

Занятие 4

Канонические формы логических формул. Теорема о СДНФ

АЛГЕБРА ЛОГИКИ

Всякая логическая формула определяет некоторую булеву функцию.

С другой стороны, для всякой булевой функции можно записать бесконечно много формул, ее представляющих.

Одна из основных задач алгебры логики — нахождение *канонических форм* (т. е. формул, построенных по определенному правилу, канону), а также наиболее простых формул, представляющих булевы функции.

Определение

Если логическая функция выражена через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание переменных, то такая форма представления называется *нормальной*.

Среди нормальных форм выделяют такие, в которых функции записываются единственным образом. Их называют *совершенными*.

Особую роль в алгебре логики играют классы *дизъюнктивных и конъюнктивных совершенных нормальных форм*. В их основе лежат понятия элементарной дизъюнкции и элементарной конъюнкции.

Определение

Формулу называют *элементарной конъюнкцией*, если она является конъюнкцией одной или нескольких переменных, взятых с отрицанием или без отрицания.

Одну переменную или ее отрицание считают *одночленной элементарной конъюнкцией*.

Пример

Формулы

x_2 ,

$\overline{x_2}$

$x_1 \& x_3$,

$x_1 \& x_3 \& x_1 \& \overline{x_3}$

являются элементарными конъюнкциями;
первые две из них — одночленными.

Определение

Формула называется *дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)*, если она является дизъюнкцией неповторяющихся элементарных конъюнкций.

ДНФ записываются в виде

$$A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n, \text{ где}$$

каждое A — элементарная конъюнкция.

Пример ДНФ

$$x_2 \vee x_1 \& x_3$$

$$\bar{x}_2 \vee x_2 \& x_1 \vee \bar{x}_1$$

Определение

Формула A от k переменных называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (СДНФ), если:

1. A является ДНФ, в которой каждая элементарная конъюнкция есть конъюнкция k переменных x_1, x_2, \dots, x_k , причем на i -м месте этой конъюнкции стоит либо переменная x_i либо ее отрицание;
2. все элементарные конъюнкции в такой ДНФ попарно различны.

Задание

Даны формулы

$$A = x_1 \& \bar{x}_2 \vee x_1 \& x_2$$

$$B = x_1 \vee x_2 \& x_3$$

$$C = x_1 \& x_2 \vee x_2 \& \bar{x}_2$$

Определить, являются ли они
СДНФ двух переменных.

Решение

$$A = x_1 \& \bar{x}_2 \vee x_1 \& x_2$$

Формула **A** является СДНФ двух переменных.

Решение

$$B = x_1 \vee x_2 \& x_3$$

Формула B не является СДНФ.

Формула B зависит от трех переменных, но количество переменных в элементарных конъюнкциях меньше трех.

Решение

$$C = x_1 \& x_2 \vee x_2 \& \bar{x}_2$$

Формула C не является СДНФ.

В формуле C переменная x_2 дважды входит в одну и ту же элементарную конъюнкцию.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма представляет собой формулу, построенную по строго определенным правилам с точностью до порядка следования элементарных конъюнкций (дизъюнктивных членов) в ней.

Она является примером однозначного представления булевой функции в виде формульной (алгебраической) записи.

Определение

Формула называется *элементарной дизъюнкцией*, если она является дизъюнкцией (может, одночленной) переменных и отрицаний переменных.

Примеры элементарных дизъюнкций

$$1) \quad x_2$$

$$2) \quad \overline{x_2}$$

$$3) \quad x_1 \vee x_3$$

Определение

Формула называется *конъюнктивной нормальной формой* (КНФ), если она является конъюнкцией неповторяющихся элементарных дизъюнкций.

КНФ записываются в виде

$$A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n, \text{ где}$$

каждое A_n – элементарная дизъюнкция.

Примеры КНФ

1) $\overline{x_2}$

2) x_2

3) $\overline{x_2} \vee x_2$

4) $(\overline{x_2} \vee x_1) \& x_3$

5) $(x_2 \vee \overline{x_2}) \& (x_1 \vee x_1)$

Определение

Формула A от k переменных называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (СКНФ), если:

- 1) A является **КНФ**, в которой каждая элементарная дизъюнкция есть дизъюнкция k переменных x_1, x_2, \dots, x_k , причем на i -м месте этой дизъюнкции стоит либо переменная x_i , либо ее отрицание;
- 2) все элементарные дизъюнкции в такой КНФ попарно различны.

Задание

Даны формулы

$$A = (x_1 \vee \overline{x_2}) \& (x_1 \vee x_2)$$

$$B = (x_1 \vee \overline{x_1}) \& (x_2 \vee x_3)$$

Определить, являются ли они СКНФ.

Решение

$$A = (x_1 \vee \overline{x_2}) \& (x_1 \vee x_2)$$

Формула **A** является СКНФ.

Решение

$$B = (x_1 \vee \bar{x}_1) \& (x_2 \vee x_3)$$

Формула B не является СКНФ, поскольку переменная x_1 дважды входит в первый конъюнктивный член, кроме того, количество переменных в каждой элементарной дизъюнкции меньше трех, в то время как формула зависит от трех переменных.

Вопрос

Всякую ли логическую функцию можно представить в одной из рассмотренных канонических совершенных форм?

Ответ

Да, любую булеву функцию, не равную тождественно 0 или 1, можно представить в виде СДНФ или СКНФ.

Теорема о СДНФ

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – булева функция от n переменных, не равная тождественно нулю. Тогда существует совершенная дизъюнктивная нормальная форма, выражающая функцию f .

Доказательство

Докажем, что для всякой булевой функции f от n переменных выполняется соотношение **1**:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, \overline{x_n}) = x_i \& f(x_1, x_2, \dots, 0, \dots, x_n) \vee x_i \& f(x_1, x_2, \dots, 1, \dots, x_n)$$

где x_i – любая из n переменных.

Соотношение **1** позволяет «выносить» переменную x_i за знак функции.

Последовательно вынося x_1, x_2, \dots, x_n за знак функции f , получим формулу **2** :

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & \\ & x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \dots \bar{x}_{n-1} \bar{x}_n \vee f(0, 0, \dots, 0, 0) \vee \\ & \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \dots \bar{x}_{n-1} x_n \vee f(0, 0, \dots, 0, 1) \vee \\ & \dots \\ & \vee x_1 x_2 \dots x_{n-1} \bar{x}_n \vee f(1, 1, \dots, 1, 0) \vee \\ & \vee x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n \vee f(1, 1, \dots, 1, 1) \end{aligned}$$

Так как применение преобразования

- 1 к каждой из переменных увеличивает количество дизъюнктивных членов в два раза, то для функции n переменных в формуле
- 2 мы имеем 2^n дизъюнктивных членов. Причем каждый из них соответствует значению функции на одном из 2^n возможных наборов значений n переменных.

Если на некотором наборе $f = 0$, то весь соответствующий дизъюнктивный член в  также равен 0, и в представлении данной функции он фактически не нужен.

Если же $f = 1$, то в соответствующем дизъюнктивном члене само значение функции можно опустить.

В результате для произвольной булевой функции f мы получили формулу, состоящую из n -членных попарно различных элементарных конъюнкций, объединенных дизъюнкциями, т. е. искомая СДНФ построена.

Теорема доказана.

Алгоритм построения СДНФ по таблице истинности

1. В таблице истинности отмечаем наборы переменных, на которых значение функции $f = 1$.
2. Записываем для каждого отмеченного набора конъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в этом наборе равно 1 , то в конъюнкцию включаем саму переменную, в противном случае – ее отрицание.
3. Все полученные конъюнкции связываем

Следствие

Для любой формулы можно найти равносильную ей ДНФ.

Доказательство

Если булева функция не равна тождественно нулю, то, согласно доказанной теореме, можно построить СДНФ, ее реализующую. Построенная СДНФ является одной из искомым ДНФ.

Если же данная формула равна тождественно нулю, то в качестве искомой ДНФ можно взять, например, $\bar{x}_1 \& x_1$.

Теорема о СКНФ

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – булева функция от n переменных, не равная тождественно нулю. Тогда существует совершенная конъюнктивная нормальная форма, выражающая функцию f .

Доказательство аналогично приведенному ранее.

Алгоритм построения СКНФ по таблице истинности

1. В таблице истинности отмечаем наборы переменных, на которых значение функции $f = 0$.
2. Записываем для каждого отмеченного набора дизъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в этом наборе равно 0 , то в дизъюнкцию включаем саму переменную, в противном случае – ее отрицание.
3. Все полученные дизъюнкции связываем

Следствие

Для любой формулы можно найти равносильную ей КНФ.

Доказательство

Если булева функция не равна тождественно единице, то, согласно теореме о СКНФ, можно построить СКНФ, ее реализующую. Построенная СКНФ является одной из искомым КНФ.

Если же данная формула равна тождественно единице, то в качестве искомой КНФ можно взять, например,

$$\overline{x_1} \vee x_1 .$$

Из алгоритмов построения СДНФ и СКНФ следует, что если на большей части наборов значений переменных функция равна 0, то для получения ее формулы проще построить СДНФ, в противном случае – СКНФ.

Пример

Построить формулу для функции $f(x_1, x_2, x_3)$, заданной таблицей истинности:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Решение (СДНФ)

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \& x_2 \& \bar{x}_3 \vee x_1 \& \bar{x}_2 \& \bar{x}_3 \vee x_1 \& \bar{x}_2 \& x_3$$

Пример

Выразить функцию импликация с помощью операций отрицания, дизъюнкции и конъюнкции.

x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = x_1 \supset x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Решение (СКНФ)

x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = x_1 \square x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$f(x_1, x_2) = x_1 \square x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$$

Задачи

1. Какие из формул
представляют собой **СДНФ**, а
какие **СКНФ**?

1) $f(x) = 1$

2) $f(x) = x \& \bar{x}$

3) $f(x, y) = \bar{x} \& \bar{y}$

4) $f(x, y) = x \& y \vee \bar{y}$

5) $f(x, y, z) = \bar{x} \& y \& \bar{z}$

6) $f(x, y, z) = x \& y \vee z$

7) $f(x, y, z) = (x \& y \& z) \vee (x \& \bar{y} \& \bar{z})$

2. С помощью отрицания, дизъюнкции и конъюнкции постройте наиболее простое аналитическое представление для функций эквивалентность и разделительная дизъюнкция.