

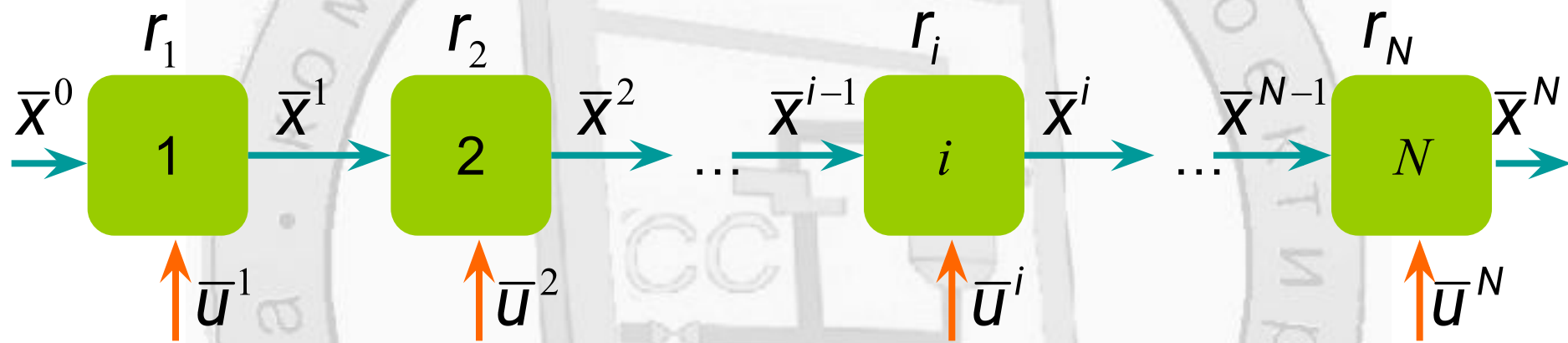
ОПТИМИЗАЦИЯ ХИМИКО- ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Модуль 4. Лекция.
Оптимизация с применением динамического
программирования (ДП)

Для решения задач оптимизации многостадийных процессов успешно применяется **метод динамического программирования - ДП**, который позволяет снять ряд трудностей, возникающих при решении многомерных задач. Основным преимуществом этого метода является возможность снизить размерность решаемой задачи. Наиболее часто метод динамического программирования используется при решении:

- задач о распределении ресурсов по стадиям процесса

Блочная схема многостадийного процесса



$$R = \sum_{i=1}^N r_i$$

Условные обозначения на схеме каскада аппаратов:

N - число стадий процесса (аппаратов)

$\bar{x}^i$ - вектор переменных состояния процесса на выходе из i -того аппарата и на входе в $i+1$ аппарат

$\bar{u}^i$ - вектор переменных управления i -том аппаратом

r_i - частный критерий оптимальности в i -том аппарате

$R = \sum_{i=1}^N r_i$ - Критерий оптимальности всего процесса – аддитивная функция

Критерий оптимальности на каждой стадии определяется её состоянием:

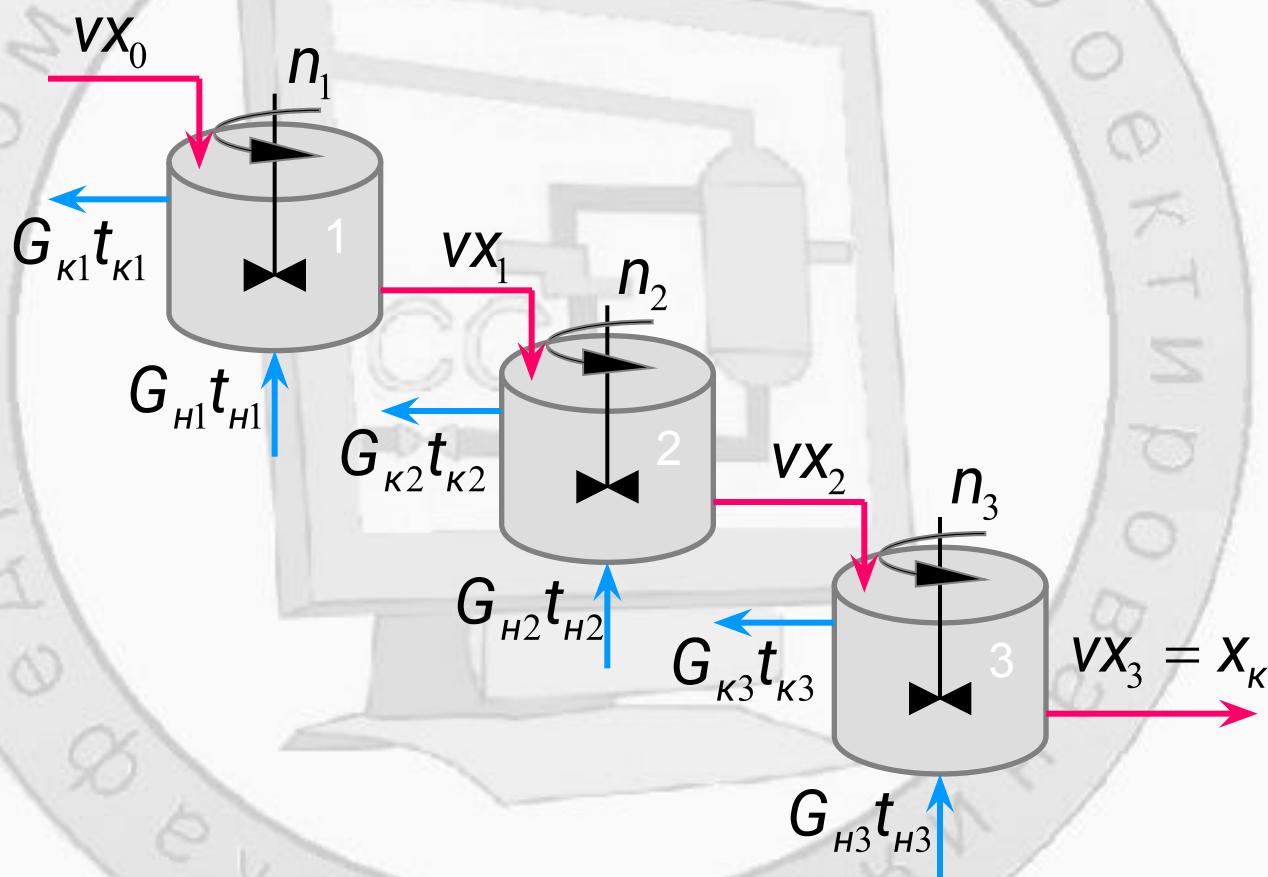
$$r_i = r_i(\bar{x}^i)$$

Уравнение математической модели для i –й стадии даёт связь между вектором входных параметров, вектором выходных параметров и вектором управлений:

$$\bar{x}^i = \bar{\phi}^i(\bar{x}^{i-1}, \bar{u}^i)$$

$$i = 1, \dots, N$$

Рассмотрим задачу:
Сырьё определённого состава поступает в каскад из трёх изотермических реакторов



По техническому регламенту для каждого реактора допускается реализация трёх стационарных состояний, определяемых набором параметров:

n – число оборотов мешалки

t_n – температура хладагента

G – расход хладагента

Каждому стационарному состоянию соответствует некоторый состав на выходе из аппарата:

$$\bar{X}_i$$

Вектор искомых управляющих переменных на каждой стадии имеет вид:

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} n \\ t_H \\ G \end{bmatrix}$$

n – число оборотов мешалки

t_H – температура хладагента

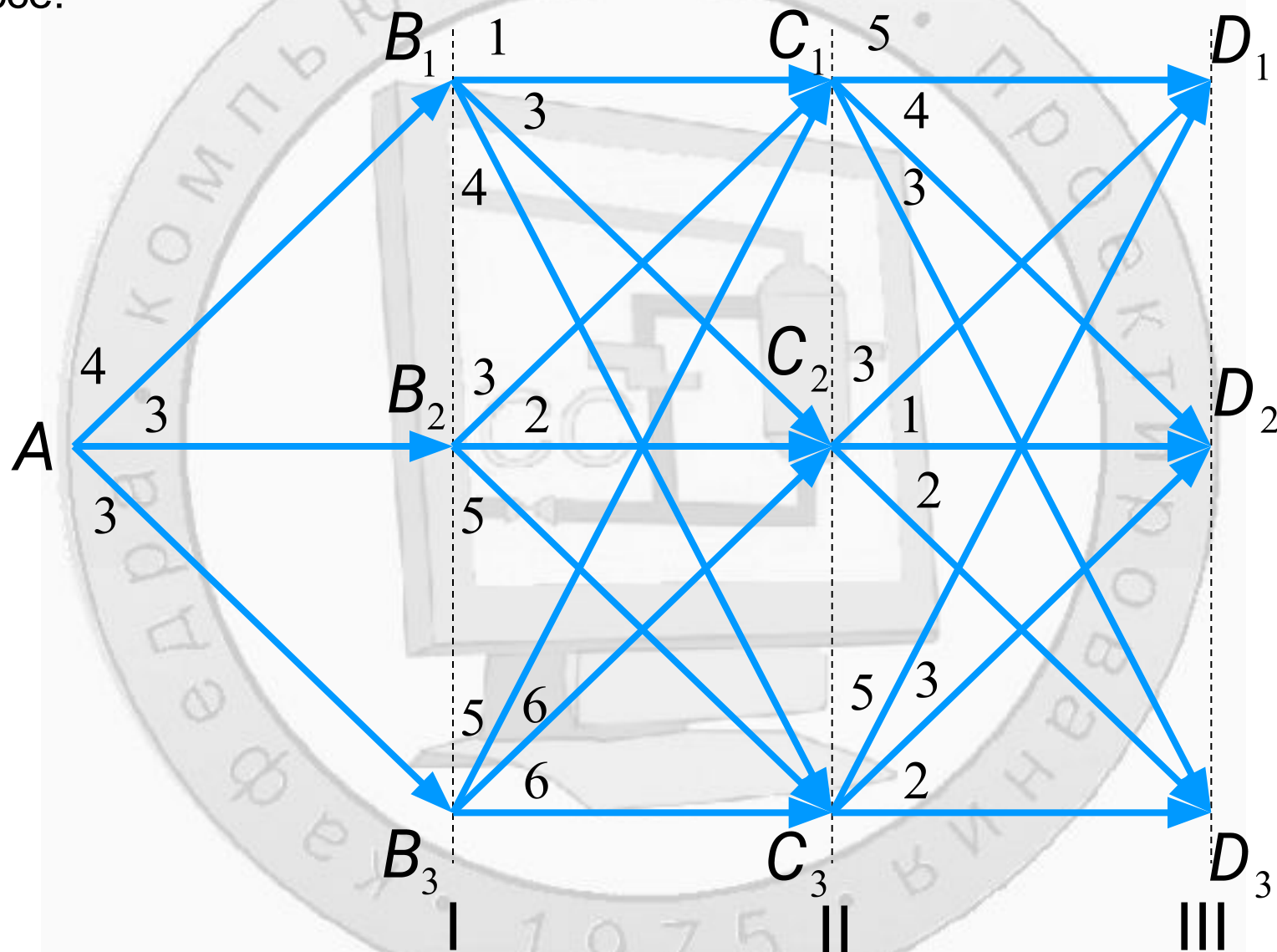
G – расход хладагента

Тогда задача оптимизации формулируется следующим образом:

$$\max R(\bar{u}^i)$$

$$\bar{u}^i \in \bar{u}^{don}$$

Схематическое изображение процесса в рассматриваемом трехстадийном процессе:



Задача оптимизации ставится следующим образом:
найти такой набор управлений на каждом из реакторов, чтобы критерий оптимальности всего процесса R достиг максимального значения. В соответствии со схемой, решение задачи оптимизации **методом перебора всех вариантов управлений, т.е. комбинаторным методом** это означает такой выбор одной или нескольких ломаных линий из всей их совокупности, чтобы выполнялось следующее равенство:

$$R = \sum_{i=1}^N r_i = \max$$

Точка A изображает начальное состояние процесса, которое характеризуется начальным составом сырья, его температурой и т.д. В результате определённого набора управлений на первом реакторе (n_1, t_{n1}, G_1) на выходе из него получается продукт с составом:

$$\bar{x}_j^1$$

$$j = 1, 2, \dots, k$$

k – соответствует числу состояний ($k=3$), реализуемых в каждом случае.

Далее переработка сырья во втором реакторе осуществляется таким образом, что на выходе из него получается следующий состав продуктов:

$$\bar{X}_1^2, \bar{X}_2^2, \bar{X}_3^2$$

Эти состояния изображаются точками C_1 , C_2 и C_3 . Линии, соединяющие точки B_i и C_j , соответствуют тем наборам управлений на втором реакторе, которые используются при переводе системы из состояния B_i в состояние C_j .

Аналогично для третьего реактора точки D_1 , D_2 и D_3 соответствуют трём возможным стационарным состояниям на третьем реакторе, т.е. составам:

$$\bar{X}_1^3, \bar{X}_2^3, \bar{X}_3^3$$

Линии, соединяющие точки C_i и D_j , соответствуют тем наборам управлений на третьем реакторе, которые используются при переводе системы из состояния C_i в состояние D_j .

Далее предположим, что реализация любого управления на любом реакторе связана с некоторым значением критерия оптимальности в этом реакторе. На схеме цифрами проставлены условные значения критерия оптимальности на каждой стадии в зависимости от применяемого набора управлений. При этом будем считать, что критерий оптимальности всего процесса может быть выражен в виде:

$$R = \sum_{i=1}^N r_i$$

r_i — значение критерия оптимальности в i -ом реакторе

Проще всего эта задача может быть **решена обычным перебором (1-ый способ решения)**, т.е. сравнением между собой всех возможных вариантов проведения процесса. Необходимо определить значение R для всех ломаных (здесь 27) схемы процесса:

$$AB_1C_1D_1 = 4 + 1 + 5 = 10$$

$$AB_1C_1D_2 = 4 + 1 + 4 = 9$$

$$AB_1C_1D_3 = 4 + 1 + 3 = 8$$

$$AB_1C_2D_1 = 4 + 3 + 3 = 10$$

$$AB_1C_2D_2 = 4 + 3 + 1 = 8$$

$$AB_1C_2D_3 = 4 + 3 + 2 = 9$$

и т.д. – до – 27 – строк

Из всех полученных значений R выбирается максимальный и, следовательно, выбирается реализующий его набор управлений.

Однако этот путь решения имеет существенный недостаток - требуется производить анализ всех возможных вариантов, число которых быстро возрастает с ростом числа стадий и числа допустимых состояний:

$$3^3 = 27$$

Для 5 стадий и 3 допустимых состояний число вариантов:

$$3^5 = 243$$

Для 10 стадий и 3 допустимых состояний число вариантов:

$$3^{10} = 59049$$

Изложенный метод решения задачи требует реализации большого количества необходимых вычислений.

Формула для количества **возможных вариантов вычислений при использовании метода перебора (1-ый способ решения)** имеет вид:

$$n = k^N$$

k – число возможных состояний на стадии

N – число стадий

В соответствии с **принципом оптимальности**, которым необходимо руководствоваться при решении таких задач, и который лежит в основе **динамического программирования (2-ой способ решения)**:

для любого промежуточного состояния процесса последующие управления должны быть оптимальными.

В соответствии с этим принципом решение задачи методом ДП включает **2 этапа**:

1- этап: начинается с выбора оптимального управления на последней стадии, затем на предпоследней и т.д., двигаясь от конца процесса к его началу. Однако значения этих управлений зависят от входных параметров на каждую стадию, включая первую стадию. Входные параметры на первую стадию либо известны, либо определяются по результатам расчетов первой стадии.

2-этап: по известным значениям входных параметров, начиная с первой стадии определяются конкретные управляющие параметры последовательно на всех стадиях процесса до последней стадии, что и является решением задачи.

Если же задача решается изложенным методом динамического программирования (2-ой способ решения), необходимое количество вычислений (n') составляет:

$$n' = k^2(N - 1) + k$$

При $k = 3$ и $N = 3$ $n' = 21$, в то время как в 1-ом способе - $n = 27$

При $k = 3$ и $N = 10$ $n' = 93$, в то время, как в 1-м - $n = 59049$.

При $k = 3$ и $N = 5$ $n' = 39$, в то время, как в 1-м - $n = 243$.

Динамическое программирование

Большинство процессов химической технологии относится к классу дискретно распределённых во времени и пространстве процессов.

Пусть имеется каскад химических реакторов идеального перемешивания, в котором проводится необратимая реакция **первого** или **второго** порядка:



Допустим, что задана конечная концентрация реагента A :

$$x_{AN} = x_N$$

Число реакторов в каскаде N . Требуется выбрать объёмы реакторов так, чтобы **суммарный объём всех реакторов был минимальным.**

Критерий оптимальности

$$R = \sum_{i=1}^N v_i$$

является функцией многих переменных, и решение задачи методом неопределённых множителей Лагранжа становится затруднительным.

Формулировка принципа оптимальности Белмана

Оптимальная стратегия обладает таким свойством, что каково бы ни было начальное состояние и начальное решение, последующие решения должны приниматься, исходя из оптимальной стратегии относительно состояния, получаемого в результате первого решения

Общая схема решения задач методом динамического программирования

При подходе к решению задач оптимизации методом динамического программирования необходимо обращать внимание на следующее:

- а) оптимизируемый процесс должен быть дискретно-распределённым во времени или пространстве (многостадийный процесс);
- б) отдельные стадии процесса должны обладать относительной независимостью, т.е. вектор выходных параметров любой стадии должен зависеть только от вектора входных параметров на эту стадию и управлений на ней;
- с) критерий оптимальности всего процесса должен быть сформулирован как аддитивная функция критериев оптимальности каждой стадии;

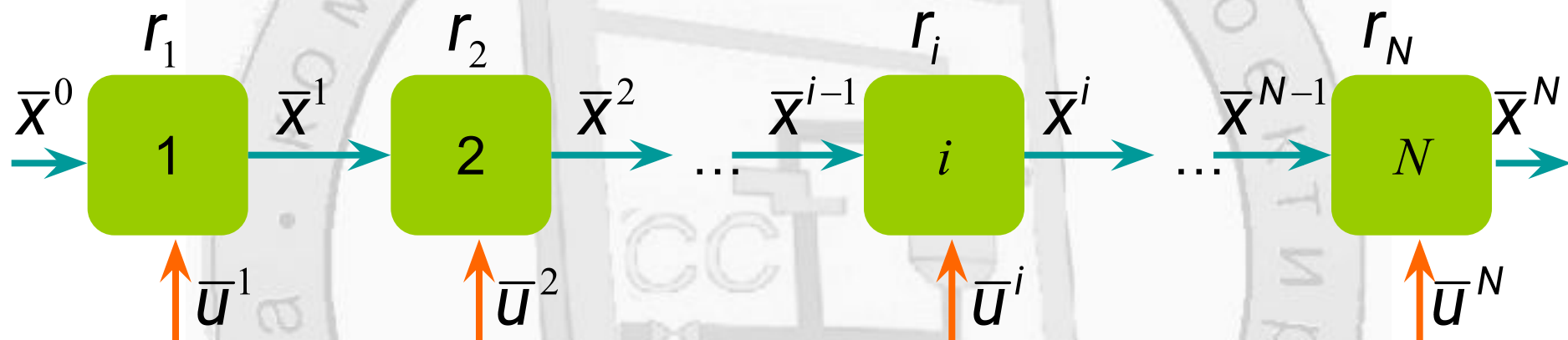
При выполнении перечисленных условий необходимо правильно формулировать задачу оптимизации. При формулировке должны быть выявлены:

- параметры, характеризующие состояние каждой стадии;
- управляющие параметры на каждой стадии;
- ограничения, которые накладываются на параметры состояния процесса и управляющие параметры.

Необходимо составить:

1. математическое описание для каждой стадии;
2. критерий оптимальности.

Математическая формулировка принципа оптимальности



$$R = \sum_{i=1}^N r_i$$

Критерий оптимальности на каждой стадии определяется её состоянием:

$$r_i = r_i(\bar{x}^i)$$

Уравнение математической модели для i –й стадии даёт связь между вектором входных параметров, вектором выходных параметров и вектором управлений:

$$\bar{x}^i = \bar{\phi}^i(\bar{x}^{i-1}, \bar{u}^i)$$

$$i = 1, \dots, N$$

Первый этап решения

Решение задачи начинается с последней стадии, где необходимо выбрать оптимальное управление – так, чтобы критерий оптимальности r_N был экстремальным (например, максимальным):

$$f_1 = \min_{\bar{u}^N \in \bar{U}} r_N(\bar{x}^N)$$

$$\bar{x}^N = \bar{\phi}^N(\bar{x}^{N-1}, \bar{u}^N)$$

Используя уравнение математической модели для данной стадии, получим:

$$f_1(\bar{x}^{N-1}) = \min_{\bar{u}^N \in \bar{U}} r_N[\varphi^N(\bar{x}^{N-1}, \bar{u}^N)]$$

откуда определяется оптимальное управление $\bar{u}_{opt}^N$ которое зависит от выходных переменных предыдущей стадии $\bar{x}^{N-1}$

$$\bar{u}_{opt}^N = \bar{u}^N(\bar{x}^{N-1})$$

Переходя к стадии $N-1$, получим условие выбора оптимального уравнения:

$$f_2 = \min_{\bar{u}^{N-1} \in \bar{U}} \{r_{N-1}(\bar{x}^{N-1}) + f_1(\bar{x}^{N-1})\}$$

где математическая модель предыдущей стадии имеет вид:

$$\bar{x}^{N-1} = \phi^{N-1}(\bar{x}^{N-2}, \bar{u}^{N-1})$$

с зависимостями для управляющих переменных следующего вида:

$$\bar{u}_{opt}^{N-1} = \bar{u}^{N-1}(\bar{x}^{N-2})$$

Поскольку f_1 уже выбрано, определение f_2 даёт возможность выбора оптимального управления на стадии $N-1$. Подставляя уравнение математической модели для данной стадии, получим:

$$f_2(\bar{x}^{N-2}) = \min_{\bar{u}^{N-1} \in \bar{U}} \{r_{N-1}[\bar{\varphi}^{N-1}(\bar{x}^{N-2}, \bar{u}^{N-1})] + f_1[\bar{\varphi}^{N-1}(\bar{x}^{N-2}, \bar{u}^{N-1})]\}$$

откуда определяется оптимальное управление $\bar{u}_{opt}^{N-1}$

Проводя аналогичный анализ, **для стадии i** можно записать:

$$f_{N-(i-1)}(\bar{x}^{i-1}) = \min_{\bar{u}^i \in \bar{U}} [r_i(\bar{x}^i) + f_{N-i}(\bar{x}^i)]$$
$$\bar{x}^i = \bar{\phi}^i(\bar{x}^{i-1}, \bar{u}^i)$$
$$\bar{u}_{opt}^i = \bar{u}^i(\bar{x}^{i-1})$$

С учётом φ_i получим математическую формулировку принципа оптимальности, являющуюся рекуррентной формулой, позволяющей выполнять решение задачи оптимизации последовательно:

$$f_{N-(i-1)}(\bar{x}^{i-1}) = \min_{\bar{u}^i \in \bar{U}} \{r_i[\varphi_i(\bar{x}^{i-1}, \bar{u}^i)] + f_{N-i}[\varphi_i(\bar{x}^{i-1}, \bar{u}^i)]\}$$

где $f_{N-(i-1)}$ – значение суммы критериев оптимальности последних $N - i$ стадий.

откуда определяется оптимальное управление $\bar{u}_{opt}^i$

Для первой стадии имеем:

$$f_N(\bar{x}^0) = \min_{\bar{u}^1 \in U} \{r_1[\bar{\phi}^1(\bar{x}^0, \bar{u}^1)] + f_{N-1}[\bar{\phi}^1(\bar{x}^0, \bar{u}^1)]\}$$

откуда определяется оптимальное управление (А) или наряду с оптимальным управлением и оптимальные входные переменные (В) :

А) $\bar{u}_{opt}^1$

или

В) $\bar{u}_{opt}^1, \bar{x}^0$ - более сложная задача (большей размерности)

На этом завершается **1-этап** решения задачи ДП.

Второй этап решения

Для реализации **2-этапа** на основе знания $\bar{u}_{opt}^1$ и по соотношениям, приведенным ниже, последовательно определяются $\bar{x}^i$ ($i=1, \dots, N$) и $\bar{u}_{opt}^i$ ($i=2, \dots, N$):

$$\bar{u}_{opt}^1 = \bar{u}_{opt}^1(\bar{x}^0)$$

$$\bar{x}^1 = \bar{\phi}^i(\bar{x}^0, \bar{u}_{opt}^1)$$

Произвольная стадия каскада

$$\overline{u}_{opt}^i = \overline{u}_{opt}^i(\overline{x}^{i-1})$$

$$\overline{x}^i = \phi^i(\overline{x}^{i-1}, \overline{u}_{opt}^i)$$

$$i = 1, \dots, N$$

Пример 1.

Пусть имеется каскад химических реакторов идеального перемешивания, в котором проводится необратимая реакция **первого порядка**:



Задана конечная концентрация A :

$$x_N$$

Число реакторов в каскаде N .

Задача оптимизации: **выбрать объёмы реакторов так, чтобы суммарный объём всех реакторов был минимальным.**

Нетрудно видеть, что в поставленной задаче оптимизации выполнены условия а, б и с: оптимизируемый процесс является дискретно-распределённым в пространстве; отдельные стадии процесса обладают относительной независимостью (выход каждого реактора зависит только от входящих переменных и управлений на нём) и критерий оптимальности всего процесса является аддитивной функцией частных критериев (критерий оптимальности - объём каскада реакторов, частные критерии - объёмы каждого аппарата).

Запишем сведения о процессе, необходимые для решения задачи оптимизации:

1. Параметрами, характеризующими состояние каждой стадии являются концентрации продукта реакции или исходного реагента - x_i .
2. Управляющие параметры - объёмы каждого реактора или, что то же самое, время пребывания смеси в каждом реакторе U_i (при постоянной нагрузке).
3. На параметры состояния процесса на каждой стадии наложены ограничения:

$$x_0 \geq x_i \geq x_K$$

на параметры управления процесса на каждой стадии наложены ограничения:

$$V_i > 0$$

или

$$\tau_i > 0$$

Составляем математическое описание каждой i -ой стадии (уравнение материального баланса):

$$v(x_{i-1} - x_i) - V_i k x_i = 0$$

или

$$x_{i-1} - x_i - k\tau_i x_i = 0$$

Откуда имеем:

$$x_i = \frac{x_{i-1}}{1 + k\tau_i}$$

Составляем критерий оптимальности (Слайд 67) :

$$R = V = \sum_{i=1}^N V_i$$

или

$$R^* = \tau = \sum_{i=1}^N \tau_i$$

Пример 1.

ПЕРВЫЙ ЭТАП РЕШЕНИЯ

решения выглядит следующим образом:

$$f_1 = \min_{x_N} \left[\frac{1}{k} \left(\frac{x_{N-1}}{x_N} - 1 \right) \right]$$

где

$$r_N = \tau_N = \frac{1}{k} \left(\frac{x_{N-1}}{x_N} - 1 \right)$$

Концентрация реагента A на выходе из реактора N однозначно определяет время пребывания в нём, поэтому именно её можно взять в качестве управляющего параметра.

Тогда задача оптимизации на последней стадии состоит в выборе такой концентрации на выходе из N –го аппарата, при которой время пребывания в N –ом аппарате было бы минимальным.

Однако в рассматриваемой задаче конечная **концентрация x_N задана**, поэтому задача какого-либо выбора исключается и остаётся только рассчитать время пребывания при заданном значении x_N :

$$f_1(x_{N-1}) = \frac{1}{k} \left(\frac{x_{N-1}}{x_N} - 1 \right)$$

В соответствии с общей схемой переходим к предпоследнему реактору:

$$f_2 = \min_{x_{N-1}} \left\{ \frac{1}{k} \left[\left(\frac{x_{N-2}}{x_{N-1}} - 1 \right) + \left(\frac{x_{N-1}}{x_N} - 1 \right) \right] \right\}$$

Если вид выражения критерия не сложен, а названное управление - это единственный управляющий параметр, то для определения экстремума r_N^* на стадии можно пользоваться **теоремами математического анализа**.

Если же выражение критерия сложно, а управление есть совокупность нескольких управляющих воздействий, то решение с использованием классического дифференциального анализа или невозможно, или представляет значительные трудности. Поэтому следует применять **методы нелинейного программирования**.

В предпоследнем реакторе необходимо выбрать такое значение x_{N-1} , чтобы выражение в скобках имело минимум при любых значениях x_{N-2} . Это значение x_{N-1} можно найти, воспользовавшись необходимым условием существования экстремума функции одной переменной:

$$\frac{d}{dx_{N-1}} \left\{ \frac{1}{k} \left[\left(\frac{x_{N-2}}{x_{N-1}} - 1 \right) + \left(\frac{x_{N-1}}{x_N} - 1 \right) \right] \right\} =$$
$$= \frac{1}{k} \left(-\frac{x_{N-2}}{x_{N-1}^2} + \frac{1}{x_N} \right) = 0$$

Из последнего выражения следует:

$$x_{N-1(opt)} = (x_N \cdot x_{N-2})^{1/2}$$

Поскольку функция f_2 дифференцируемая, легко проверить достаточное условие существования экстремума:

$$\frac{d^2}{dx_{N-1}^2} \left\{ \frac{1}{k} \left[\left(\frac{x_{N-2}}{x_{N-1}} - 1 \right) + \left(\frac{x_{N-1}}{x_N} - 1 \right) \right] \right\} =$$
$$= \frac{1}{k} \left(\frac{2x_{N-2}}{x_{N-1}^3} \right) > 0$$

во всём диапазоне изменения x_{N-1} , следовательно

в точке x_{N-1}

Следовательно:

$$x_{N-1(opt)} = (x_N \cdot x_{N-2})^{1/2}$$

функция f_2 принимает минимальное значение.

Чтобы получить минимальное значение времени пребывания в двух последних реакторах, запишем рекуррентное соотношение:

$$f_2(x_{N-2}) = \frac{2}{k} \left[\left(\frac{x_{N-2}}{x_N} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]$$

Повторим рассмотренную процедуру для третьего от конца реактора. Запишем для него рекуррентное соотношение:

$$f_3 = \min_{x_{N-2}} \left\{ \frac{1}{k} \left[\left(\frac{x_{N-3}}{x_{N-2}} - 1 \right) \right] + \frac{2}{k} \left[\left(\frac{x_{N-2}}{x_N} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \right\}$$

Найдём минимум, воспользовавшись необходимым условием существования экстремума функции одной переменной:

$$\frac{d\{\text{выражение}\}}{dx_{N-2}} = \left\{ \frac{1}{k} \left[-\frac{x_{N-3}}{x_{N-2}^2} \right] + \frac{2}{k} * \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_N * x_{N-2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} = 0$$

Откуда получаем:

$$x_{N-2(opt)} = (x_N \cdot x_{N-3}^2)^{\frac{1}{3}}$$

Проверим достаточное условие:

$$\frac{d}{dx_{N-2}} \left\{ \frac{1}{k} \left[\left(-\frac{x_{N-3}}{x_{N-2}^2} \right) + \frac{1}{k} \left(\frac{1}{x_N * x_{N-2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{k} \left(\frac{2x_{N-3}}{x_{N-2}^3} - \frac{1}{2} \frac{1}{x_N^{1/2} x_{N-2}^{3/2}} \right)$$

Подставив в последнее выражение полученное значение оптимальной концентрации, имеем:

$$\frac{1}{k} \left(\frac{2x_{N-3}}{[(x_{N-3}^2 x_N)^{1/3}]^3} - \frac{1}{2} \frac{1}{x_N^{1/2} [(x_{N-3}^2 x_N)^{1/3}]^{3/2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{k} \left\{ \frac{2}{x_{N-3} x_N} - \frac{1}{2 x_{N-3} x_N} \right\} > 0$$

т.е. при оптимальном значении концентрации действительно достигается минимум.

Подставив значение оптимальной концентрации в рекуррентное соотношение, получим:

$$f_3(x_{N-3}) = \left\{ \frac{1}{k} \left[\frac{x_{N-3}}{(x_{N-3}^2 x_N)^{1/3}} - 1 \right] + \frac{2}{k} \left[\frac{[(x_{N-3}^2 x_N)^{1/2}]^{1/2}}{x_N^{1/2}} - 1 \right] \right\}$$

или после преобразований:

$$f_3(x_{N-3}) = \frac{3}{k} \left[\left(\frac{x_{N-3}}{x_N} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right]$$

Решение задачи выполняется таким же образом последовательно для всех реакторов до первого включительно.

Для произвольного реактора i , считая от конца процесса, получим аналогичные выражения оптимальной концентрации:

$$x_{N-(i-1)(opt)} = \left(x_N \cdot x_{N-i}^{i-1} \right)^{\frac{1}{i}}$$

и рекуррентного соотношения:

$$f_i(x_{N-i}) = \frac{i}{k} \left[\left(\frac{x_{N-i}}{x_N} \right)^{\frac{1}{i}} - 1 \right]$$

Для первого реактора:

$$x_{1(opt)} = (x_N \cdot x_0^{N-1})^{\frac{1}{N}}$$

$$f_N(x_0) = \frac{N}{k} \left[\left(\frac{x_0}{x_N} \right)^{\frac{1}{N}} - 1 \right]$$

Поскольку в условии задачи x_0 и x_N заданы, k и N неизвестны, из последнего выражения рассчитывается минимальное значение критерия оптимальности:

$$R^* = \sum_{i=1}^N \tau_i = f_N(x_0)$$

и для первого реактора:

$$x_{1(opt)} = (x_N \cdot x_0^{N-1})^{\frac{1}{N}}$$

ВТОРОЙ ЭТАП РЕШЕНИЯ

На **втором этапе** решения из полученных соотношений определяются:

$$\tau_{1(opt)} = \frac{1}{k} \frac{x_0 - x_{1(opt)}}{x_{1(opt)}}$$

Для второго реактора имеем:

$$x_{2(opt)} = \left(x_N \cdot x_{1(opt)}^{N-2} \right)^{\frac{1}{N-1}}$$

Далее определяется:

$$\tau_{2(opt)} = \frac{1}{k} \frac{x_{1(opt)} - x_{2(opt)}}{x_{2(opt)}}$$

и т.д. до тех пор, пока не будут получены значения всех оптимальных управлений.

Далее определяется:

$$\tau_{N_{(opt)}} = \frac{1}{k} \frac{x_{N-1_{(opt)}} - x_{N_{(зад)}}}{x_{N_{(зад)}}}$$

и т.д. до тех пор, пока не будут получены значения всех оптимальных управлений.

Пример 2

В каскаде реакторов идеального перемешивания проводится простая реакция **2-го порядка** : $A \rightarrow P$. Каждый из аппаратов каскада работает в изотермических условиях, причём температура реакционной массы во всех аппаратах одинакова.

Требуется определить среднее время пребывания реакционной массы в каждом из аппаратов с тем, чтобы общее время пребывания реакционной массы в системе было минимальным.

Исходные данные:

Число аппаратов $N = 3$

Начальная концентрация компонента A $x_0 = 1$ моль/литр

Конечная концентрация компонента A на выходе из каскада $x_3 = 0,2$ моль/литр

Константа скорости реакции:

$$k = 1 \frac{\text{литр}}{\text{моль час}}$$

Решение

Критерий оптимальности процесса по условию задачи есть:

$$R = T = \sum_{i=1}^N \tau_i$$

τ_i - среднее время пребывания в i – ом аппарате.

Из уравнения материального баланса для i – го реактора имеем:

$$\tau_i = \frac{x_{i-1} - x_i}{k \cdot x_i^2}$$

Первый этап решения

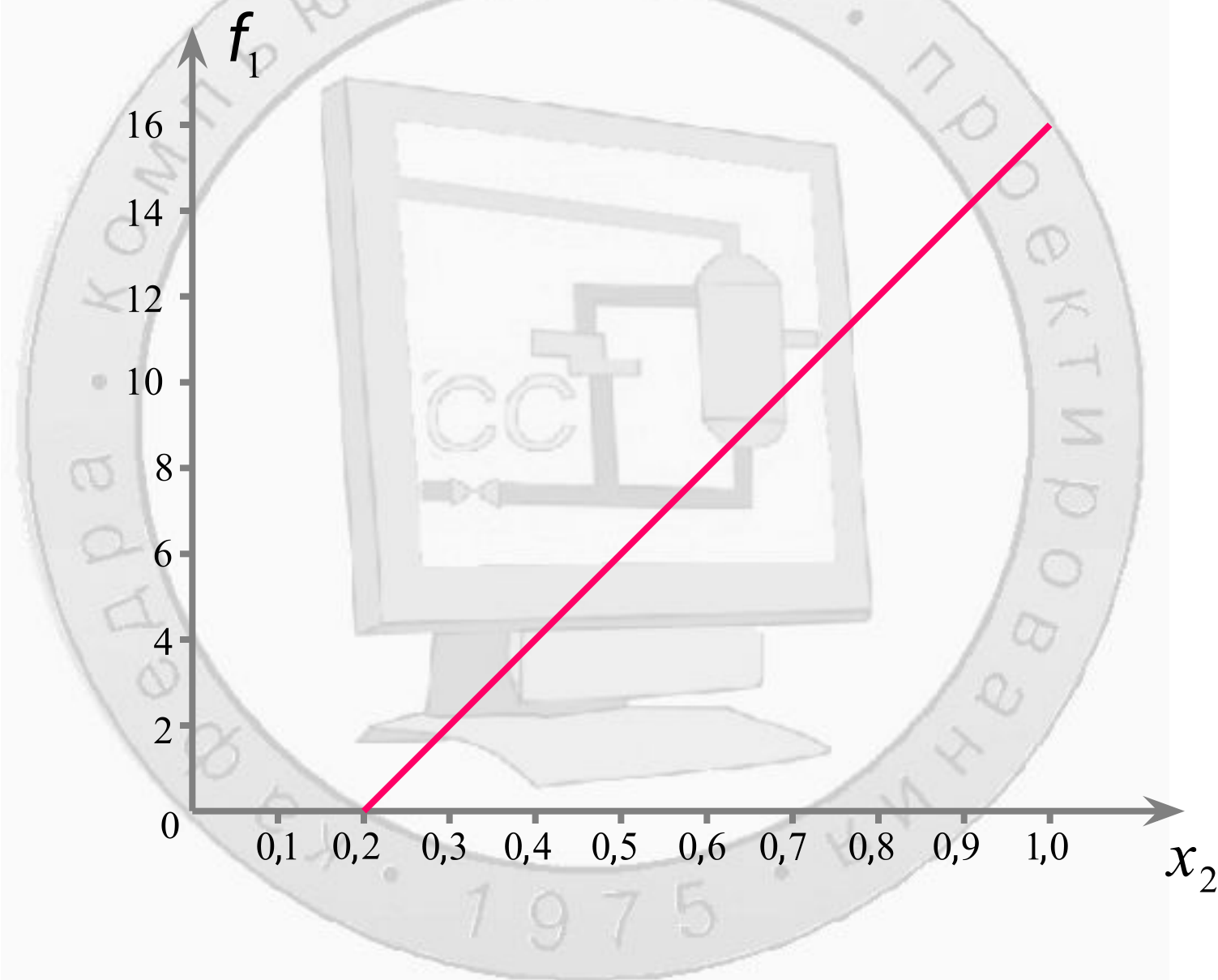
Записываем рекуррентное соотношение:

$$f_1(x_2) = \min_{x_3 \in x} \frac{x_2 - x_3}{k \cdot x_3^2}$$

Поскольку x_3 задано,

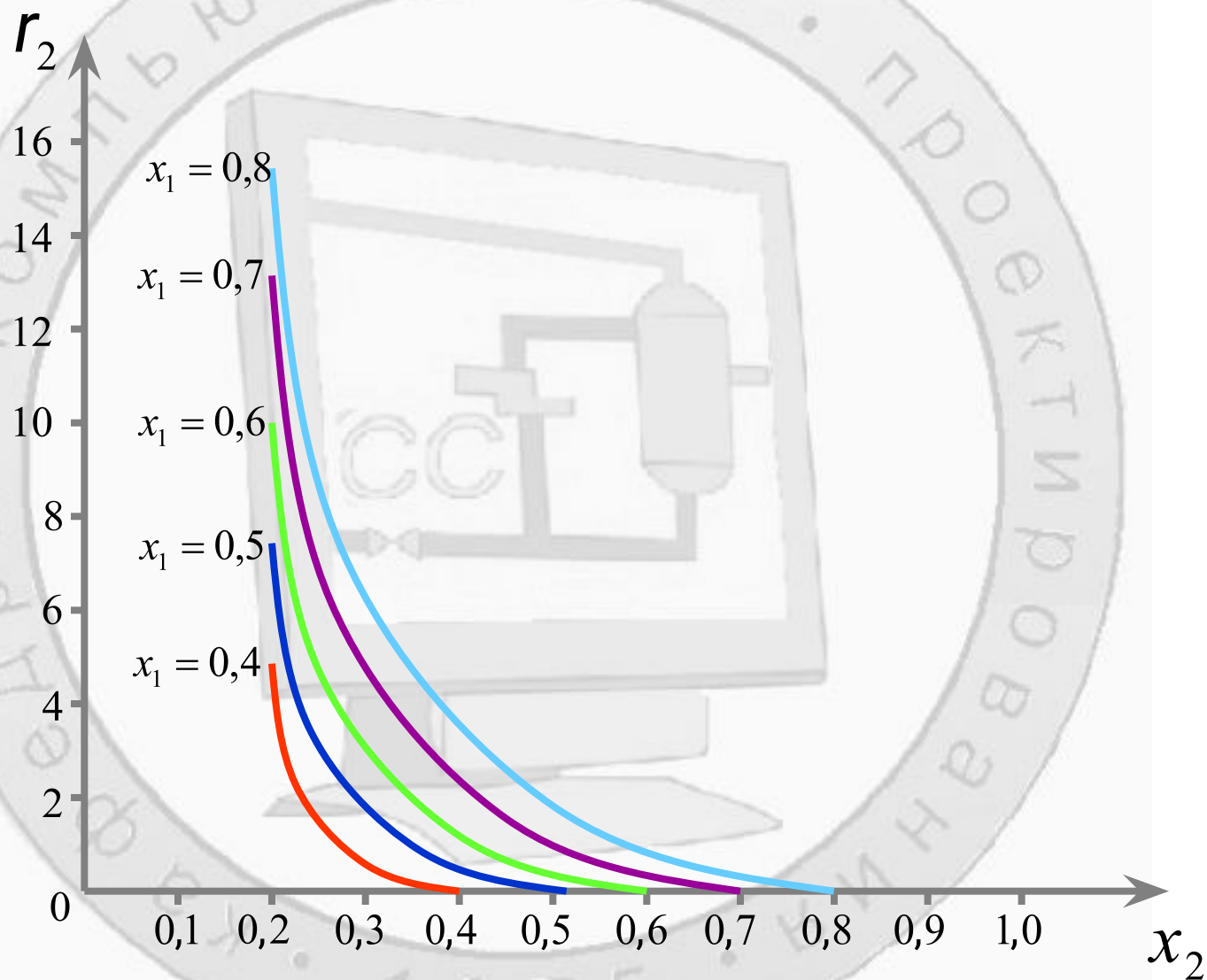
$$f_1(x_2) = \frac{x_2 - x_3}{k \cdot x_3^2} =$$
$$= 25x_2 - 5$$

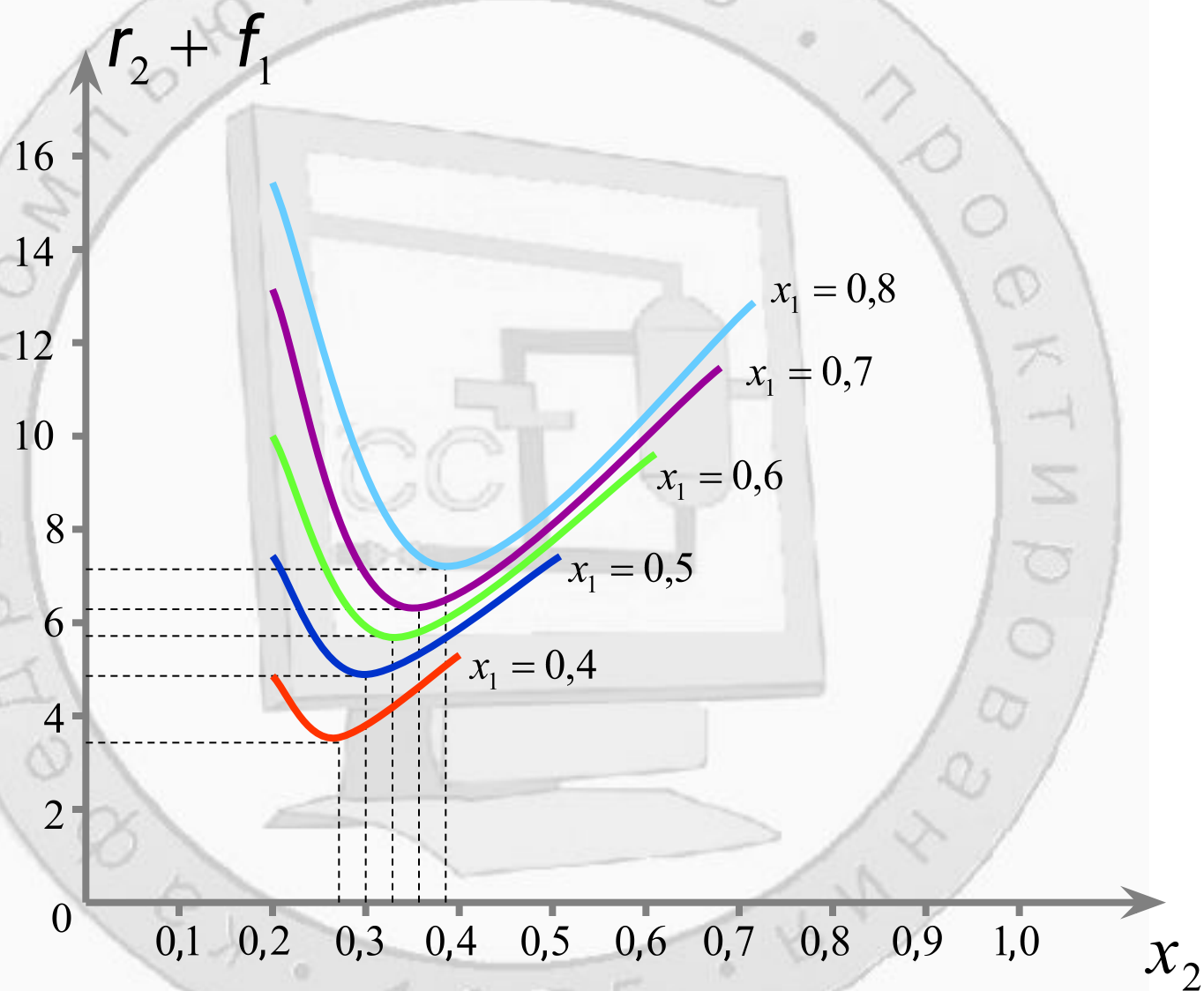
Функциональное уравнение будем решать графически:

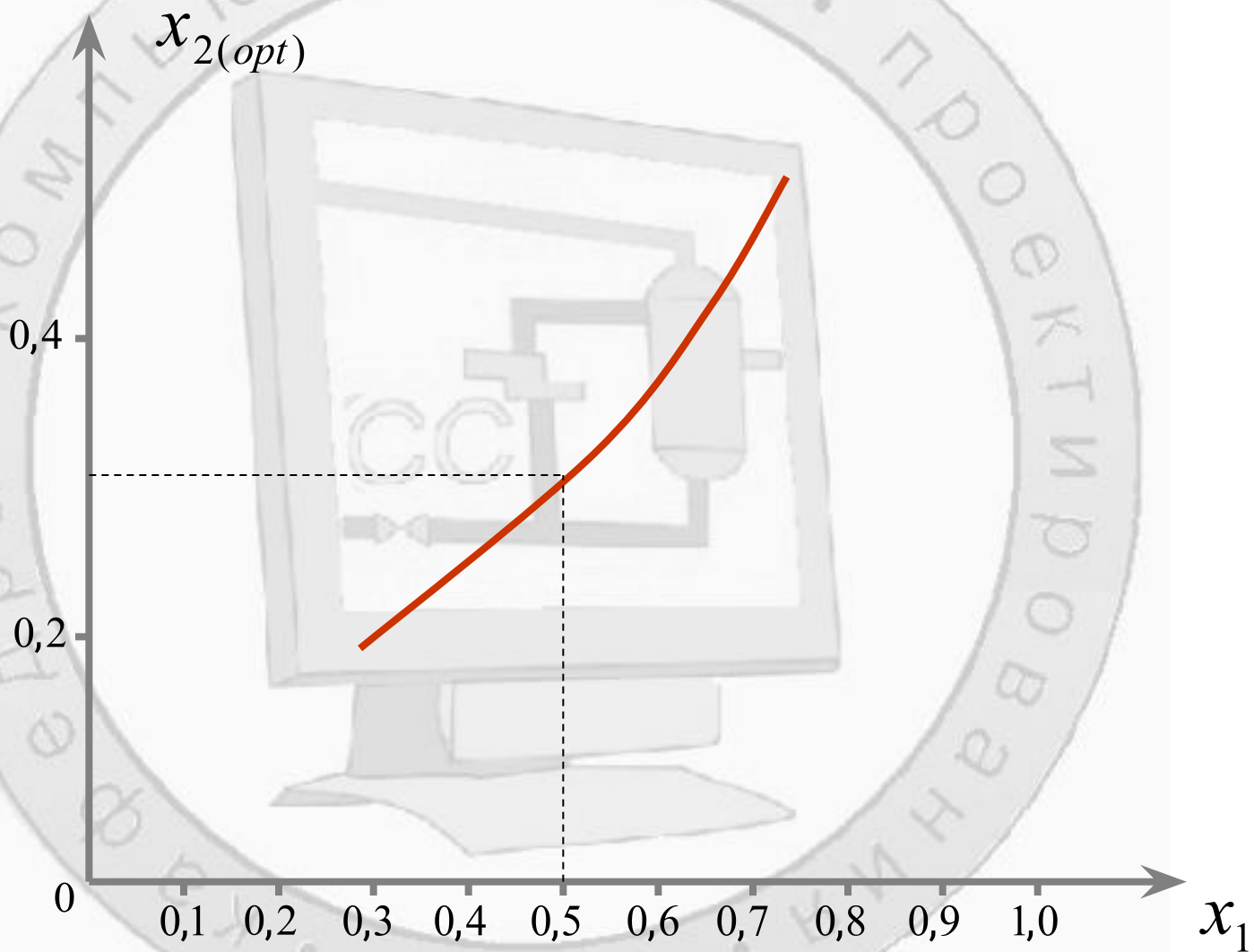


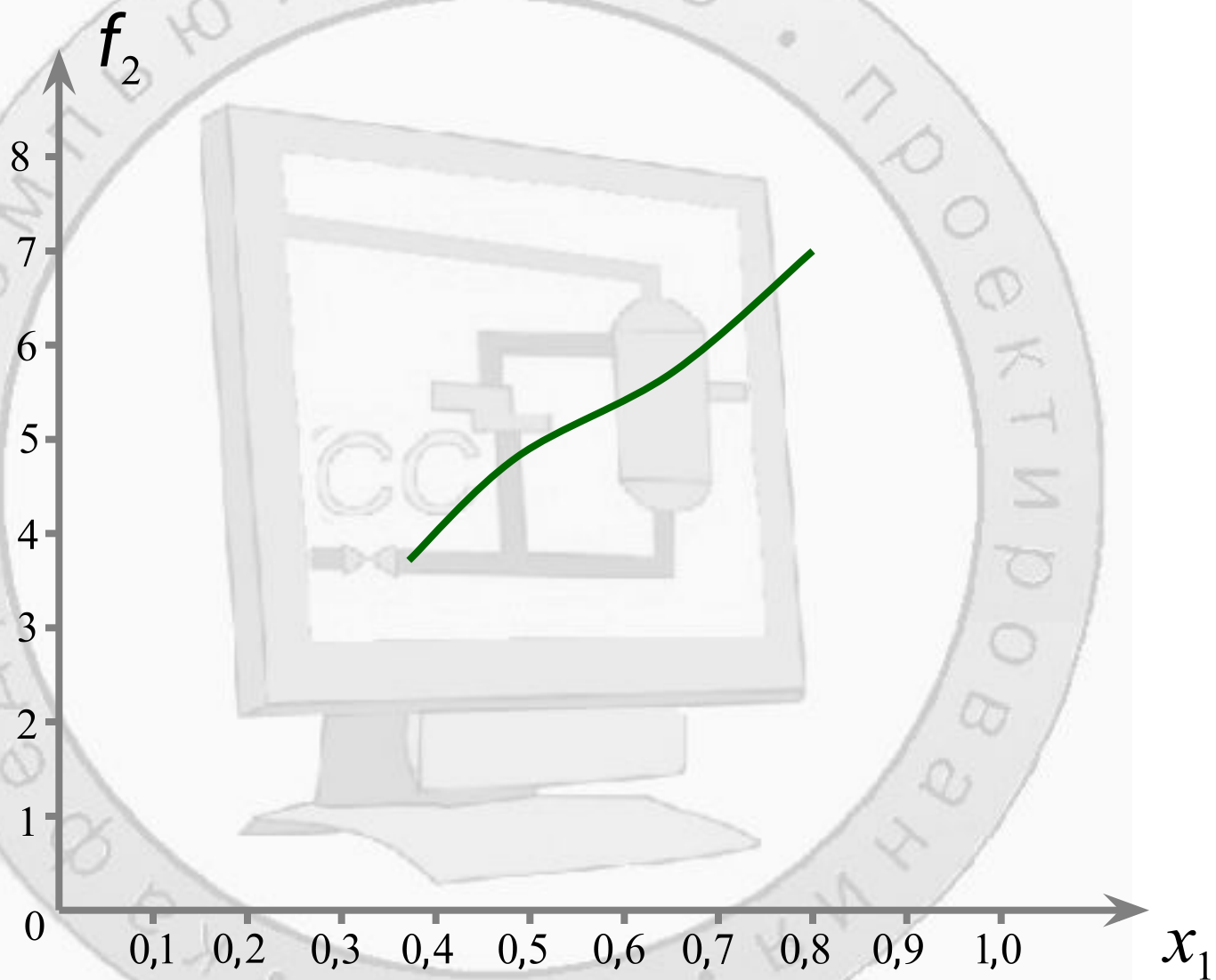
Записываем рекуррентное соотношение для f_2 :

$$f_2(x_1) = \min_{x_2 \in x} \left[\underbrace{\frac{x_1 - x_2}{k \cdot x_2^2}}_{r_2} + \underbrace{25x_2 - 5}_{f_1} \right]$$





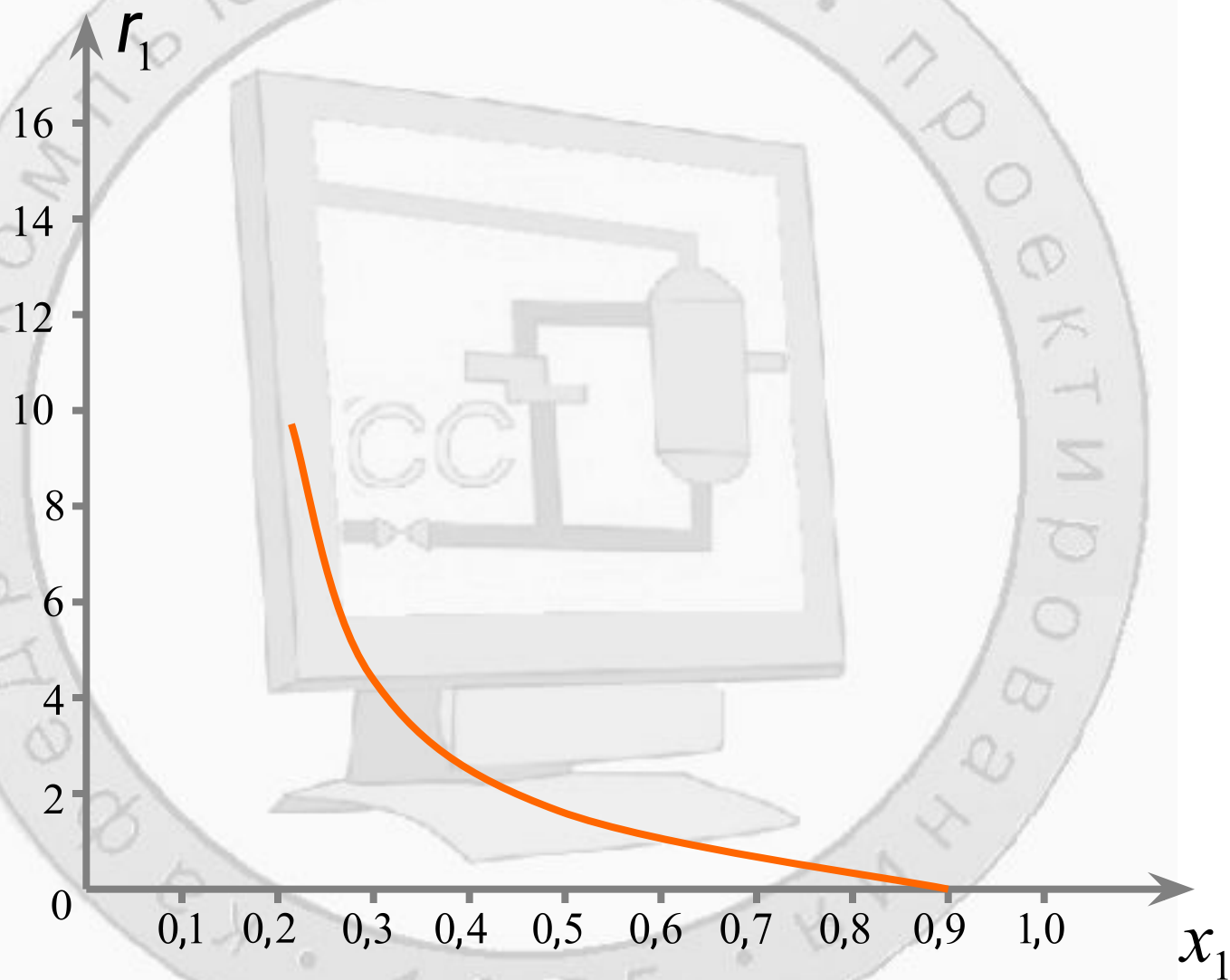


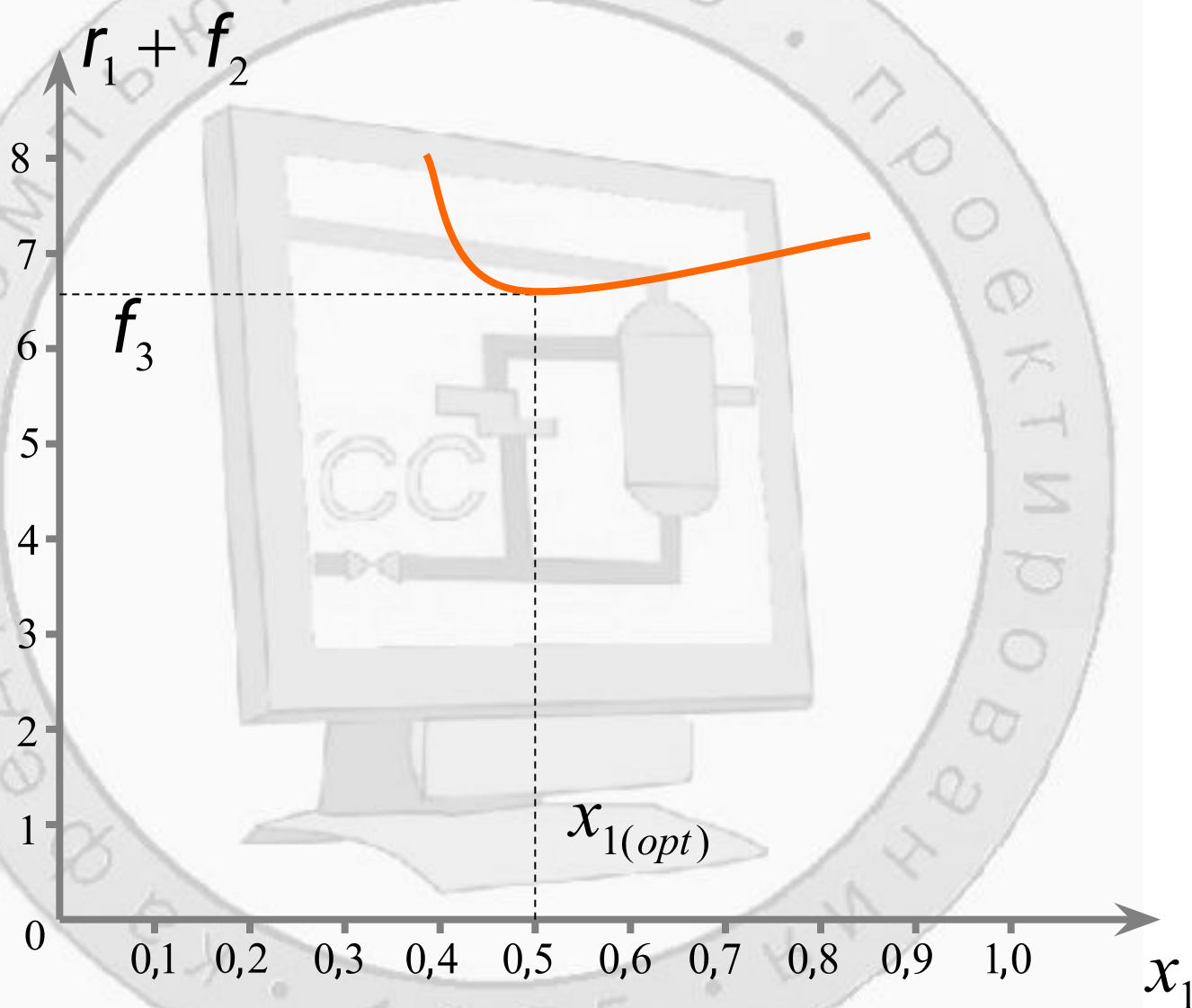


Записываем рекуррентное соотношение для f_2 :

$$f_3(x_0) = \min_{x_1 \in x} \left[\frac{x_0 - x_1}{k \cdot x_1^2} + f_2 \right]$$

$$r_1 = \frac{x_0 - x_1}{k \cdot x_1^2}$$





Второй этап решения

Из графических построений определяется:

$$f_3 = R = \min_{x_1 \in X} (r_1 + f_2) = 6,5 \text{ часа}$$

И оптимальное управление, соответствующее f_3 :

$$x_{1(opt)} = 0,5 \text{ моль / литр}$$

По найденному значению $x_{1(opt)}$ графически определяем $x_{2(opt)}$:

$$x_{2(opt)} = 0,3 \text{ моль / литр}$$

Рассчитываем время пребывания в каждом из аппаратов:

$$\tau_{1(opt)} = \frac{x_0 - x_{1(opt)}}{k \cdot x_{1(opt)}^2} = \frac{1 - 0,5}{1 \cdot 0,25} = 2 \text{ часа}$$

$$\tau_{2(opt)} = \frac{x_{1(opt)} - x_{2(opt)}}{k \cdot x_{2(opt)}^2} =$$
$$= \frac{0,5 - 0,3}{1 \cdot 0,09} = 2,2 \text{ часа}$$

$$\begin{aligned}\tau_{3(opt)} &= \frac{x_{2(opt)} - x_3}{k \cdot x_3^2} = \\ &= \frac{0,3 - 0,2}{1 \cdot 0,04} = 2,5 \text{ часа}\end{aligned}$$

$$R = \tau = \sum_{i=1}^3 \tau_i = 6,7 \text{ часа}$$

Небольшое расхождение $\tau = 6,7$ часа с $f_3 = 6,5$ часа объясняется погрешностью графического расчёта.