

Общая схема исследования функции и построения графика



**Исследование функции $y = f(x)$
целесообразно вести в
определенной
последовательности:**

1. Найти область определения функции
2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат
3. Найти интервалы знакопостоянства функции (промежутки, на которых $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$)
4. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида

- 5. Найти асимптоты графика функции**
- 6. Найти интервалы монотонности функции**
- 7. Найти экстремумы функции**
- 8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции**

Пример

Дана функция

$$y = \frac{x}{1-x^2}$$

Необходимо исследовать эту функцию и построить ее график

Решение

1. Найти область определения функции

$$y = \frac{x}{1-x^2}$$

Функция не определена при $x = 1$ и $x = -1$. Область ее определения состоит из трех интервалов $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$, а график из трех ветвей.

2. Найти (если это можно) точки пересечения графика функции

$$y = \frac{x}{1-x^2}$$

с осями координат

Если $x = 0$, то $y = 0$. График пересекает ось Oy в точке $O(0;0)$.

Если $y = 0$, то $x = 0$. График пересекает ось Ox в точке $O(0;0)$.

3. Найти интервалы знакопостоянства функции $y = \frac{x}{1-x^2}$

(промежутки, на которых $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$)

Функция знакоположительна ($y > 0$) на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$.

Функция знакоотрицательна ($y < 0$) на интервалах $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$.

4. Выяснить, является ли функция

$$y = \frac{x}{1-x^2}$$

четной, нечетной или общего вида

Функция является нечетной, т.к.

$$y(-x) = \frac{-x}{1-(-x)^2} = -\frac{x}{1-x^2} = -y(x)$$

Следовательно, график ее симметричен относительно начала координат.

Для построения графика достаточно исследовать ее при $x \geq 0$

5. Найти асимптоты графика функции

$$y = \frac{x}{1-x^2}$$

Прямые $x = 1$ и $x = -1$ являются ее вертикальными асимптотами.

Прямая $y = 0$ является ее горизонтальной асимптотой.

6. Найти интервалы монотонности функции

$$y = \frac{x}{1-x^2}$$

Находим интервалы возрастания и убывания функции. Т.к.

$$y' = \left(\frac{x}{1-x^2} \right)' = \frac{1(1-x^2) - x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2},$$

то $y' > 0$ в области определения, и функция является возрастающей на каждом интервале области определения.

7. Найти экстремумы функции $y = \frac{x}{1-x^2}$

Находим интервалы возрастания и убывания функции. Т.к.

$$y' = \frac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2},$$

то критическими точками являются точки $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$ (y' существует), но они не принадлежат области определения функции. Функция экстремумов не имеет.

8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции

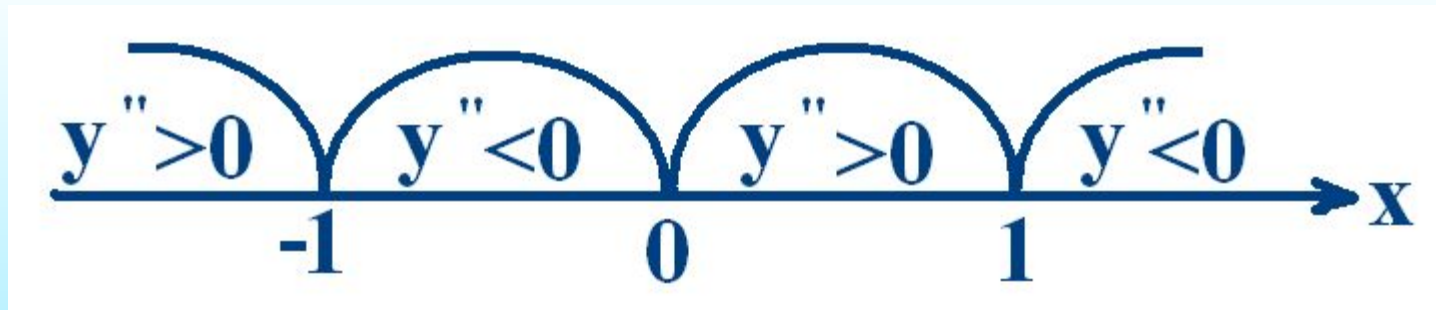
$$y = \frac{x}{1-x^2}$$

Исследуем функцию на выпуклость.

Находим y''

$$y'' = \left(\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2} \right)' = \frac{2x(1-x^2)^2 - (x^2+1)2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} =$$

$$= \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$$



Вторая производная равна нулю или не существует в точках $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ и $x_3 = 1$. Точка $O(0; 0)$ – точка перегиба графика функции.

График выпуклый вверх на интервалах $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$; выпуклый вниз на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$.

График функции

$$y = \frac{x}{1 - x^2}$$

