Методы решения тригонометрических уравнений

- Решение простейших тригонометрических уравнений
- Решение тригонометрических уравнений разложением на множители
- Решение тригонометрических уравнений сводящихся к квадратным уравнениям
- Решение тригонометрических уравнений преобразованием суммы тригонометрических функций в произведение
- Решение тригонометрических уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму
- Решение тригонометрических уравнений с применением формул понижения степени
- Решение тригонометрических уравнений как однородное
- Решение тригонометрических уравнений с помощью введения вспомогательного аргумента
- Решение тригонометрических уравнений с помощью универсальной тригонометрической подстановки
- Решение тригонометрических уравнений с помощью замены неизвестного
- Решение тригонометрических уравнений с помощью оценки левой и правой частей уравнения (метод оценок)
- Решение тригонометрических уравнений содержащих тригонометрические функции под знаком радикала

К определению тригонометрического уравнения различные авторы учебных пособий подходят по-разному. Мы назовём тригонометрическим уравнением равенство тригонометрических выражений, содержащих неизвестное (переменную) только под знаком тригонометрических функций. Уравнения вида

$$\cos 3x = \sin x \qquad tg\left(\frac{\pi}{2} - 11x\right) - tg\left(\frac{3}{2}\pi - 5x\right) = 0 \qquad \sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$$

и т.д. – тригонометрические уравнения.

Уравнения вида

$$\sin x = \frac{1}{2}x \qquad \cos 2x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \qquad tg\,2x = x$$

и т.д. не являются тригонометрическими, они относятся к типу трансцендентных уравнений и, как правило, решаются приближенно или графически.

Решить тригонометрическое уравнение – значит, найти все его корни – все значения неизвестного, удовлетворяющие уравнению.

- Простейшими тригонометрическими уравнениями являются:
- $\sin x = a$ $\cos x = a$, где $|a| \leq 1$

$tgx = a$ $ctgx = a$, где $a \in R$

1. Решение простейших тригонометрических уравнений

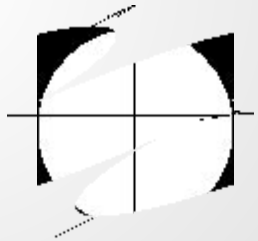
По определению арифметического квадратного корня перейдем к равносильной системе уравнений.

Отве

2. Решение тригонометрических уравнений разложением на множители

Пример.

x = 2πn, n∈Z



Отметим полученные решения и область определения на тригонометрическом круге.

Ответ:

3. Решение тригонометрических уравнений сводящихся к квадратным уравнениям

Пусть тогда

или

Корней нет

Ответ:

4. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

При решение уравнений данным способом необходимо знать формулы:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}, \quad \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)-\sin 2x=0$$

По формулам приведения

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\sin 3x$$

преобразуем разность синусов в произведение:

$$\sin 3x-\sin 2x=2\sin\frac{3x-2x}{2}\cos\frac{3x+2x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}=0$$

$$\sin\frac{x}{2}=0$$

или

$$\cos\frac{5x}{2}=0$$

$$x=2\pi k,\ k\in Z$$

$$x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}k,\ k\in Z$$

Ответ: $2\pi k,\ \frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}k,\ k\in Z$

5. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

При решение уравнений данным способом необходимо знать формулы:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}, \qquad \mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta},$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta - 1}{\mathrm{ctg}\,\beta + \mathrm{ctg}\,\alpha}, \qquad \mathrm{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta + 1}{\mathrm{ctg}\,\beta - \mathrm{ctg}\,\alpha}.$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)].$$

$$\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$$

$$\frac{1}{2}\left[\cos(2x-6x) - \cos(2x+6x)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos(x-3x) + \cos(x+3x)\right]$$

$$\cos 4x - \cos 8x = \cos 2x + \cos 4x$$

$$\cos 8x + \cos 2x = 0$$

$$2\cos 5x \cos 3x = 0$$

$\cos 5x = 0,\ \ x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5},\ k \in Z$ или $\cos 3x = 0,\ \ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5},\ \ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z$

6. Использование формул понижения степени

При решение уравнений данным способом необходимо знать формулы:

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \quad 1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos^2 3x + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}+5x\right) = \cos^2 7x + \cos^2 9x + \cos\frac{3\pi}{2}$$

$$\cos^2 3x + \cos 5x = \cos^2 7x + \cos^2 9x$$

$$\frac{1}{2}(1+\cos 6x) + \frac{1}{2}(1+\cos 10x) = \frac{1}{2}(1+\cos 14x) + \frac{1}{2}(1+\cos 18x)$$

$$\cos 6x + \cos 10x = \cos 14x + \cos 18x$$

$$2\cos 8x \cos 2x = 2\cos 16x \cos 2x,$$

$$\cos 2x(\cos 16x - \cos 8x) = 0.$$

$$-2\sin 4x \sin 12 \cos 2x = 0$$

$\sin 4x = 0$ или $\sin 12x = 0$ или $\cos 2x = 0$

$$x = \frac{\pi k}{4},\ x = \frac{\pi n}{12},\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi l}{2},\ k, n, l \in Z$$

$$x = \frac{\pi n}{12},\ n \in Z$$

Ответ: $\frac{\pi n}{12},\ n \in Z$

7. Однородные уравнения

Уравнения

$$a\sin x + b\cos x = 0;$$

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0;$$

$$a\sin^3 x + b\sin^2 x\cos x + c\sin x\cos^2 x + d\cos^3 x = 0$$ и т. д.

называют **однородными** относительно $\sin x$ и $\cos x$

Сумма показателей степеней при $\sin x$ и $\cos x$ всех членов такого уравнения одинакова. Эта сумма называется степенью однородного уравнения. Рассмотренные уравнения имеют соответственно первую, вторую и третью степень.

Делением на $\cos^k x$,где k - степень однородного уравнения, уравнение приводится к алгебраическому относительно функции tgx

$$2\sin x - 3\cos x = 0$$

Разделим обе части уравнения на $\cos x \neq 0$

$$2 \cdot tgx - 3 = 0 \qquad tgx = \frac{3}{2} \qquad x = arctg\frac{3}{2} + \pi k \quad k \in Z$$

Ответ: $x = arctg\frac{3}{2} + \pi k \quad k \in Z$

$$4\sin^2 x + 2\sin x\cos x = 3$$

Умножим правую часть уравнения на $\sin^2 x + \cos^2 x$

$$4\sin^2 x + 2\sin x\cos = 3\sin^2 x + 3\cos^2 x;$$

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos - 3\cos^2 x = 0$$

Разделим на $\cos^2 x$

$$tg^2 x + 2 \cdot tgx - 3 = 0;$$

$tgx = -3$ и $tgx = 1$

$x = -arctg3 + \pi k$ и $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$ $n, k \in Z$

Ответ: $x = -arctg3 + \pi k$ $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$ $n, k \in Z$

8.Введение вспомогательного угла.

Рассмотрим уравнение вида: $a \sin x + b \cos x = c$

где a, b – x –

Разделим обе части этого уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$ (корректно ли это?):

$$\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\cos\varphi}\sin x + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\sin\varphi}\cos x = \underbrace{\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{C},$$

Теперь коэффициенты уравнения обладают свойствами синуса и косинуса,

а именно: модуль (абсолютное значение) каждого из них не больше 1,
а сумма их квадратов равна 1.

Тогда можно обозначить их соответственно как $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$

φ - так называемый **вспомогательный угол**

и наше уравнение принимает вид:

$$\cos\varphi \cdot \sin x + \sin\varphi \cdot \cos x = C,$$

или $$\sin(x+\varphi) = C,$$

и его решение: $x = (-1)^k \cdot \arcsin C - \varphi + \pi k$,

где $\varphi = \arccos \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arcsin \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Заметим, что введённые обозначения $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ взаимно заменяемы.

$$\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=1$$

Так как $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$, то $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ уже являются соответственно косинусом и синусом определенного угла; ясно, что этот угол $\frac{\pi}{3}$

$$\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}=1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$$

$$x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$

П р и м е р. Решить уравнение: $\sqrt{3}\,\sin 3x - \cos 3x = 1$.

Р е ш е н и е. Здесь $a = \sqrt{3}$, $b = -1$, поэтому делим обе части на $\sqrt{3+1} = 2$:

$$(\sqrt{3}\,/\,2)\cdot\sin 3x - (1\,/\,2)\cdot\cos 3x = 1\,/\,2,$$

$$\cos(\pi\,/\,6)\cdot\sin 3x - \sin(\pi\,/\,6)\cdot\cos 3x = 1\,/\,2,$$

$$\sin(3x - \pi\,/\,6) = 1\,/\,2,$$

отсюда, $x = (-1)^k \cdot \pi\,/\,18 + \pi\,/\,18 + \pi k\,/\,3$.

9. Метод рационализации (метод универсальной тригонометрической подстановки) для уравнения вида

$$a\sin x + b\cos x = c$$

Известно, что если $\alpha \neq (2n+1)\pi,\ n \in Z$, то $\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ tg\alpha$ выражаются рационально через $tg\frac{\alpha}{2}$

$$\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

Вводим вспомогательное неизвестное так, чтобы после подстановки получилось рациональное уравнение относительно вспомогательного неизвестного.

$$a\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} + b\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} = c$$

Обозначим $tg\frac{\alpha}{2}=t$, получим:

$$a\frac{2t}{1+t^2}+b\frac{1-t^2}{1+t^2}=c$$

Решим данное уравнение и получим следующие ответы:

1. если $a^2+b^2<c^2$, то то у уравнения нет корней;

2. если $a^2+b^2\geq c^2,\ c\neq -b$, то $x=2arctg\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}+2n\pi,\ n\in Z$

3. если $c\neq -b$, то $x=\begin{cases}(2n+1)\pi\\ -2arctg\frac{b}{a}+2n\pi,\ n\in Z\end{cases}$

$$3\sin x + 4\cos x = 3$$

$$a = 3,\ b = 4,\ c = 3,\ a^2 + b^2 > c^2$$

- уравнение имеет решение.

$$3\frac{2t}{1+t^2} + 4\frac{1-t^2}{1+t^2} = 3 \ \Rightarrow \ 7t^2 - 6t - 1 = 0,\ t_{1,2} = \frac{3 \pm 4}{7}$$

$$t_1 = 1,\ \ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ \ x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in Z$$

$$t_2 = -\frac{1}{7},\ \ \frac{x}{2} = -arctg\frac{1}{7} + n\pi,\ \ x = -2arctg\frac{1}{7} + 2n\pi,\ n \in Z$$

Ответ:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ x = -2arctg\frac{1}{7} + 2n\pi,\ n \in Z$$

(1)

(2
)

При переходе от уравнения (1) к уравнению (2), могла произойти потеря корней, значит необходимо проверить, являются ли корни уравнения корнями данного уравнения.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Проверка. Если [illegible], тогда

[illegible]

[illegible] - не верно, значит [illegible] не является корнями исходного уравнения.

Ответ: [illegible]

11. Решение тригонометрических уравнений с помощью оценки левой и правой частей уравнения (метод оценок)

Пример 1.

$$2\sin^3 5x + 7\cos 5x = 9,$$
$$2\sin^3 5x \le 2,$$
$$7\cos 5x \le 7,$$
$$2\sin^3 5x + 7\cos^5 x \le 9,$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 5x = 1, \\ \cos 5x = 1, \end{cases}$$ что невозможно.

Ответ. Решений нет.

Пример 2.

$$\sin^{19} x + \cos^{19} x = \frac{\pi}{3},$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin^{19} x \le \sin^2 x, \\ \cos^{19} x \le \cos^2 x, \end{array}\right| \Rightarrow \sin^{19} x + \cos^{19} x \le 1,$$

$$\pi/3 > 1.$$

Пример 3.

$$\sin 3x + \sin 7x = 2,$$

$$\begin{cases} \sin 3x = 1, \\ \sin 7x = 1, \end{cases}$$

$$\sin 3x = 1,$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $x \in [0; 2\pi[, x \in \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2} \right\}.$

Подставляем во второе уравнение:

$$\sin \frac{7\pi}{6} \neq 1; \ \sin \frac{35\pi}{6} \neq 1; \ \sin \frac{21\pi}{2} = 1.$$

Ответ. $\left\{ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$

Пример 4.

$$\cos^3 x \cos 2x = -1,$$

$$|\cos x| \le 1, \ |\cos 2x| \le 1, \ |\cos^3 x \cos 2x| \le 1,$$

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos 2x = -1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos x = -1, \\ \cos 2x = 1. \end{cases}$$

Если $\cos x = 1$, то $\cos 2x = \cos^2 x - 0 = 1 \neq -1$

Если $\cos x = -1$, то $\cos 2x = 1$

$$\begin{cases} \cos x = -1, \\ \cos 2x = 1. \end{cases} \Longleftrightarrow \cos x = -1.$$

Ответ. $\{\pi + 2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$

12. Решение тригонометрических уравнений содержащих тригонометрические функции под знаком радикала

Пример №1

Решим уравнение 2.

или

Учитывая условие 1, sin x ≥ 0, решением системы будут серии :

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad k \in Z$

$x = 2\pi n, \quad n \in Z$