ОПТИМИЗАЦИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПОЛУМАРКОВСКИХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ В ТОРГОВОЙ ОРГАНИЗАЦИИ

Работу выполнил:

СКОРОДУМОВ Александр Александрович

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент КОЗЛОВ Владимир Анатольевич

Актуальность

- Исследование проблемы управления в экономической системе требует выделения и разделения внешних и внутренних факторов
- Входной поток требований является внешним фактором, требуется исследовать модель управления этим фактором
- В условиях торговой организации моделирование входного потока требований обычно используют математические модели массового обслуживания для анализа, оптимизации функционирования и самоорганизации

Цель

- использование математических моделей массового обслуживания для анализа, оптимизации систем в торговой организации

Задачи

- построить математическую модель, позволяющую провести анализ и определить оптимальную стратегию управления
- исследовать эту управляемую систему массового обслуживания, определить оптимальную стратегию управления и оптимальное значение показателя эффективности
- исследовать удельный доход для системы массового обслуживания и определить оптимальную стратегию управления

В первой главе

- рассмотрены теоретические подходы к торговой организации как объекту экономико-математического моделирования, основные элементы теории массового обслуживания, описаны и определены математические объекты (управляемый полумарковский процесс), введены обозначения, определена модель массового обслуживания и дана постановка математической задачи управления

- ***Системой*** называется целостное множество взаимосвязанных элементов, которые нельзя разделить на независимые подмножества.
- Основой СМО является определенное число обслуживающих устройств – ***каналы обслуживания***.
- Роль каналов в магазине могут выполнять продавцы

- Основными элементами СМО являются:
  - входной поток заявок;
  - очередь;
  - каналы обслуживания;
  - выходной поток заявок (обслуженные заявки)
- *Показатели эффективности СМО* описывают ее возможность справляться с потоком заявок.
- К числу показателей эффективности *СМО с очередью* относятся:
  - среднее время ожидания обслуживания;
  - среднее число заявок в очереди;
  - среднее время пребывания заявки в очереди;
  - вероятность того, что канал занят.

- В работе математическая модель СМО усложнена, т. к. рассмотрен входной поток *неоднородных* требований (требования нескольких типов), интервалы поступления требований имеют *произвольное* распределение

- Вероятность того, что в *k*–ой подсистеме за время *t* (между марковскими моментами) будет обслужено *(m-s)* заявок при условии, что в начальный момент в СМО было *m* требований для многоканальной системы с ожиданием задается соотношением

$$
p_{ms}^{(k)}(t) = \begin{cases} C_m^s (1 - e^{-\mu_k t})^{(m-s)} e^{-s\mu_k t}, \ n_k \ge m \ge s \ge 0, \\ \dfrac{(\mu_k t \ {}_k)^{m-s}}{(m-s)!} e^{-\mu_k t \ {}_k}, \ m \ge s \ge n_k, \\ \int_0^t \mu C_{n_k}^s (1 - e^{-\mu_k (t-x)})^{(n_k - s)} e^{-s\mu_k x} \dfrac{(n_k \mu_k x)^{m - n_k - 1}}{(m - n_k - 1)!} e^{-n_k \mu_k x} dx, \quad m > n_k > s \ge 0. \end{cases}
$$

- Для построения функционала доходов на траекториях управляемого полумарковского процесса вводим условное математическое ожидание накопленного дохода

$$R^{(k)}_{(i,m)(j,l)}(x,u)=c_1^{(k)}C_1(x,m_k,l_k,u)+\sum_{s=2}^{4}C_2(x,n_k,m_k,l_k,u)+c_5^{(k)}C_5(x,m_k,l_k,u)$$

$$C_1(x,m_k,l_k,u)=M(\zeta_k\,/\,\nu^{(k)}(0)=m_k,\xi^{(k)}(x)=l_k,u(0)=u)$$

- Рассмотрим построение оптимальной стратегии управления
- Если дробно-линейный функционал имеет экстремум (максимум или минимум), то этот экстремум достигается в классе вырожденных детерминированных стратегий

- Поэтому алгоритм определения оптимальной стратегии имеет вид:
  - для фиксированной вырожденной стратегии вычисляется матрица переходных вероятностей
  - для этой матрицы решается система алгебраических уравнений и определяется нормированное решение – стационарное распределение вложенной цепи Маркова при выбранной фиксированной вырожденной стратегии
  - вычисляется удельный доход, соответствующий выбранной вырожденной стратегии
  - перебирая все вырожденные стратегии и соответствующие им величины дохода, определяем максимальный доход и оптимальную стратегию

- Перечислены стратегии управления

Состояние		(1,1,0)	(1,1,1)	(2,0,1)	(2,1,1)
	№ стратегии				
ение (тип заявки)	1	$p_{(1,1,0),1}=1$ $p_{(1,1,0),2}=0$	$p_{(1,1,1),1}=1$ $p_{(1,1,1),2}=0$	$p_{(2,0,1),1}=1$ $p_{(2,0,1),2}=0$	$p_{(2,1,1),1}=1$ $p_{(2,1,1),2}=0$
	2	$p_{(1,1,0),1}=1$ $p_{(1,1,0),2}=0$	$p_{(1,1,1),1}=1$ $p_{(1,1,1),2}=0$	$p_{(2,0,1),1}=1$ $p_{(2,0,1),2}=0$	$p_{(2,1,1),2}=1$ $p_{(2,1,1),1}=0$
	3	$p_{(1,1,0),1}=1$ $p_{(1,1,0),2}=0$	$p_{(1,1,1),1}=1$ $p_{(1,1,1),2}=0$	$p_{(2,0,1),2}=1$ $p_{(2,0,1),1}=0$	$p_{(2,1,1),1}=1$ $p_{(2,1,1),2}=0$
	4	$p_{(1,1,0),1}=1$ $p_{(1,1,0),2}=0$	$p_{(1,1,1),2}=1$ $p_{(1,1,1),1}=0$	$p_{(2,0,1),1}=1$ $p_{(2,0,1),2}=0$	$p_{(2,1,1),1}=1$ $p_{(2,1,1),2}=0$
	5	$p_{(1,1,0),2}=1$ $p_{(1,1,0),1}=0$	$p_{(1,1,1),1}=1$ $p_{(1,1,1),2}=0$	$p_{(2,0,1),1}=1$ $p_{(2,0,1),2}=0$	$p_{(2,1,1),1}=1$ $p_{(2,1,1),2}=0$
	6	$p_{(1,1,0),1}=1$ $p_{(1,1,0),2}=0$	$p_{(1,1,1),1}=1$ $p_{(1,1,1),2}=0$	$p_{(2,0,1),2}=1$ $p_{(2,0,1),1}=0$	$p_{(2,1,1),2}=1$ $p_{(2,1,1),1}=0$
	7	$p_{(1,1,0),1}=1$ $p_{(1,1,0),2}=0$	$p_{(1,1,1),2}=1$ $p_{(1,1,1),1}=0$	$p_{(2,0,1),2}=1$ $p_{(2,0,1),1}=0$	$p_{(2,1,1),1}=1$ $p_{(2,1,1),2}=0$
	8	$p_{(1,1,0),2}=1$ $p_{(1,1,0),1}=0$	$p_{(1,1,1),2}=1$ $p_{(1,1,1),1}=0$	$p_{(2,0,1),1}=1$ $p_{(2,0,1),2}=0$	$p_{(2,1,1),1}=1$ $p_{(2,1,1),2}=0$

- Для вычисления стационарных распределений вложенной цепи Маркова решены шестнадцать систем линейных уравнений

$$
\begin{cases}
\pi_{(1,1,0)} = \pi_{(1,1,0)} p_{(1,1,0)(1,1,0)} + \pi_{(1,1,1)} p_{(1,1,1)(1,1,0)} + \pi_{(2,0,1)} p_{(2,0,1)(1,1,0)} + \pi_{(2,1,1)} p_{(2,1,1)(1,1,0)} \\
\pi_{(1,1,1)} = \pi_{(1,1,0)} p_{(1,1,0)(1,1,1)} + \pi_{(1,1,1)} p_{(1,1,1)(1,1,1)} + \pi_{(2,0,1)} p_{(2,0,1)(1,1,1)} + \pi_{(2,1,1)} p_{(2,1,1)(1,1,1)} \\
\pi_{(2,0,1)} = \pi_{(1,1,0)} p_{(1,1,0)(2,0,1)} + \pi_{(1,1,1)} p_{(1,1,1)(2,0,1)} + \pi_{(2,0,1)} p_{(2,0,1)(2,0,1)} + \pi_{(2,1,1)} p_{(2,1,1)(2,0,1)} \\
\pi_{(2,1,1)} = \pi_{(1,1,0)} p_{(1,1,0)(2,1,1)} + \pi_{(1,1,1)} p_{(1,1,1)(2,1,1)} + \pi_{(2,0,1)} p_{(2,0,1)(2,1,1)} + \pi_{(2,1,1)} p_{(2,1,1)(2,1,1)} \\
\pi_{(1,1,0)} + \pi_{(1,1,1)} + \pi_{(2,0,1)} + \pi_{(2,1,1)} = 1
\end{cases}
$$

- Для всех стратегий рассчитаны условные математические ожидания накопленного дохода и математическое ожидание времени непрерывного пребывания

$$\mathrm{R}_{(2,1,1)(2,1,1)}(\mathrm{t},2) = c_1^{(2)}(1-e^{-\mu 2t}) + c_2^{(1)}t + c_2^{(2)}\frac{1-e^{-\mu_2 t}-\mu_2 te^{-\mu_2 t}}{\mu_2} + c_2^{(2)}te^{-\mu_2 t} +$$

$$+c_3^{(2)}[t-\frac{1-e^{-\mu_2 t}-\mu_2 te^{-\mu_2 t}}{\mu_2(1-e^{-\mu_2 t})}](1-e^{-\mu_2 t})$$

$$s_{(2,1,1)} = [\sum_{(j,l_1',l_2')}[\int_o^\infty R_{(2,1,1)(j,l'_1,l'_2)}(x,2)d_x Q_{(2,1,1)(j,l'_1,l'_2)}(x,2)]$$

- Практическая значимость проведенного исследования состоит в том, что данная модель может быть использована для повышения эффективности функционирования предприятий сферы обслуживания, в том числе торговых организаций

Спасибо за внимание