Функции. Пределы функций

Основные понятия теории пределов

Студент должен знать

- Роль и место математики в современном мире
- Основные понятия теории функций, виды функций, свойства функций.
- Основные понятия теории пределов, свойства пределов.
- Методы вычисления пределов:
  - Методы раскрытия неопределённостей;
  - Замечательные пределы.

I. Предмет и задачи математики

- **Матема́тика**
  - Древне-греческий: μᾰθημᾰτικά
  - Древне-греческий: μάθημα – изучение, наука)
- наука о структурах, порядке и отношениях, которая исторически сложилась на основе операций подсчёта, измерения и описания формы объектов.

Математика

– фундаментальная наука:

- предоставляет (общие) языковые средства другим наукам;
- выявляет их структурную взаимосвязь
- способствует нахождению самых общих законов природы

Инструменты, облегчающие вычисления

- ***Блез Паска́ль* –** 1642 г. – суммирующая машина;
- ***Го́тфрид Вильге́льм Ле́йбниц* –** 1673 г. – арифмометр (+, –, ×, :);
- ***Чарльз Бе́ббидж* –** 1822-1851 гг. – попытка построить аналитическую машину;
- ***Ко́нрад Цу́зе* –** 1943 г. – электромеханическая вычислительная машина «Марк-1».

Вычислительная машина

- «Гуманитарные» области применения:
  - для хранения информации (музыкальная шкатулка, граммофонная пластинка, виниловый диск, аудио-кассета; фото, кино, видеокассета, CD);
  - для передачи информации (телеграф, телефон, радио, телевидение).

Конец XX века

- Компьютерные технологии предложили один универсальный метод обработки, передачи и хранения любых видов информации – математический или цифровой.
  - Математика является теоретической базой информатики.
  - Знание основ математического анализа, дискретной математики, теории вероятностей, математической статистики – неотъемлемая часть общей культуры современного человека.

Медработники среднего звена

- Применение сложной компьютерной техники, в профессиональной деятельности
  - (назовите примеры);
  - (назовите примеры);
  - (назовите примеры);
  - (назовите примеры).

Медработники среднего звена

- Решение математических задач различной степени сложности:
  - расчёт процентной концентрации раствора;
  - вычисление минутного объёма дыхания;
  - расчёт прибавки роста и массы детей;
  - оценка пропорциональности развития ребёнка с использованием антропометрических индексов;
  - определение показателей сердечной деятельности;
  - расчёт рациона питания с использованием объёмного и калорийного способов;
  - проведение статистических исследований и обработка полученных данных;
  - применение статистических показателей здоровья населения и деятельности лечебно-профилактических учреждений для построения прогнозов развития, планов и так далее.

II. Функции

Зависимость по некоторому правилу числовой переменной *y* от числовой переменной *x* называется *функцией*, если каждому значению *x* соответствует <u>*единственное*</u> значение *y*.

Аргумент и значение функции

- Переменную *x* называют *независимой переменной* или *аргументом*.
- Значение *y*, соответствующее заданному значению *x*, называют *значением функции* или *зависимой переменной.*

Области определения и значений функции

- Все значения, которые принимает независимая переменная *x*, образуют *область определения функции D(f)*.
- Все значения, которые принимает функция *f(x)*, образуют *область значений функции E(f)*.

Виды функций

- Линейная функция;
- прямая пропорциональность. постоянная функция;
- Обратная пропорциональность;
- Степенная функция;
- Показательная функция;
- Логарифмическая функция;
- Тригонометрические функции.

Свойства функций

Чётность

а) Функция $f(x)$ называется *чётной*, если

- $D(f)$ симметрична относительно начала координат;
- $\forall x \in D(f)$ справедливо: $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$.

График чётной функции симметричен относительно оси ординат

Чётность

b) Функция $f(x)$ называется *нечётной*, если

- $D(f)$ симметрична относительно начала координат;
- $\forall x \in D(f)$ справедливо: $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$.

График нечётной функции симметричен относительно начала координат

Чётность

Функция *f(x) не обладает чётностью*, если условия *a)* и *b)* не выполняются.

График такой функции не обладает симметрией относительно оси ординат или начала координат.

Примеры определения чётности функции

Пример 1: $f(x) = 2x^2 – 5$

Решение:

1. $\boldsymbol{D(f)} = R = (-\infty; +\infty)$ – *симметрична относительно начала координат;*
2. $\boldsymbol{f(–x)} = 2(–x)^2 – 5 = 2x^2 – 5 = \boldsymbol{f(x)}$;

Выполняется условие ***а***, значит, $f(x)$ – чётная функция.

Примеры определения чётности функции

Пример 2: $g(x) = x^3 + 3x$

Решение:

1. $\boldsymbol{D(f)} = R = (-\infty; +\infty)$ – *симметрична относительно начала координат;*
2. $\boldsymbol{g(-x)} = (-x)^3 + 3(-x) = -x^3 - 3x = -(x^3 + 3x) = = \boldsymbol{-g(x)}$;

Выполняется условие ***b***, значит, *g(x)* – нечётная функция

Примеры определения чётности функции

Пример 3: $h(x) = x^3 - 7$

Решение:

1. $\boldsymbol{D(f)} = R = (-\infty; +\infty)$ – *симметрична относительно начала координат;*
2. $\boldsymbol{h(-x)} = (-x)^3 - 7 = -x^3 - 7 = -(x^3 + 7);$

Условия ***a*** и ***b*** не выполняются, значит, функция *h(x)* не является ни чётной, ни нечётной, или чётностью не обладает.

Периодичность

Функция *f(x)* называется *периодичной с наименьшим положительным периодом T>0*, если для любого $x \in D(f)$ справедливо:

$$f(x+T\cdot n) = f(x), \text{ где } n \in Z.$$

Непрерывность

Функция *f(x)* называется *непрерывной в точке* x_0, если

$$f(x) \to f(x_0) \text{ при } x \to x_0.$$

Монотонность

Функция *f(x) возрастает* на отрезке *[a; b]*, если $\forall x \in [a; b]$ справедливо:

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ при } x_1 > x_2$$

(или:

бóльшее значение функции соответствует бóльшему значению аргумента);

Монотонность

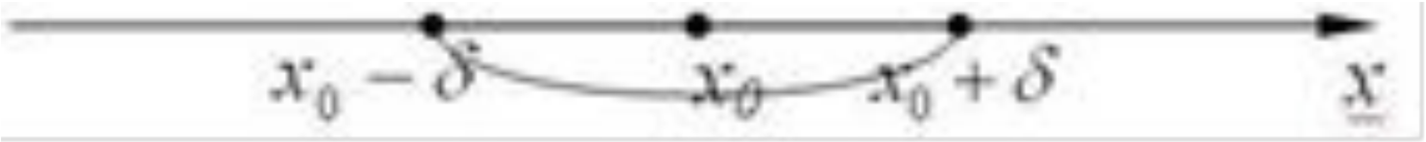
Функция *f(x) убывает* на отрезке *[a; b]*, если $\forall x \in [a; b]$ справедливо:

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ при } x_1 < x_2$$

(или:
бóльшее значение функции соответствует мéньшему значению аргумента)

δ-окрестность точки

δ-окрестностью точки x_0 называют некоторый отрезок $[x–\delta; x+\delta]$,
где δ – малое положительное число.



Точки экстремума

Точка x_0 называется *точкой* ***минимума*** *функции f(x)*, если для любого x из *δ-окрестности* точки x_0 справедливо:

$$f(x) > f(x_0);$$

Точки экстремума

Точка x_0 называется *точкой* ***максимума*** *функции* $f(x)$, если для любого x из *δ-окрестности* точки x_0 справедливо:

$$f(x)<f(x_0).$$

Экстремумы функции

Значение функции *f(x)* в *точке минимума*, называется *минимумом функции*;

Значение функции *f(x)* в *точке максимума*, называется *максимумом функции*.

Наибольшее значение функции на данном отрезке

Значение функции $f(x_0)$ в *точке* $x_0 \in [a; b]$ называется ***наибольшим значением функции*** $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, если для любого $x \in [a; b]$ справедливо:

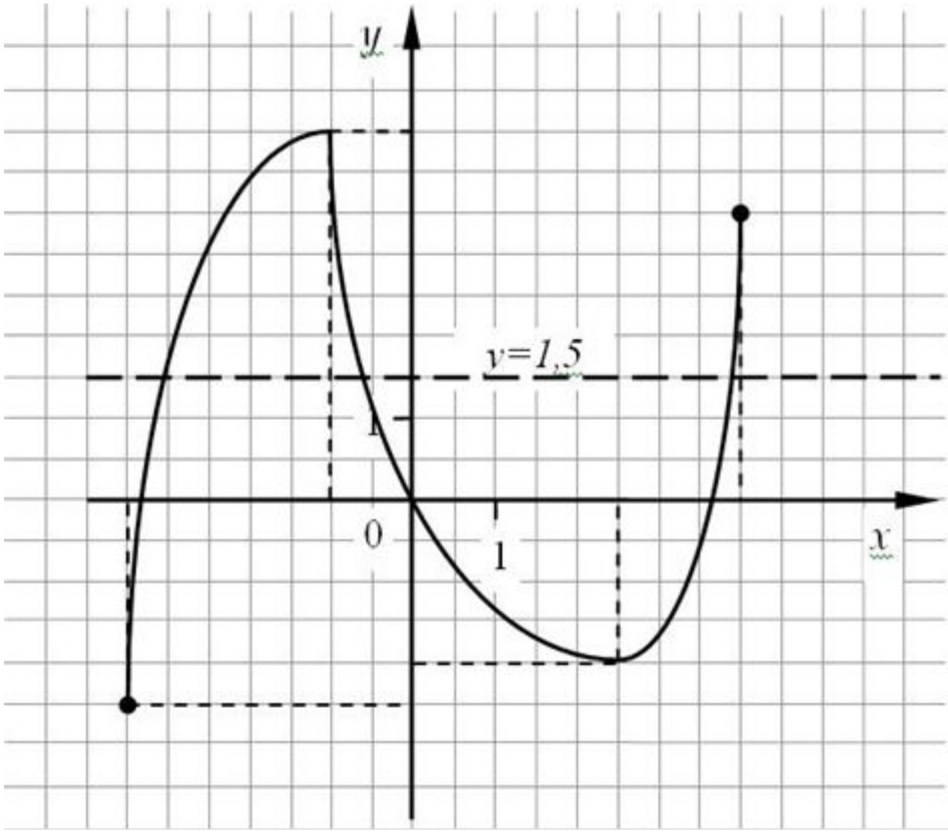
$$f(x) < f(x_0);$$

Наименьшее значение функции на данном отрезке

Значение функции $f(x_0)$ в *точке* $x_0 \in [a; b]$ называется ***наименьшим значением функции*** $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, если для любого $x \in [a; b]$ справедливо:

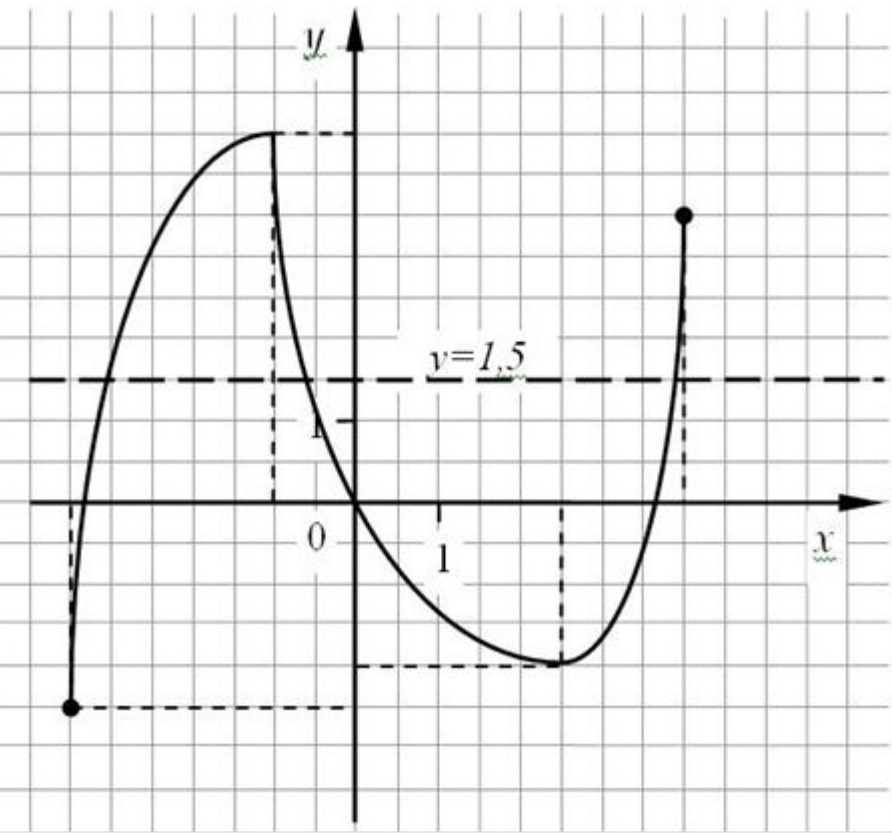
$$f(x) > f(x_0).$$

Для функции, заданной графиком, укажите:



а) область определения функции;
б) область значений функции;
в) наибольшее и наименьшее значения функции;
г) точки экстремума и значения функции в них;
д) промежутки монотонности функции;
е) нули функции;
ж) при каких значениях переменной справедливо: $f(x) > 1{,}5$?

Для функции, заданной графиком, укажите:



а) D(f) = [–3,5; 4];

б) E(f)=[–2,5; 4,5];

в) $y_{наим}$ = –2,5;

$y_{наибол}$ = 4,5;

г) x_{min} = 2,5;

x_{max} = –1;

y_{min} = –2;

y_{max} = 4,5;

д) f(x)↑ при x∈(–3,5;1)∪(2,5;4);

f(x)↓ при x∈(1;2,5);

е) f(x) = 0 при

x_1 = –3,3;

x_2 = 0;

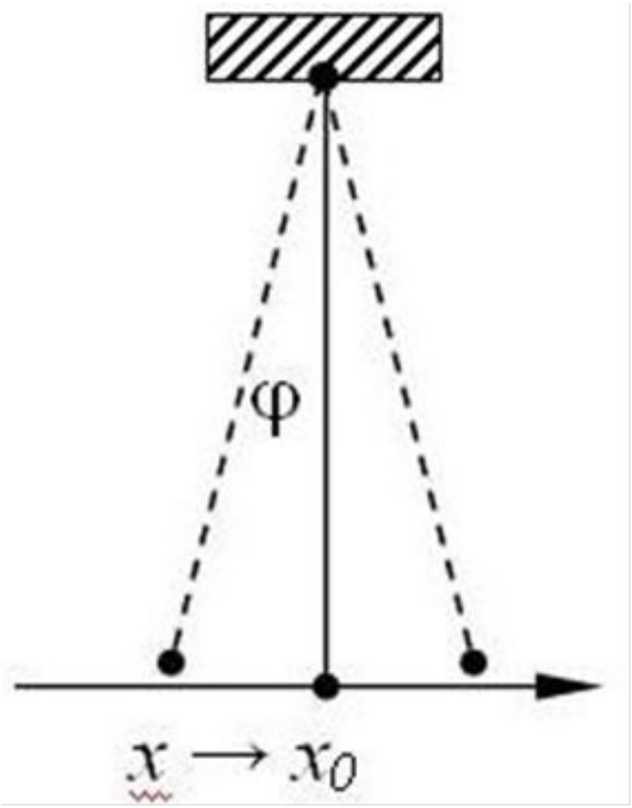
x_3 = 3,7;

ж) *f(x)* > 1,5 при x∈(–3;–0,6) ∪ (3,9;4].

Пределы,
их свойства

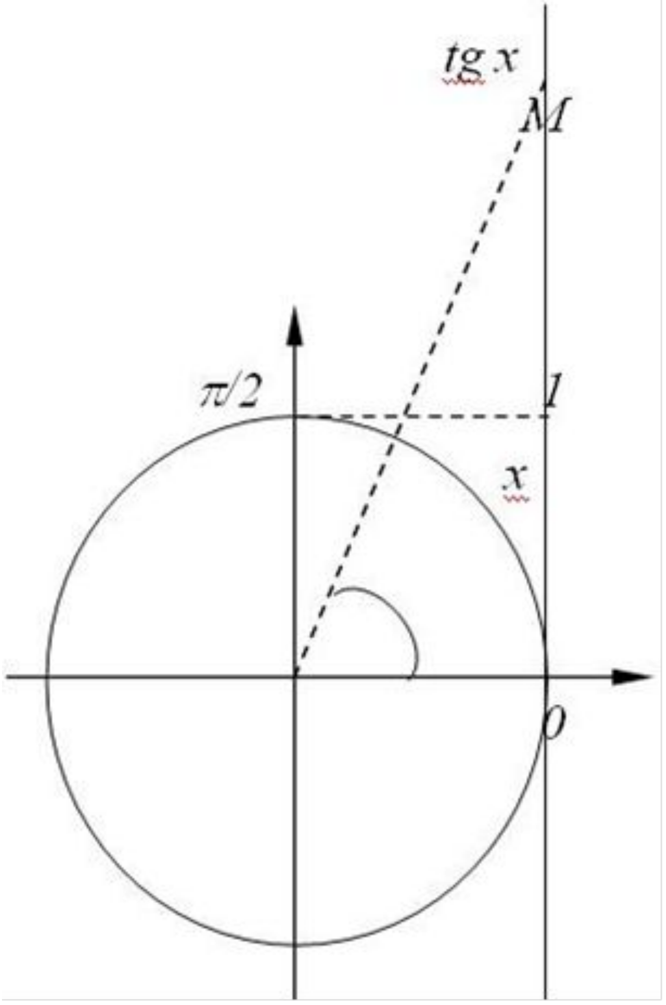
Бесконечно малая функция (БМФ)

- *Функцию y = α(x)* называют *бесконечно малой при* $x \to x_0$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x из δ-окрестности точки x_0 справедливо: $|\alpha(x)| < \varepsilon$.



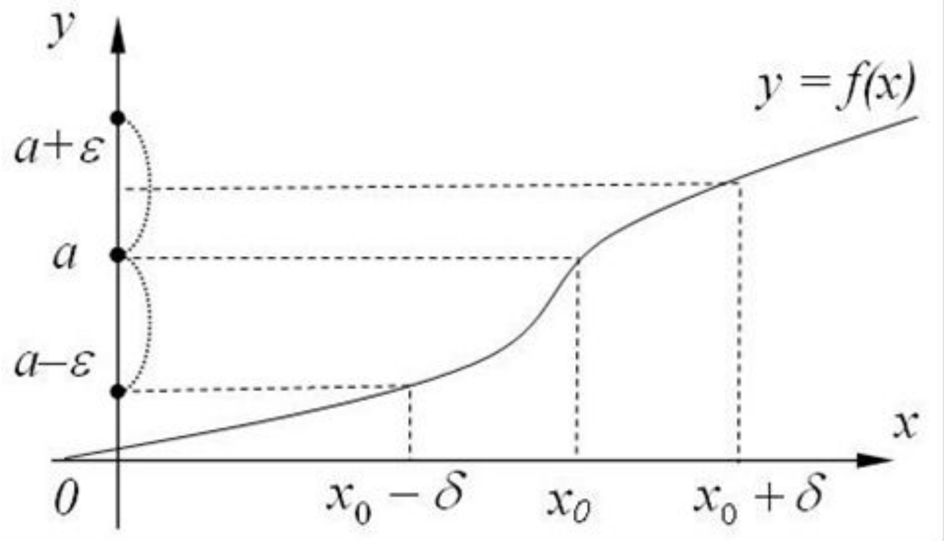
Бесконечно большая функция (ББФ)

- *Функцию y = Ф(x)* называют *бесконечно большой при* $x \to x_0$, если для любого сколь угодно большого $M > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x из δ-окрестности точки x_0 справедливо: $|\Phi(x)| > M$.



Предел функции в точке

Число a называют *пределом функции f(x) при* $x \to x_0$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для



всех x из δ-окрестности точки x_0 справедливо:

$|f(x)-a|<\varepsilon;$

пишут:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Свойства предела функции в точке

(основные теоремы о пределах)

Теорема 1

Если функция $f(x)$ ***имеет предел*** при $x \to x_0$, то ***только один***.

Теорема 2

Предел постоянной величины равен самой этой величине:

$$\lim_{x \to x_0} C = C$$

Теорема 3

Предел суммы двух функций равен сумме их пределов:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Теорема 4

Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Теорема 5

Предел отношения двух функций равен отношению их пределов, если предел делителя отличен от нуля:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0.$$

Теорема 6

Предел бесконечно малой функции равен 0:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$$

Теорема 7

Предел бесконечно большой функции равен ∞

$$\lim_{x \to x_0} \Phi(x) = \infty$$

Теорема 8

Предел отношения постоянной величины к бесконечно малой функции есть бесконечно большая величина:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{C}{\alpha(x)} = \frac{C}{0} = \infty$$

Теорема 9

Предел отношения постоянной величины к бесконечно большой функции есть бесконечно малая величина:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{C}{\Phi(x)} = \frac{C}{\infty} = 0$$

Следствие 1

Если функция *f(x)* имеет предел при $x \to x_0$, то предел этой функции в степени n равен n-ой степени предела данной функции:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right)^n$$

Следствие 2

Предел произведения постоянной величины на функцию равен произведению этой величины на предел функции:

$$\lim_{x \to x_0}(C \cdot f(x)) = C \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Следствие 3

Если функции *f(x)* и *g(x)* имеют пределы при $x \to x_0$, то

$$\lim_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right)^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$$

Замечательные пределы

Первый замечательный предел

Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, равен единице, т.е.:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

или

$$e\approx 2{,}7182818284\ldots$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e.$$

Итоги

- свойства пределов;
- замечательные пределы;
- методы вычисления пределов.