

МОНОТОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Теорема 9. (Вейерштрасса)

Всякая возрастающая числовая последовательность $\{x_n\}$ имеет предел: конечный, если она ограничена сверху, и бесконечный, если она неограничена сверху, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup \{x_n\}.$$

Аналогично, если $\{x_n\}$ — убывающая последовательность, то существует (конечный или бесконечный) предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf \{x_n\},$$

и, следовательно, этот предел конечен, если последовательность ограничена снизу, и бесконечный, если она неограничена снизу.

КРИТЕРИЙ КОШИ

Теорема 10 (Критерий Коши).

Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась к конечному пределу, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon \quad \exists N \quad \forall m, n > N \quad |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Последовательность, удовлетворяющая этому условию называется **«фундаментальной последовательностью»** или последовательностью, **«сходящейся в себе»**.

Функции

Определение. Если каждому элементу x из множества X по определённому правилу или закону f ставится в соответствие один элемент y из множества Y , то говорят, что **на множестве X задана функция f** . *Обозначение:* $f : X \rightarrow Y$ или $y = f(x)$.

Способы задания функции:

- ◆ словесный,
- ◆ аналитический,
- ◆ табличный,
- ◆ графический.

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X , а функция $z = \phi(y)$ определена на множестве Y , причём область значений функции f содержится в области определения функции ϕ . Функция $z = \phi(f(x))$ называется **сложной функцией**, или **функцией от функции**, или **суперпозицией функций** $y = f(x)$ и $z = \phi(y)$.

Обозначение: $\phi \circ f$, или $\phi(f) = \phi(f(x))$, ϕ - внешняя, f - внутренняя функция.

Основные элементарные функции

- ❖ Постоянная $y = c$, $c - \text{const}$ (константа);
- ❖ степенная функция $y = x^\alpha$, $\alpha \in R$;
- ❖ показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- ❖ логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- ❖ тригонометрические функции

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x;$$

- ❖ обратные тригонометрические функции

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \operatorname{arcctg} x.$$

Основные элементарные функции

1) степенные функции:

1. $y = x^0$:

- 1) $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;
имеет разрыв в точке $x = 0$;
- 2) $E(f) = \{1\}$;
- 3) четная: $(-x)^0 = x^0$;
- 4) постоянна на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;
- 5) ограниченная;
- 6) непериодическая;
- 7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

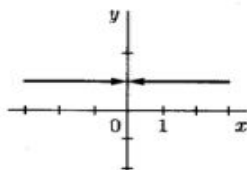


Рис. 2.1

2. $y = x$:

- 1) $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
- 2) $E(f) = (-\infty, +\infty)$;
- 3) нечетная: $(-x)^1 = -x^1$;
- 4) возрастает на $(-\infty, +\infty)$;
- 5) неограниченная;
- 6) непериодическая;
- 7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

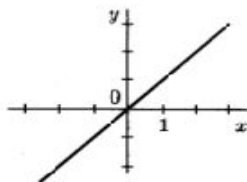


Рис. 2.2

3. $y = x^n$,

n — нечетное натуральное число ≥ 3 :

- 1) $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
- 2) $E(f) = (-\infty, +\infty)$;
- 3) нечетная: $(-x)^n = -x^n$;
- 4) возрастает на $(-\infty, +\infty)$;
- 5) неограниченная;
- 6) непериодическая;
- 7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

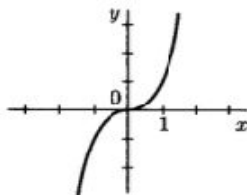


Рис. 2.3

4. $y = x^n$,

n — четное натуральное число:

- 1) $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
- 2) $E(f) = [0, +\infty)$;
- 3) четная: $(-x)^n = x^n$;
- 4) убывает на $(-\infty, 0)$,
возрастает на $[0, +\infty)$;
- 5) неограниченная;
- 6) непериодическая;
- 7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

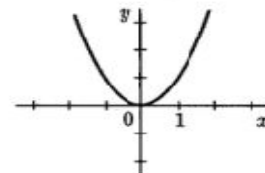


Рис. 2.4

5. $y = x^{-n}$,

n — нечетное натуральное число:

- 1) $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;
имеет разрыв в точке $x = 0$;
- 2) $E(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;
- 3) нечетная: $(-x)^{-n} = -x^{-n}$;
- 4) убывает на $(-\infty, 0)$ и на $(0, +\infty)$;
- 5) неограниченная;
- 6) непериодическая;
- 7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

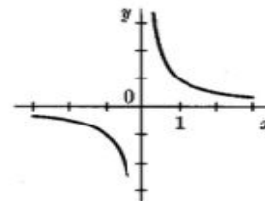


Рис. 2.5

6. $y = x^{-n}$,

n — четное натуральное число:

- 1) $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;
имеет разрыв в точке $x = 0$;
- 2) $E(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;
- 3) четная: $(-x)^{-n} = x^{-n}$;
- 4) возрастает на $(-\infty, 0)$,
убывает на $(0, +\infty)$;
- 5) неограниченная;
- 6) непериодическая;
- 7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

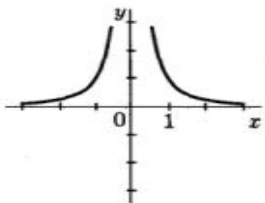


Рис. 2.6

Основные элементарные функции

7. $y = \sqrt[n]{x}$,

n — нечетное натуральное число:

- 1) $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
- 2) $E(f) = (-\infty, +\infty)$;
- 3) нечетная: $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$;
- 4) возрастает на $(-\infty, +\infty)$;
- 5) неограниченная;
- 6) непериодическая;
- 7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

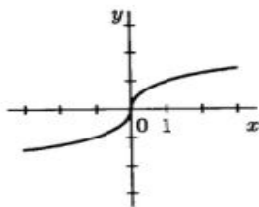


Рис. 2.7

8. $y = \sqrt[n]{x}$,

n — четное натуральное число:

- 1) $D(f) = [0, +\infty)$;
- 2) $E(f) = [0, +\infty)$;
- 3) общего вида;
- 4) возрастает на $[0, +\infty)$;
- 5) неограниченная;
- 6) непериодическая;
- 7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$. 7) непрерывна.

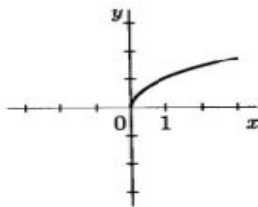


Рис. 2.8

2) показательные функции:

1. $y = a^x$, $0 < a < 1$:

- 1) $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
- 2) $E(f) = (0, +\infty)$;
- 3) общего вида;
- 4) убывает на $(-\infty, +\infty)$;
- 5) неограниченная;
- 6) непериодическая;
- 7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

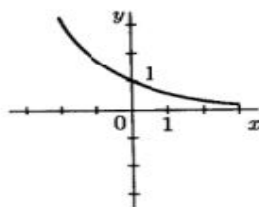


Рис. 2.9

2. $y = a^x$, $a > 1$:

- 1) $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
- 2) $E(f) = (0, +\infty)$;
- 3) общего вида;
- 4) возрастает на $(-\infty, +\infty)$;
- 5) неограниченная;
- 6) непериодическая;
- 7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

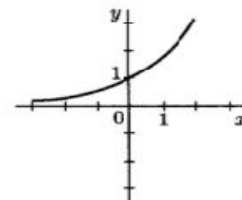


Рис. 2.10

3) логарифмические функции:

1. $y = \ln_a x$, $0 < a < 1$:

- 1) $D(f) = (0, +\infty)$;
- 2) $E(f) = (-\infty, +\infty)$;
- 3) общего вида;
- 4) убывает на $(-\infty, +\infty)$;
- 5) неограниченная;
- 6) непериодическая;
- 7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

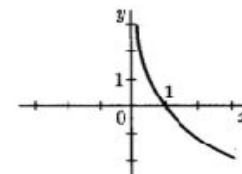


Рис. 2.11

2. $y = \log_a x$, $a > 1$:

- 1) $D(f) = (0, +\infty)$;
- 2) $E(f) = (-\infty, +\infty)$;
- 3) общего вида;
- 4) возрастает на $(-\infty, +\infty)$;
- 5) неограниченная;
- 6) непериодическая;
- 7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

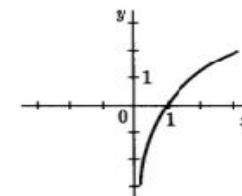


Рис. 2.12

Основные элементарные функции

4) тригонометрические функции:

1. $y = \sin x$:

- 1) $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
- 2) $E(f) = [-1, 1]$;
- 3) нечетная: $\sin(-x) = -\sin x$;
- 4) возрастает на $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n]$,
убывает на $[\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$;
- 5) ограниченная: $|\sin x| \leq 1$;
- 6) периодическая: $\sin(x + T) = \sin x$, $T = 2\pi$;
- 7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

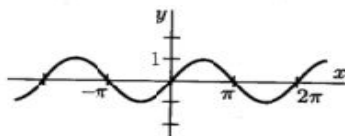


Рис. 2.13

2. $y = \cos x$:

- 1) $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
- 2) $E(f) = [-1, 1]$;
- 3) четная: $\cos(-x) = \cos x$;
- 4) возрастает на $[-\pi + 2\pi n, 2\pi n]$,
убывает на $[2\pi n, \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$;
- 5) ограниченная: $|\cos x| \leq 1$;
- 6) периодическая: $\cos(x + T) = \cos x$, $T = 2\pi$;
- 7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

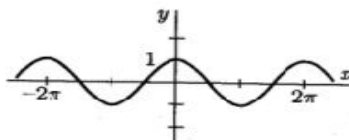


Рис. 2.14

3. $y = \operatorname{tg} x$:

- 1) $D(f) = (-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n)$, неопределена в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
- 2) $E(f) = (-\infty, +\infty)$;
- 3) нечетная: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$;
- 4) возрастает на $(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$;
- 5) неограниченная;
- 6) периодическая $\operatorname{tg}(x + T) = \operatorname{tg} x$, $T = \pi$;
- 7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

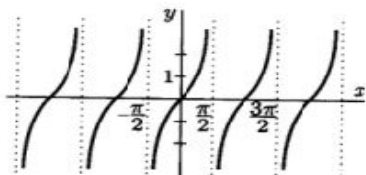


Рис. 2.15

4. $y = \operatorname{ctg} x$:

- 1) $D(f) = (\pi n, \pi + \pi n)$, неопределена в точках $x = \pi + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
- 2) $E(f) = (-\infty, +\infty)$;
- 3) нечетная: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$;
- 4) убывает на $(\pi n, \pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$;
- 5) неограниченная;
- 6) периодическая $\operatorname{ctg}(x + T) = \operatorname{ctg} x$, $T = \pi$;
- 7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

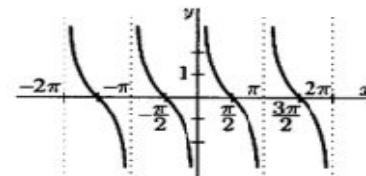


Рис. 2.16

5) обратные тригонометрические функции:

1. $y = \arcsin x$:

- 1) $D(f) = [-1, 1]$;
- 2) $E(f) = [-\pi/2, +\pi/2]$;
- 3) нечетная: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$;
- 4) возрастает на $[-1, 1]$;
- 5) ограниченная: $|\arcsin x| \leq \pi/2$;
- 6) неперіодическая;
- 7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

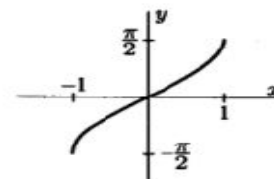


Рис. 2.17

2. $y = \arccos x$:

- 1) $D(f) = [-1, 1]$;
- 2) $E(f) = [0, \pi]$;
- 3) общего вида: $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$;
- 4) убывает на $[-1, 1]$;
- 5) ограниченная: $0 \leq \arccos x \leq \pi$;
- 6) неперіодическая;
- 7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

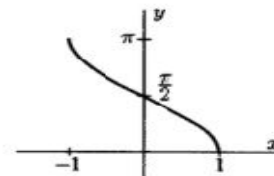


Рис. 2.18

Основные элементарные функции

3. $y = \operatorname{arctg} x$:

- 1) $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
- 2) $E(f) = (-\pi/2, \pi/2)$;
- 3) нечетная: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$;
- 4) возрастает на $(-\infty, +\infty)$;
- 5) ограниченная: $|\operatorname{arctg} x| < \pi/2$;
- 6) неперiodическая;
- 7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

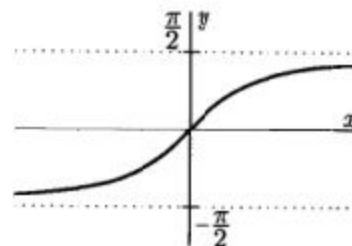


Рис. 2.19

4. $y = \operatorname{arcctg} x$:

- 1) $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
- 2) $E(f) = (0, \pi)$;
- 3) общего вида:
 $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$;
- 4) убывает на $(-\infty, +\infty)$;
- 5) ограниченная: $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$;
- 6) неперiodическая;
- 7) непрерывна в каждой точке своей области определения $D(f)$.

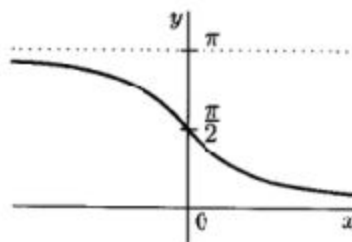


Рис. 2.20

Классификация функций

Все функции, получаемые с помощью конечного числа алгебраических действий над основными элементарными функциями, а также суперпозицией (или наложением) этих функций, составляют класс **элементарных функций**.

Функция вида

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}$$

где $a_i \in \mathbb{Q}$, называется **целой рациональной функцией** или **алгебраическим многочленом (полиномом) степени n** . Многочлен первой степени называется также **линейной функцией**.

Функция, представляющая собой отношение двух целых рациональных функций

называется **дробно-рациональной функцией**

$$y = f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

Совокупность целых рациональных и дробно-рациональной функций образует класс **рациональных функций**.

Классификация функций

Алгебраическая функция, не являющаяся рациональной функцией, называется *иррациональной функцией*.

Всякая функция, не являющаяся алгебраической, называется *трансцендентной*.

Трансцендентными в частности являются функции:

- ❖ Секанс: $y = \sec x$, где $\sec x = 1/\cos x$.
- ❖ Косеканс: $y = \operatorname{cosec} x$, где $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x$.
- ❖ Синус гиперболический: $y = \operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$.
- ❖ Косинус гиперболический: $y = \operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$.
- ❖ Тангенс гиперболический: $y = \operatorname{th} x = (e^x - e^{-x}) / (e^x + e^{-x})$.
- ❖ Котангенс гиперболический: $y = \operatorname{cth} x = (e^x + e^{-x}) / (e^x - e^{-x})$.
- ❖ Секанс гиперболический: $y = \operatorname{sch} x = 2 / (e^x + e^{-x})$.
- ❖ Косеканс гиперболический: $y = \operatorname{csch} x = 2 / (e^x - e^{-x})$.



Спасибо за внимание