



Все о треугольниках (теория)

*Разработано учителем математики
МОУ «СОШ» п. Аджером
Корткеросского района Республики
Коми
Мишариной Альбиной Геннадьевной*

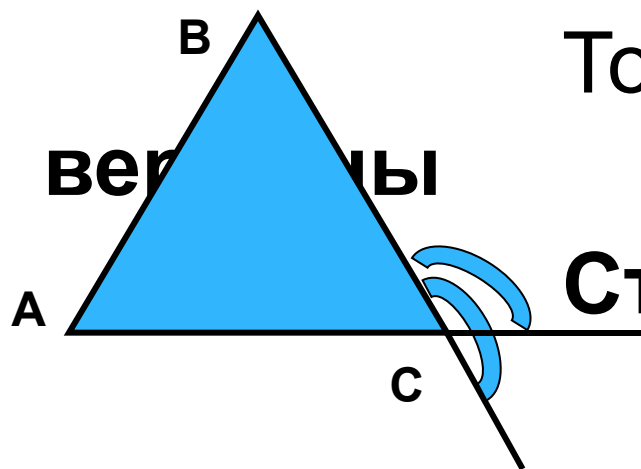
Содержание



- **Определение, элементы, внешний угол**
- **Виды треугольников**
- **Признаки равенства треугольников**
- **Признаки подобия треугольников**
- **Медиана, свойства медиан**
- **Биссектриса, свойства биссектрис**
- **Высота, свойства высот**
- **Средняя линия треугольника**
- **Свойства треугольников**
- **Соотношение между сторонами и углами треугольника**
- **Свойства равнобедренного треугольника**
- **Свойства прямоугольного треугольника**
- **Свойства подобных треугольников**
- **Формулы площади треугольника**

А

Треугольник – фигура, состоящая из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки.



Точки А; В; и С –

Вершины

Стороны - отрезки

Внешний угол треугольника при данной вершине – это угол, смежный с углом треугольника при данной вершине



Виды треугольников

- **Остроугольный** – все углы острые
- **Прямоугольный** – один угол прямой
- **Тупоугольный** – один угол тупой
- **Разносторонний** – все стороны разной длины
- **Равнобедренный** – две стороны (боковые) равны
- **Равносторонний** – все стороны равны (правильный)



Признаки равенства треугольников

1. По двум сторонам и углу между ними

Если $\left\{ \begin{array}{l} AB = A_1 B_1 \\ AC = A_1 C_1 \\ \angle A = \angle A_1 \end{array} \right.$ то $\triangle ABC = \triangle A_1 B_1 C_1$

2. По стороне и прилежащим к ней углам

Если $\left\{ \begin{array}{l} AB = A_1 B_1 \\ \angle A = \angle A_1 \\ \angle B = \angle B_1 \end{array} \right.$ то $\triangle ABC = \triangle A_1 B_1 C_1$

3. По трём сторонам

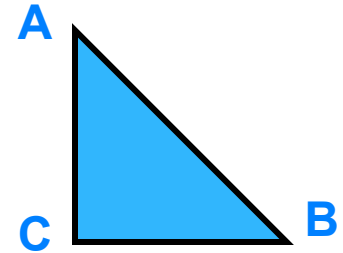
Если $\left\{ \begin{array}{l} AB = A_1 B_1 \\ BC = B_1 C_1 \\ AC = A_1 C_1 \end{array} \right.$ то $\triangle ABC = \triangle A_1 B_1 C_1$



Признаки равенства прямоугольных треугольников

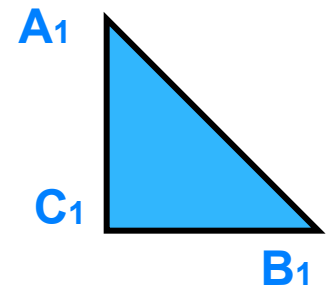
1. По двум катетам

Если $\begin{cases} AC = A_1C_1 \\ BC = B_1C_1 \end{cases}$ то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$



2. По катету и острому углу

Если $\begin{cases} AC = A_1C_1 \\ \angle A = \angle A_1 \end{cases}$ то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$



3. По гипотенузе и острому углу

Если $\begin{cases} AB = A_1B_1 \\ \angle A = \angle A_1 \end{cases}$ то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

4. По гипотенузе и катету

Если $\begin{cases} AB = A_1B_1 \\ AC = A_1C_1 \end{cases}$ то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$



Признаки подобия треугольников

1. По двум углам

Если $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1 B_1 C_1$

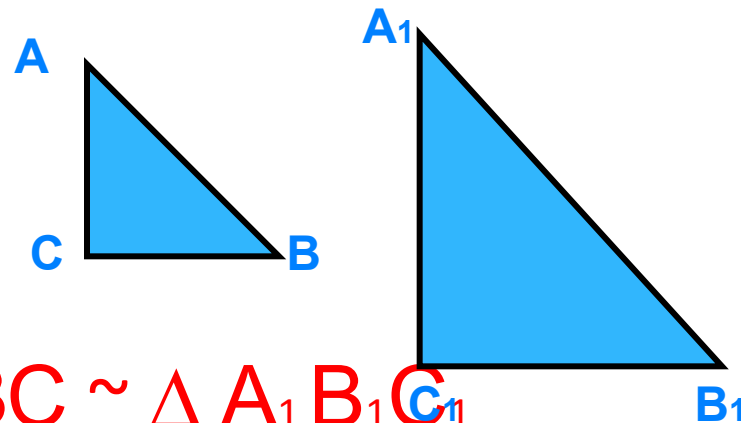
2. По двум сторонам и углу между ними

Если $AB/A_1 B_1 = AC/A_1 C_1$; $\angle A = \angle A_1$ то
 $\triangle ABC \sim \triangle A_1 B_1 C_1$

3. По трем сторонам

Если $AB/A_1 B_1 = AC/A_1 C_1 = BC/B_1 C_1$, то

Признаки подобия прямоугольных треугольников



1. По острому углу

Если $\angle A = \angle A_1$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1 B_1 C_1$

2. По двум катетам

$AC/A_1C_1 = BC/B_1C_1$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1 B_1 C_1$

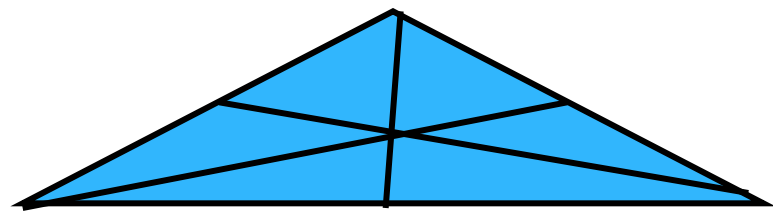
3. По гипотенузе и катету

$AB/A_1B_1 = AC/A_1C_1$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1 B_1 C_1$



Медиана треугольника

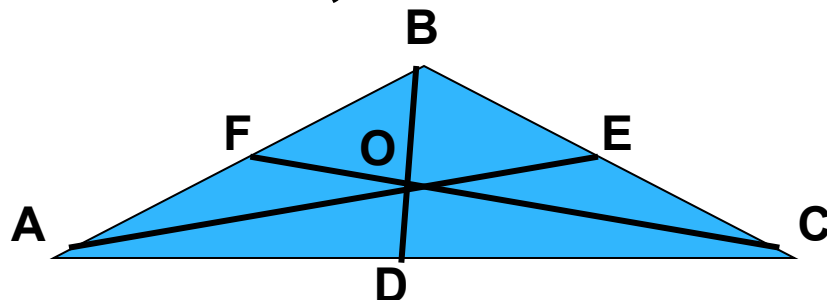
Медиана треугольника – отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположащей стороны



Медианы пересекаются в одной точке (центр тяжести треугольника).

Свойства медиан треугольника

1. Медианы точкой пересечения делятся в отношении **2:1**, считая от вершины угла



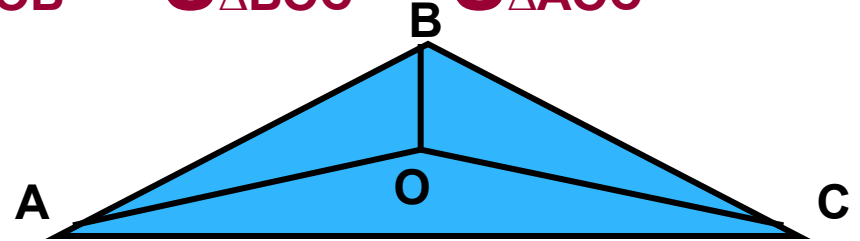
$$AO = 2OE; BO = 2OF; CO = 2OD$$

2. Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника

$$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CBD}$$

Свойства медиан треугольника

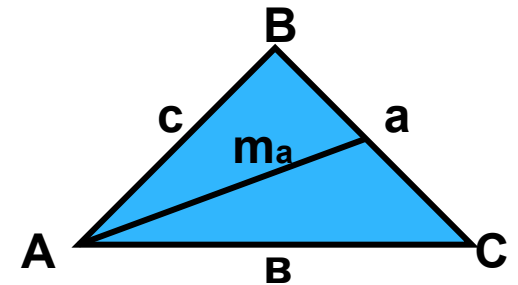
3. Если O – точка пересечения медиан, то $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle BOC} = S_{\triangle AOC}$



4. Медиана на сторону a вычисляется по формулам:

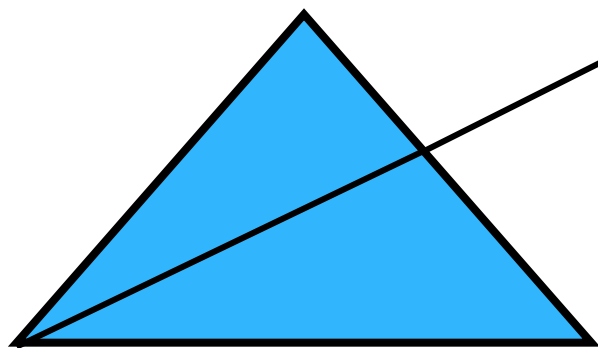
$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos A}$$



Биссектриса треугольника

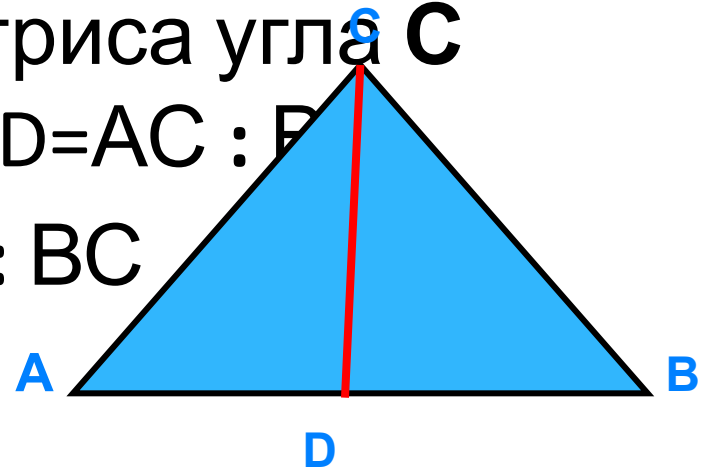
Биссектриса треугольника – отрезок биссектрисы угла треугольника от вершины угла до противоположащей стороны.



Свойства биссектрис треугольника

- 1. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке – центре вписанной в треугольник окружности

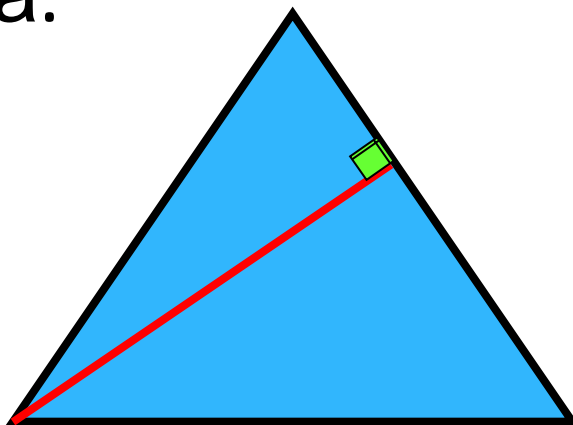
- 2. Если **CD** – биссектриса угла **C** $\triangle ABC$, то: 1) $AD : BD = AC : BC$
2) $S_{\triangle ACD} : S_{\triangle BCD} = AC : BC$



Высота треугольника

Высота треугольника –

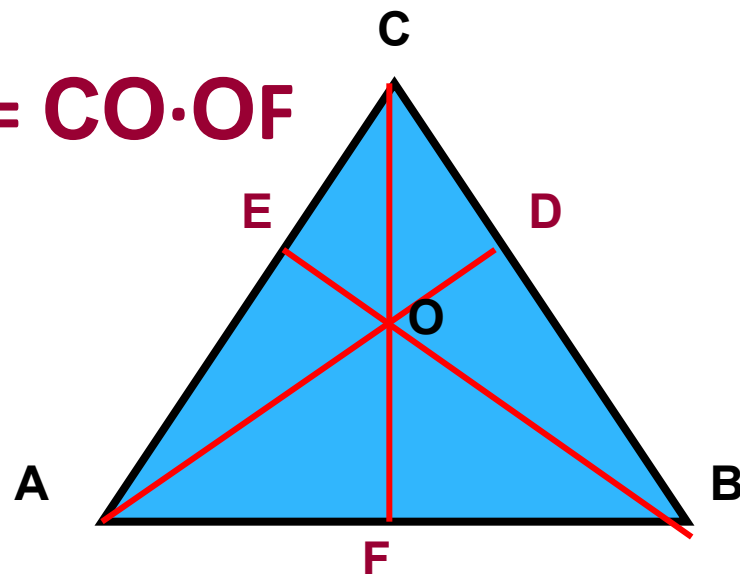
перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, на которой лежит противоположная сторона.



Свойства высот треугольника

1. Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке – ортоцентре треугольника.
2. Если AD, BE, CF – высоты $\triangle ABC$, O – точка пересечения этих высот или их продолжений, то

$$AO \cdot OD = BO \cdot OE = CO \cdot OF$$



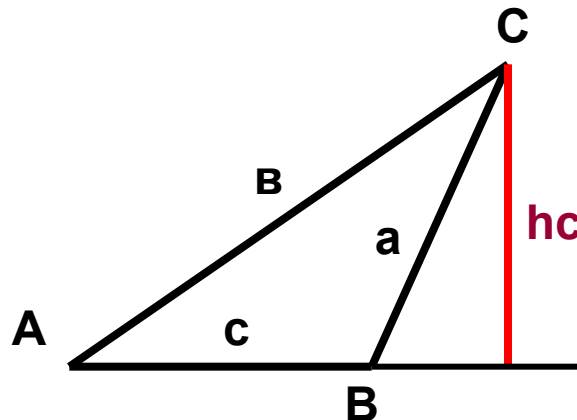
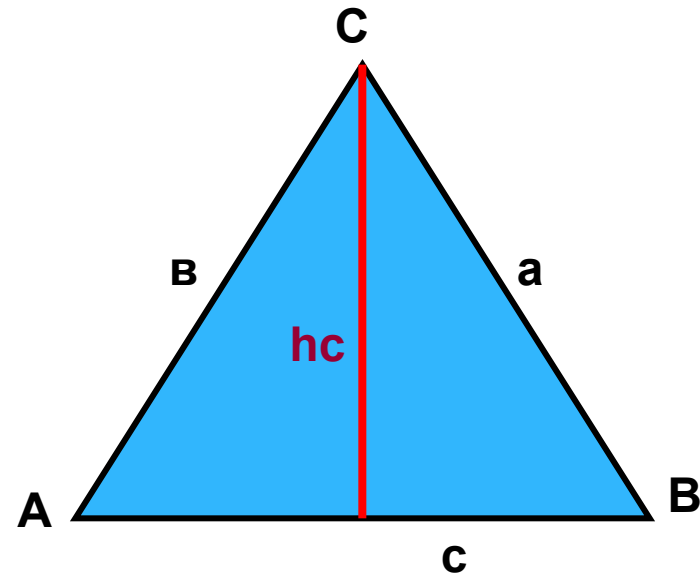
СВОЙСТВА ВЫСОТ треугольника

3. Высота на сторону c вычисляется по формулам:

$$h_c = b \cdot \sin A$$

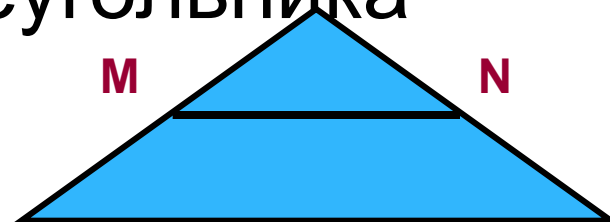
$$h_c = a \cdot \sin B$$

$$h_c = 2S_{\Delta} : c$$



Средняя линия треугольника

Средняя линия треугольника – отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника



Свойство средней линии:

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

$$MN \parallel AB \text{ и } MN = 1/2 \cdot AB$$



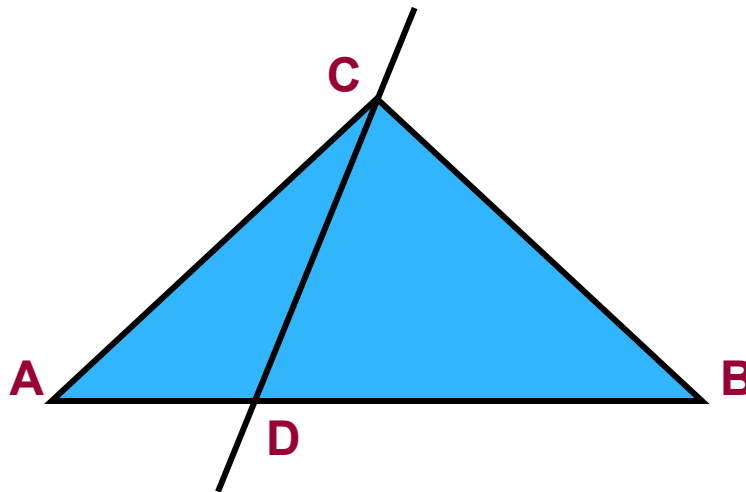
Свойства треугольников

1. Сумма углов треугольника равна 180°
2. Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.
3. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, против большего угла – большая сторона.
4. Неравенство треугольника.
Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

Свойства треугольников

5. Прямая **CD** делит $\triangle ABC$ на два таких треугольника, что

$$S_{\triangle ACD} : AD = S_{\triangle DCB} : DB$$



Свойства треугольников

6. Теорема синусов

Стороны треугольника
пропорциональны синусам
противолежащих углов:

$$a : \sin A = b : \sin B = c : \sin C = 2R$$

где **R** – радиус окружности, описанной
около треугольника

Свойства треугольников

7. Теорема косинусов

Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

Соотношение между сторонами и углами треугольника

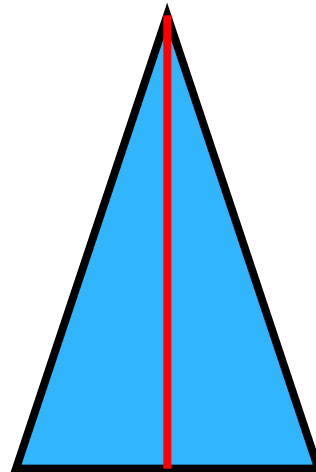
В треугольнике:

- 1) против большей стороны лежит больший угол;
- 2) обратно, против большего угла лежит большая сторона
- 3) В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета
- 4) Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный



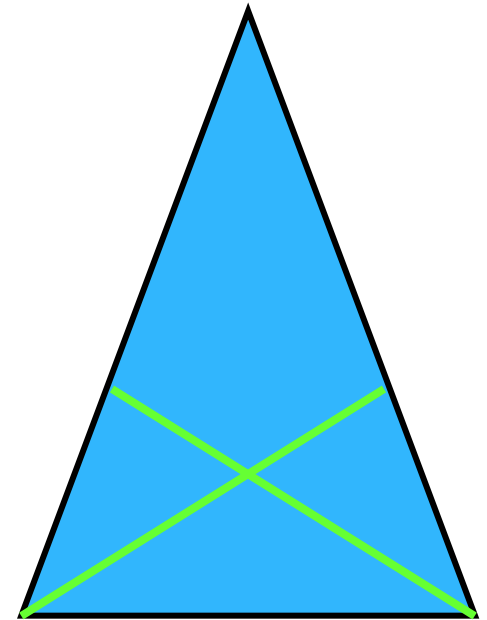
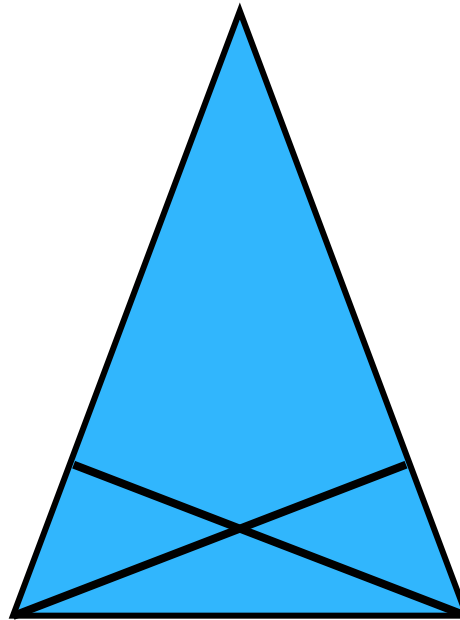
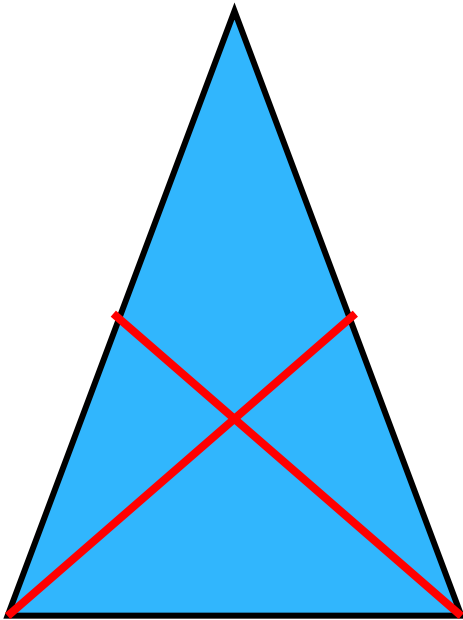
Свойства равнобедренного треугольника

1. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны
2. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой.



Свойства равнобедренного треугольника

3. В равнобедренном треугольнике **медианы** (соответственно **высоты** и **биссектрисы**), проведенные из вершин при основании, равны.



Свойства прямоугольного треугольника

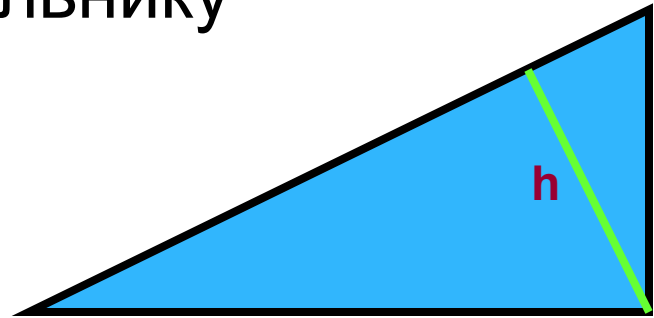
1. Гипотенуза больше катета
2. Сумма острых углов
прямоугольного треугольника равна 90°
3. Катет, лежащий против угла в 30° ,
равен половине гипотенузы. Верно и
обратное утверждение.
4. Медиана, проведенная из вершины
прямого угла, равна половине
гипотенузы.

$$CD = \frac{1}{2} AB$$



Свойства прямоугольного треугольника

5. Высота, опущенная из прямого угла делит прямоугольный треугольник на два подобных треугольника, которые подобны и исходному треугольнику



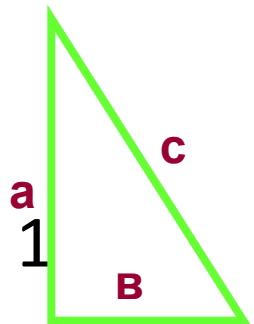
6. Теорема Пифагора.

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Египетский треугольник: 3; 4 и 5

Пифагоровы треугольники: 5; 12 и 13
8; 15 и 17 7; 24 и 25



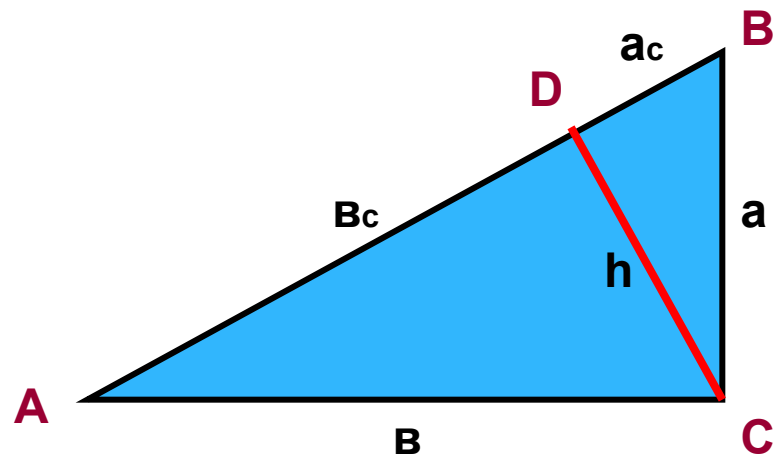
Свойства прямоугольного треугольника

7. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике.

а) Высота, опущенная из прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов.

$$h : a_c = B_c : h$$

Т.е.
$$h = \sqrt{a_c \cdot b_c}$$



^a

б) Каждый катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией катета на гипотенузу:

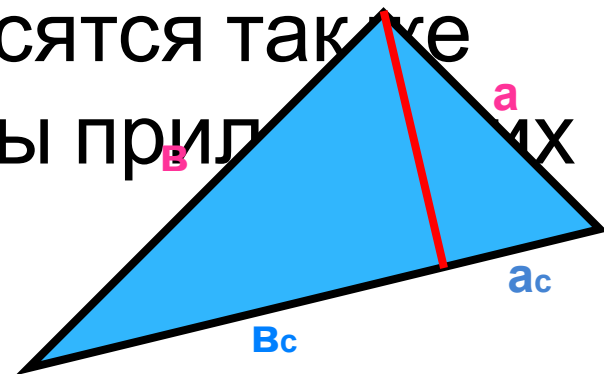
$$a = \sqrt{c \cdot a_c}$$

$$a : c = a_c : a, \text{ т.е. } b = \sqrt{c \cdot b_c}$$

$$b : c = b_c : b, \text{ т.е.}$$

в) Высота, опущенная на гипотенузу, делит гипотенузу на отрезки, которые относятся так же как относятся квадраты прилежащих катетов:

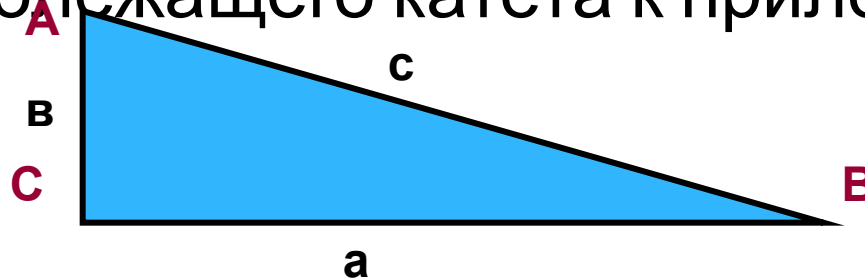
$$a_c : b_c = a^2 : b^2$$



Свойства прямоугольного треугольника

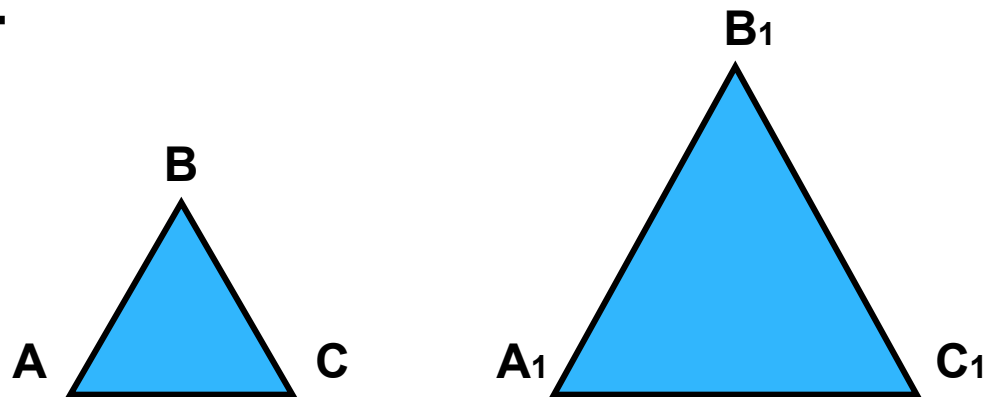
8. Тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника

- **Синус острого угла** равен отношению противолежащего катета к гипотенузе
- **Косинус острого угла** равен отношению прилежащего катета к гипотенузе
- **Тангенс острого угла** равен отношению противолежащего катета к прилежащему катету



Свойства подобных треугольников

1. У подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$:



1) $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$; $\angle C = \angle C_1$

2) $AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1 = BC : B_1C_1 = k$
(коэффициент подобия)

Свойства подобных треугольников

2. Отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

$$P_{\triangle ABC} : P_{\triangle A_1B_1C_1} = k$$

3. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

$$S_{\triangle ABC} : S_{\triangle A_1B_1C_1} = k^2$$



Формулы площади треугольника

Произвольный треугольник:

$$S = \frac{1}{2} \cdot ah_a = \frac{1}{2} \cdot bh_b = \frac{1}{2} \cdot ch_c;$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin C = \frac{1}{2} \cdot ac \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin A;$$

$$S_{\text{тр.}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

где p - полупериметр

Прямоугольный треугольник:

$$S = \frac{1}{2} \cdot av, \text{ где } a \text{ и } v - \text{катеты}$$

Правильный треугольник:

$$S = (a^2 \sqrt{3}) : 4$$



Источники

- Л.С. Атанасян. Учебник геометрии 7-9.М.: «Просвещение», 2009 г.
- Т.С. Степанова. Математика. Весь школьный курс в таблицах., Минск, «Букмастер», 2012



https://www.google.com/search?hl=ru&site=img&tbm=isch&source=hp&biw=1382&bih=732&q=%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0&og=%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0&gs_l=img.1.0.0l10.11499.13684.0.20805.10.7.0.3.3.0.113.481.6j1.7.0...0.0...1ac.1.7.img.ZRxa7gaF-Ml#imgsrc=hBP2SMLPpmMX9M%3A%3BLrDnnfsdseyC3M%3Bhttp%253A%252F%252Fimg16.slando.ua%252Fimages_slandocomua%252F74852745_1_644x461_podgotovka-k-zno-matematika-harkov.jpg%3Bhttp%253A%252F%252Fkharkov.kha.slando.ua%252Fobyavlenie%252Fpodgotovka-k-zno-matematika-ID5e1v1.html%3B527%3B461