



Российский университет дружбы народов
Институт гостиничного бизнеса и туризма

В. Дихтяр

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Раздел 3. **Введение в теорию
вероятностей**

**Тема 3-3. Действия над конечными
случайными величинами**



Содержание

- Конечные случайные величины
- Совместное распределение
- Математическое ожидание
- Дисперсия и среднее квадратичное отклонение
- Ковариация и коэффициент корреляции

Конечная случайная величина

$$\Omega: A = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \rightarrow X(\omega) = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ закон распределения конечной случайной величины

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}, p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Примеры ☆

1. (M) X : {количество «орлов»} = 0 и 1, $p = 1/2$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2. Постоянная случайная величина

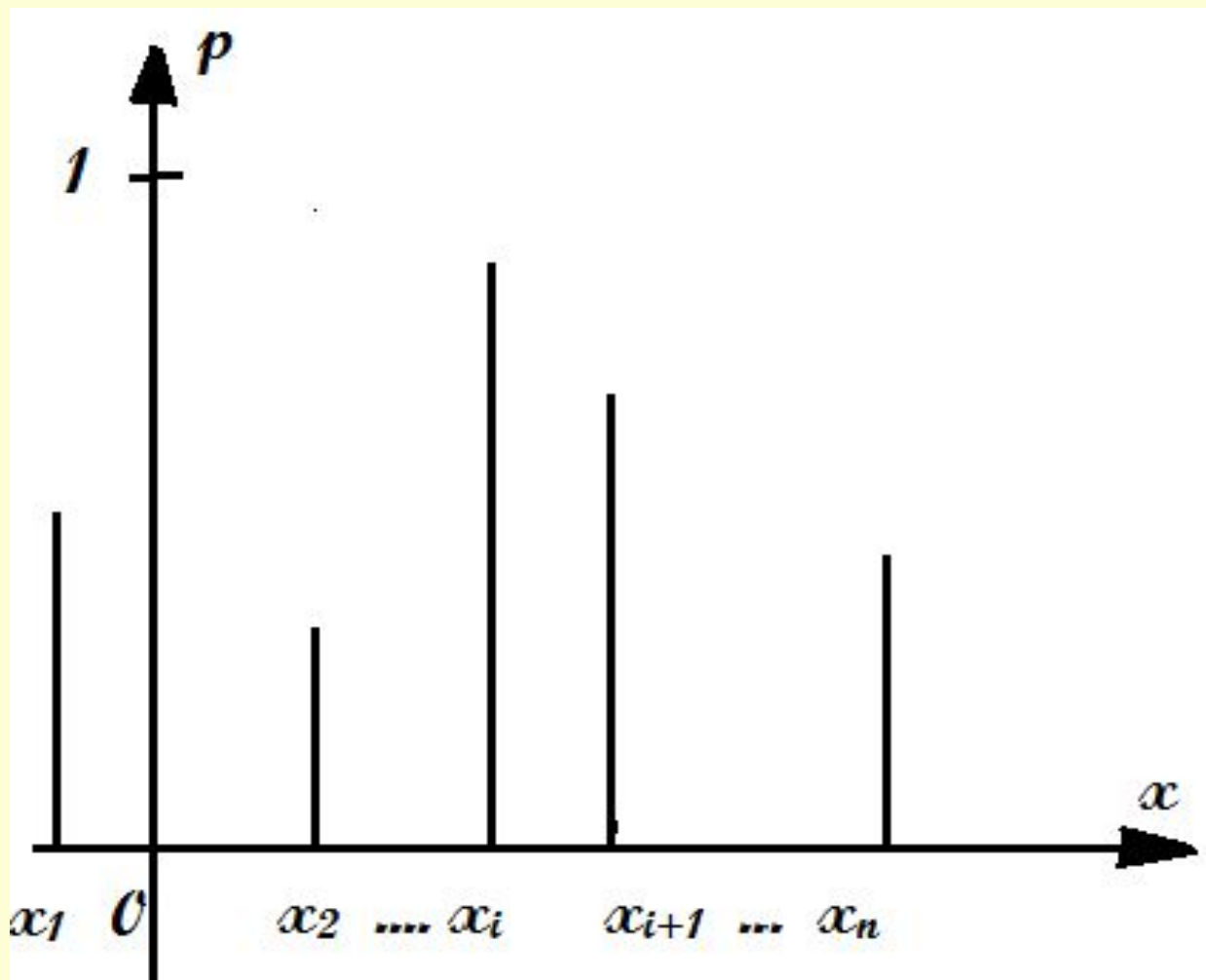
$$c = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Биномиальная величина

$$B_{n,p} = \begin{pmatrix} k \\ C_n^k p^k q^{n-k} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n-1 & n \\ q^n & npq^{n-1} & \dots & C_n^k p^k q^{n-k} & \dots & np^{n-1}q & p^n \end{pmatrix}$$

График функции вероятностей конечной случайной величины



1. Совместное распределение $\mathcal{X}$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix}$$

2. Совместные вероятности

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j),$$
$$i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

2. Совместное распределение $(\{x_i, y_j\}; p_{ij})$

$$\sum_{i,j} p_{ij} = 1$$

Таблица совместного распределения

X	Y							
		y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	y_n	
X_1		p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$	p_{1n}	p_1
X_2		p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2j}	$\dots$	p_{2n}	p_2
$\vdots$		$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
X_i		p_{i1}	p_{i2}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$	p_{in}	p_i
$\vdots$		$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
X_m		p_{m1}	p_{m2}	$\dots$	p_{mj}	$\dots$	p_{mn}	p_m
		q_1	q_2	$\dots$	q_j	$\dots$	q_n	1

Таблица совместного распределения X и Y

Y X	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_n	p	Σ_j
X_1	N_{11}	$\dots$	N_{1j}	$\dots$	N_{1n}	p_1	$N_{1\bullet}$
$\vdots$						$\vdots$	
X_i	N_{i1}	$\dots$	N_{ij}	$\dots$	N_{in}	p_i	$N_{i\bullet}$
$\vdots$						$\vdots$	
X_m	N_{m1}	$\dots$	N_{mj}	$\dots$	N_{mn}	p_m	$N_{m\bullet}$
Σ_i	$N_{\bullet 1}$		$N_{\bullet j}$		$N_{\bullet n}$		N
q	q_1	$\dots$	q_j	$\dots$	q_n	1	



Совместное распределение

$$\sum p_{ij} (j = 1 \dots n) = p_i, \sum p_{ij} (i = 1 \dots n) = q_j$$

- Зная совместное распределение X и Y , можно восстановить законы распределения величин X и Y
- Обратное утверждение неверно.
Распределения X и Y называют маржинальными по отношению к их совместному распределению.



Независимые $\mathcal{X}$

X, Y – независимы $\equiv \{X=x_i\}, \{Y=y_j\}$ независимы, $i=1,2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$;

$$\Rightarrow p_{ij} = P(X = x_i)P(Y = y_j) = p_i q_j$$

Действия над конечными случайными величинами

$$X+Y \Rightarrow X_i+y_j; XY \Rightarrow X_i y_j;$$

Свойства:

$$(X + Y) + Z = X + (Y + Z), (XY)Z = X(YZ)$$

$$X + Y = Y + X, XY = YX$$

$$X(Y + Z) = XY + XZ$$

Теорема:

- Пусть независимые $X_1, X_2, \dots, X_n$ бернуллиевы случайные величины:

$$X_1 = X_2 = \dots = X_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}_{n,p} = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$



Свойства:

$$1. Mc = c \Rightarrow Mc = c \cdot I = c \quad c = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2. X \geq 0 \Rightarrow MX \geq 0$$

$$3. M(cX) = cMX$$

$$4. M(X \pm Y) = \sum_{i,j} (x_i \pm y_j) p_{ij} = M(X) \pm M(Y)$$

$$5. M(c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n) = c_1 MX_1 + c_2 MX_2 + \dots + c_n MX_n$$

МХ биномиальной X

$$B_{n,p} = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

где $X_1 = X_2 = \dots = X_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}}_{\text{Бернуллиевы величины}}$

$$\Rightarrow MB_{n,p} = MX_1 + MX_2 + \dots + MX_n$$

$$MX_i = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

$MB_{n,p}$ сумма n одинаковых слагаемых, равных p , т.е.

$$MB_{n,p} = np$$



Пример

$U: \{W=4, B=6\}$ наугад вынимают шар и возвращают обратно. Опыт повторяют 10 раз = W шар. X — число успешных испытаний.

Биномиальная случайная величина при $n = 10$ и $p = 0,4$ (вероятность успеха)

$$\Rightarrow MX = MB_{10, 0,4} = 10 \cdot 0,4 = 4$$



СВОЙСТВО 5

$$M(X - MX) = MX - M(MX) = MX - MX = 0$$

Центрированная $Y = X - MX$, при $MY = 0$

СВОЙСТВО 6

$$M(X \bullet Y) = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij}$$

Для независимых случайных величин $p_{ij} = p_i q_j$

$$M(X \bullet Y) = \sum_{i,j} x_i y_j p_i q_j = \left(\sum_{i=1}^m x_i p_i \right) \left(\sum_{j=1}^n y_j q_j \right) = MX \bullet MY$$



Дисперсия

$$DX = M(X - MX)^2.$$

Случайная величина $(X - MX)^2$ распределена по закону

$$\left(\begin{array}{c} (x_i - MX)^2 \\ p_i \end{array} \right),$$

$$DX = \sum_{i=1}^n (x_i - MX)^2 p_i = |X_i - MX|_{P_0}^2$$

Среднеквадратичное отклонение

$$\sqrt{\frac{\sigma^2(x)}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{DX}$$

стандартное отклонение

Свойства:

- $DX \geq 0$
- $D(cX) = c^2 DX$
- $D(X + c) = DX; D(aX + b) = a^2 DX$
- $D(X + Y) = DX + DY$ (X и Y независимы)
- $DX = MX^2 - (MX)^2$

Пример с $\mathcal{U}...$

U: B=3, W=2. Из U наугад вынимают 2 шара. X — число W среди вынутых. закон распределения X

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$MX = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,1 = 0,8$$

$$DX = (0 - 0,8)^2 \cdot 0,3 + (1 - 0,8)^2 \cdot 0,6 + (2 - 0,8)^2 \cdot 0,1 = 0,64 \cdot 0,3 + 0,04 \cdot 0,6 + 1,44 \cdot 0,1 = 0,36$$

по формуле 5 X^2 имеет распределение $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}$
и $MX^2 = 1$

$$\Rightarrow DX = 1 - 0,8^2 = 0,36$$



$$DB_{n,p}$$

$$X_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, i = 1, 2, \dots, n.$$

$$Db_{n,p} = DX_1 + DX_2 + \dots + DX_n$$

$$\wedge X^2 = X u MX = MX^2 = p$$

$$\Rightarrow DX_i = p - p^2 = p(1 - p) = pq$$

$$DB_{n,p} = npq$$

Стандартизация X

не меняет *дисперсии*

$$D X = M(X - MX - 0)^2 = DX.$$

Случайная величина

$$X^* = \frac{X - MX}{\sqrt{DX}} = \frac{X - MX}{\sqrt{DX}}$$

называется стандартизованной (по отношению к X) или просто стандартизацией X

$$MX^* = \frac{1}{\sqrt{DX}} M(X - MX) = 0,$$

$$DX^* = \frac{1}{DX} D(X - MX) = \frac{1}{DX} DX = 1.$$



Ковариация X и Y

$$\text{cov}(X, Y) = M(\overset{\boxtimes}{X} \overset{\boxtimes}{Y}) = M[(X - MX)(Y - MY)].$$

Свойства:

1. $\text{Cov}(X, Y) = M(X \cdot Y) - MX \cdot MY$
2. $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
3. $\text{cov}(X, X) = DX$
4. $D(X + Y) = DX + DY + 2\text{cov}(X, Y)$
5. $\text{cov}(X, Y) = 0$, для независимых (X, Y)

$$\text{cov}(X, Y) = M \overset{\boxtimes}{X} M \overset{\boxtimes}{Y} = 0$$

Коэффициент корреляции между случайными величинами:

$$r_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

Свойства

1. $r_{X,Y} = M(X^*Y^*)$
2. $r_{X,Y} = r_{X^*,Y^*}$ т.к. $MX^* = MY^* = 0, DX^* = DY^* = 1$
$$r_{X^*,Y^*} = \frac{M[(X^* - MX^*)(Y^* - MY^*)]}{\sqrt{DX^*} \sqrt{DY^*}} = M(X^*Y^*) = r_{X,Y}.$$
3. $|r_{X,Y}| \leq 1$
4. X и Y независимы $\Rightarrow r_{XY} = 0$
5. коэффициент корреляции равен $\pm 1 \equiv$ случайные величины линейно зависимы $|r_{X,Y}| = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b$