

Позиционные системы счисления, отличные от десятичной

Цель: Сформировать умения выполнять действия над числами в позиционных системах счисления отличных от десятичной, навыки в перехода от записи в заданной системе к записи в десятичной, и наоборот.

Задачи:

- Познакомиться с записью натурального числа в системе счисления с основанием p ;
- Сравнение чисел с основанием p ;
- Действия над числами в p -ичной системе счисления;
- Познакомить с правилами перехода от записи в заданной системе к записи в десятичной, и наоборот.

План

1. Понятие p -ичной системы счисления
2. Знаки, используемые для p -ичной системы счисления
3. Определение записи натурального числа с основанием p
4. Сравнение чисел с основанием p
5. Арифметические действия над числами в позиционных системах счисления с основанием p
6. Правила перехода от записи в заданной системе к записи в десятичной, и наоборот.

Основанием позиционной системы счисления может быть не только число 10, но и вообще любое натуральное число $p \geq 2$. Система счисления с основанием p называется p -ичной. Так, если $p = 2$, то – двоичной, если $p = 8$ – восьмеричной, если $p = 10$ – десятичной.

- Для записи чисел в системе с основанием p необходимо p символов. Принято использовать знаки десятичной системы счисления: $0, 1, 2, \dots, p - 1$.

Например, числа в троичной системе счисления записывают при помощи символов $0, 1, 2$, а в пятеричной – при помощи символов $0, 1, 2, 3, 4$.

- Записью натурального числа x в системе счисления с основанием p называется его представление в виде:

$$x = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 \quad (1),$$

где коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ принимают значения $0, 1, 2, \dots, p-1$ и $a_n \neq 0$.

Запись и чтение чисел

Вместо представления (1) число x записывают кратко. Например, если $p = 4$, то число $x = 2 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 1$ можно записать в виде 2031_4 , причем читать его следует так: «два, ноль, три, один в четверичной системе счисления».

При записи чисел указывают основание
системы счисления:

234₁₀

Двести
тридцать
четыре

1100₂

Один – один – ноль -
ноль по основанию
два

645₁₆

Шесть – четыре –
пять по основанию
шестнадцать



Сравнение чисел

Сравнение чисел в системе счисления с основанием p ($p \neq 10$) выполняется так же, как и в десятичной системе. Так, $2101_3 < 2102_3$, поскольку при одинаковом числе разрядов и совпадении трех цифр старших разрядов число единиц в первом числе меньше числа единиц во втором.

Арифметические действия

Арифметические действия над числами в позиционных системах счисления с основанием p ($p \neq 10$) выполняются по тем же правилам, что и в десятичной системе счисления. Надо лишь иметь для системы с основанием p соответствующие таблицы сложения и умножения однозначных чисел.

Составим, например, таблицу сложения однозначных чисел в троичной системе счисления. Однозначные числа в ней – это 0, 1, 2. Число 3 записывается 10. Число 4 имеет вид 11_3 , так как $4 = 1 \cdot 3 + 1 = 11_3$.

Полностью таблицу сложения однозначных чисел в троичной системе счисления можно представить в таком виде:

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

Используя эту таблицу, можно складывать любые числа в троичной системе счисления, причем многозначные числа можно складывать столбиком по правилам, аналогичным правилам сложения чисел в десятичной системе счисления. Например, $1221_3 + 122_3 = 2120_3$, так как

$$\begin{array}{r} 1221 \\ + 122 \\ \hline 2120 \end{array}$$

Таблицей сложения однозначных чисел в троичной системе счисления можно пользоваться, выполняя вычитание: $2110_3 - 212_3 = 1121_3$.

Таблица умножения однозначных чисел в троичной системе счисления имеет вид:

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

На основе этой таблицы и таблицы сложения выполняют умножение многозначных чисел по правилам, аналогичным правилам умножения чисел в десятичной системе счисления. Найдем, например, произведение $122_3 \cdot 22_3$:

$$\begin{array}{r}
 \times 122 \\
 \times 22 \\
 + 1021 \\
 + 1021 \\
 \hline
 12001
 \end{array}$$

Таким образом, $122_3 \cdot 22_3 = 12001_3$.

Таблицей умножения можно пользоваться, выполняя деление чисел в троичной системе счисления, в частности, деление чисел уголком. Разделим, например, число 10011_3 на 12_3 :

$$\begin{array}{r}
 \overline{)10011} \quad | \quad 12 \\
 \underline{12} \quad | \underline{122} \\
 111 \\
 \underline{101} \\
 101 \\
 \underline{101} \\
 0
 \end{array}$$

Значит, $10011_3 : 12_3 = 122_3$.

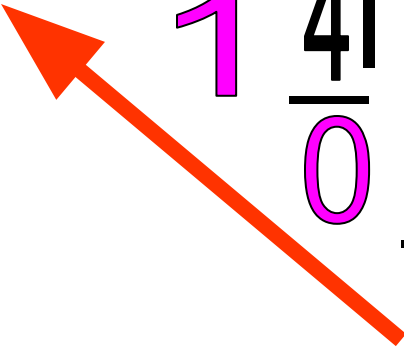
Перевод чисел из десятичной системы счисления в другую

$$10_{10} \rightarrow X_2$$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ \hline 10 & 5 \\ \hline 0 & 4 \\ & \hline & 1 \\ & 2 \\ & \hline & 2 \\ & 2 \\ & \hline & 1 \\ & 0 \\ & \hline & 1 \end{array}$$

$$10_{10} = 1010_2$$

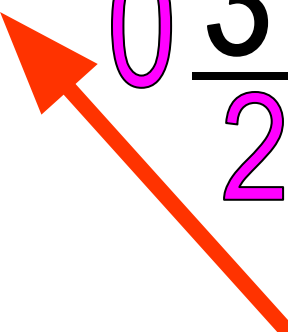
$$37_{10} \rightarrow X_2$$

$$\begin{array}{r|l}
 37 & 2 \\
 \hline
 36 & 18 \quad 2 \\
 \hline
 1 & 18 \quad 9 \quad 2 \\
 & 18 \quad 8 \quad 4 \quad 2 \\
 & 0 \quad 1 \quad 4 \quad 2 \quad 2 \\
 & & 1 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \\
 & & & 0 & \underline{\hspace{1cm}}
 \end{array}$$


$$37_{10} = 100101_2$$

В троичную систему счисления:

$$47_{10} \rightarrow X_3$$

$$\begin{array}{r|l} 47 & 3 \\ \hline 45 & 15 \\ \hline 2 & 15 \\ & 5 \\ & 3 \\ & 1 \end{array}$$


$$47_{10} = 1202_3$$

Правило перевода из десятичной системы счисления:

1. Разделить число на основание новой системы (остаток запомнить).
2. Частное от деления разделить на основание новой системы (остаток запомнить) и т.д.
3. Деление прекращается, когда частное станет меньше основания системы счисления.
4. Начиная с последнего частного, записать остатки от деления справа налево.

Перевод чисел в десятичную систему счисления

- Развернутая запись числа – это запись числа по разрядным единицам

$$23 = 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

$$333 = 3 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 3 = 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

3 2 1 0

$$4270 = 4 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 0 = \\ 4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$$

Перевод чисел в десятичную систему счисления

При переводе чисел в десятичную систему счисления, необходимо сделать развернутую запись числа по разрядам в данной системе счисления

$$10011_2 = X_{10}$$

$$\begin{matrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}_2 = 1$$

$$100101_2 = X_{10}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{100101}_2 = \\ & \mathbf{1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 =} \\ & \mathbf{1 + 0 + 4 + 0 + 0 + 32 = 37}_{10} \end{aligned}$$

$$145_8 = X_{10}$$

$$145_8 = 5 \cdot 8^0 + 4 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^2 =$$
$$5 + 32 + 64 = 101_{10}$$

$$6262_8 \Rightarrow 3250_{10}$$

$$93_{16} \Rightarrow 147_{10}$$

Сравните числа 34_8 и 2220_3

$$34_8 = 4 \cdot 8^0 + 3 \cdot 8^1 = 4 + 24 = 28_{10}$$

$$\begin{aligned} 2220_3 &= 0 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 \\ &= 0 + 6 + 18 + 54 = 78_{10} \end{aligned}$$

$$28_{10} < 78_{10}$$

ОТВЕТЬТЕ на ВОПРОСЫ



- Что называют системой счисления?
- Какие виды систем счисления вы знаете?
- Приведите примеры непозиционной системы счисления
- Какая система называется позиционной?

- Как можно записать число в позиционной системе счисления ?
- Как можно перевести любое число в десятичную систему счисления?
- Как можно перевести из десятичной системы счисления в любую систему счисления с произвольным основанием?