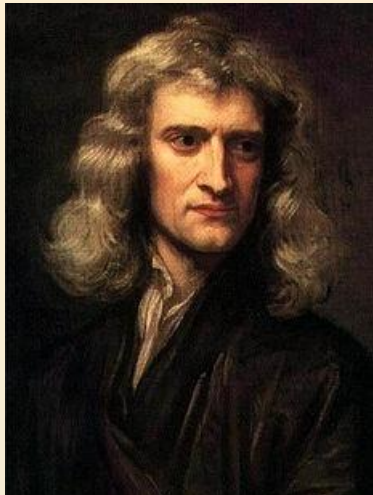


- Криволинейная трапеция
- Формула Ньютона-Лейбница
- Геометрический и физический смысл определённого интеграла
- Формула для вычисления площади фигуры, ограниченной графиками $y = f(x)$ и $y = g(x)$

Формула Ньютона-Лейбница



Формула Ньютона-Лейбница



Ньютон открыл новый метод раньше, но опубликовал его позже Лейбница, написав ему:
«Надеюсь, что я при этом не написал ничего, что было бы тебе неприятно, если же это случилось, то прошу сообщить, потому что друзья мне дороже математических открытий»



Лейбниц ответил в резкой форме. Распря двух гениев дорого обошлась науке: английская математическая школа увяла на целый век, а европейская проигнорировала многие выдающиеся идеи Ньютона.

Спор тянулся почти 40 лет, пока аббат Конти не сообщил Ньютону: *«Лейбниц умер – диспут окончен»*

Структура презентации



Использованные ресурсы



- А.Г. Мордкович, П.В. Семёнов. Алгебра и начала анализа. Учебник (профильный уровень)
- А.Г. Мордкович, Л.О. Денищева и др. Алгебра и начала анализа. Задачник (профильный уровень)
- Картинка ["книги"](#)
- Материал Википедии [Лейбниц](#) Материал Википедии [Лейбниц](#) [Ньютон](#)
- Рисунок [карандаш](#)
- Значок [Информация](#)
- Видео [Величайший из учёных – Исаак Ньютон](#)