

Признаки делимости

Лекция 6

курс 2

Задача

- Найдите сумму остатков, получившихся при делении числа

$$x = 5.143.628.457.913.427$$

на 2,3,4,5,9,25.

- 5квадриллионов 143 триллиона 628 миллиардов 457 миллионов 913 тысяч 427

- Для решения этой задачи необходимо знать признаки делимости на 2, на 3, на 4, на 5, на 9, на 25

Теорема: Признак делимости на 2

- Для того чтобы число x делилось на 2 необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась одной из цифр 0,2,4,6,8.

- А: десятичная запись числа x оканчивается одной из цифр 0,2,4,6,8.
- В: число x делится на 2.

$$A \Leftrightarrow B$$

Теорема разбивается на 2 части

1. $A \Rightarrow B$ достаточное условие
2. $B \rightarrow A$ необходимое условие

- 1. Докажем достаточное условие:
- Если десятичная запись числа x оканчивается одной из цифр 0,2,4,6,8, то число x делится на 2.

Доказательство :

- 1. Пусть натуральное число

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

и a_0 принимает значение 0,2,4,6,8.

Так как $10 \equiv 2$, то $10^i \equiv 2$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$

Значит, $(a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_1 \cdot 10) \equiv 2$

По условию a_0 тоже делится на 2.

- Значит число x можно рассматривать как сумму двух слагаемых, каждое из которых делится на 2:

$$x = (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_1 \cdot 10) + a_0$$

Согласно признаку делимости суммы,
число x делится на 2

- 2. Докажем необходимое условие:
- Если натуральное число x делится на 2, то десятичная запись числа x оканчивается одной из цифр 0,2,4,6,8.

- Пусть натуральное число

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

Преобразуем это равенство

$$a_0 = x - (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_1 \cdot 10)$$

$$x \equiv (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_1 \cdot 10) \pmod{10}$$

По теореме о делимости разности : $a_0 \equiv 0 \pmod{10}$.

Значит a_0 оканчивается цифрой 0,2,4,6,8.

Что и требовалось доказать.

Следствие

- Если натуральное число x не делится на 2, то остаток от деления этого числа на 2 равен остатку от деления последней цифры на 2.

Значит число $x = 5.143.628.457.913.427$
на 2 не делится,

но остаток от деления x на 2 равен
остатку от деления последней цифры
этого числа на 2;

$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

Значит остаток от деления числа x на 2 равен 1.

Теорема: признак делимости на 5

- Для того чтобы натуральное число x делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась цифрой 0 или 5.
- Доказать самостоятельно

Следствие

- Если натуральное число x не делится на 5, то остаток от деления этого числа на 5 равен остатку от деления последней цифры на 5

Следовательно, число

$$x = 5.143.628.457.913.427$$

на 5 не делится,

но остаток от деления x на 5 равен
остатку от деления последней цифры
этого числа на 5;

$$7 = 5 \cdot 1 + 2$$

Значит остаток от деления числа x на 5 равен 2.

Теорема: признак делимости на 4

- Для того чтобы натуральное число x делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы на 4 делилось двузначное число, образованное двумя последними цифрами десятичной записи числа x .

- A : двузначное число, образованное последними двумя цифрами десятичной записи числа x , делится на 4
- B : число x делится на 4.

$$A \Leftrightarrow B$$

Теорема разбивается на 2 части

1. $A \Rightarrow B$ достаточное условие
2. $B \rightarrow A$ необходимое условие

- 1. Докажем достаточное условие:
- Если двузначное число, образованное двумя последними цифрами десятичной записи числа x делится на 4, то натуральное число x делится на 4.

- Пусть натуральное число

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

и $\overline{a_1 a_0} \not\equiv 4$ Так как $100:4, 1000:4, \dots$, то сумма

$$(a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 10^2) \equiv 4$$

Представим число x в виде суммы двух слагаемых,
кратных 4:

$$x = (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 10^2) + (a_1 \cdot 10 + a_0)$$

Согласно признаку делимости суммы, число x кратно 4.

- 2. Докажем необходимое условие:
- Если число x делится на 4, то число, образованное двумя последними цифрами десятичной записи числа x , делится на 4.

- Пусть натуральное число

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

Преобразуем это равенство

$$a_1 \cdot 10 + a_0 = x - (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10^2)$$

$$x \equiv (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10^2) \pmod{10}$$

По теореме о делимости разности : $(a_1 \cdot 10 + a_0) \equiv 0 \pmod{10}$

Что и требовалось доказать.

Следствие

- Если число x не делится на 4, то остаток от деления этого числа на 4 равен остатку от деления числа, составленного из двух последних цифр, на 4.

Тогда число $x = 5.143.628.457.913.427$
на 4 не делится.

Остаток от деления x на 4 равен остатку
от деления числа 27 на 4.

$$27 = 4 \cdot 6 + 3$$

Значит остаток от деления числа x на 4 равен 3.

Теорема: признак делимости на 25

- Для того чтобы число x делилось на 25, необходимо и достаточно, чтобы на 25 делилось двузначное число, образованное двумя последними цифрами десятичной записи числа x .
- Доказать самостоятельно

Следствие

- Если число x не делится на 25, то остаток от деления этого числа на 25 равен остатку от деления числа, составленного из двух последних цифр, на 25.

Число $x = 5.143.628.457.913.427$
и на 25 не делится.

Остаток от деления x на 25 равен
остатку от деления числа 27 на 25.

$$27 = 25 \cdot 1 + 2$$

Значит остаток от деления числа x на 25 равен 2

Теорема: признак делимости на 9

- Для того чтобы число x делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 9.

- А: Сумма цифр его десятичной записи делится на 9
- В: число x кратно 9.
- Теорема разбивается на 2 части:
- 1. достаточное условие $A \Rightarrow B$
- 2. необходимое условие $B \rightarrow A$

Лемма:
вспомогательная теорема

- Число вида $(10^n - 1) \cdot 9$

Например, $1000 - 1 =$

$$10^3 - 1 = 1000 - 1 = 999 = 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 9$$

- Доказательство:

- Преобразуем число $x = (10^n - 1)$

$$\begin{aligned}x &= 10^n - 1 = (9 \cdot 10^{n-1} + 10^{n-1}) - 1 = \\&= (9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + 10^{n-2}) - 1 = \dots \\&= (9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + \dots + 10) - 1 = \\&= 9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + \dots + 9\end{aligned}$$

По теореме о делимости суммы делаем вывод, что число x кратно 9.

Доказательство:
(достаточное условие)

- Дано:

$$\begin{aligned} x = & a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + \\ & + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \quad \text{и} \\ & (a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_0) \equiv 9 \end{aligned}$$

- Доказать, что x кратно 9

- Для доказательства вычтем из числа x , а затем прибавим к нему сумму

$$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_0$$

- Получим:

$$\begin{aligned}
 x &= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + \\
 &+ a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 - \\
 &- (a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_0) + \\
 &+ (a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_0) =
 \end{aligned}$$

Применив правила вычитания, имеем:

$$\begin{aligned} &= (a_n \cdot 10^n - a_n) + (a_{n-1} \cdot 10^{n-1} - a_{n-1}) + \dots + \\ &+ (a_1 \cdot 10 - a_1) + (a_0 - a_0) + \\ &+ (a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_0) \end{aligned}$$

- Используя дистрибутивность умножения относительно вычитания, имеем:

$$x = a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \dots + a_1(10 - 1) + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_0)$$

На основании теоремы о делимости суммы можно сделать вывод: число x кратно 9

Необходимое условие

- Дано: $x \in \mathbb{R}$
- Доказать, что $(a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_0) \in \mathbb{R}$

Доказательство:

- Из равенства

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + \\ + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

выделим сумму $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_0$

- После преобразований получим:

$$\begin{aligned} a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_0 &= \\ &= x - [a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \dots + a_1(10 - 1)] \end{aligned}$$

Так как уменьшаемое и вычитаемое кратно 9, следовательно и разность будет кратна 9.

Что и требовалось доказать.

Проверим делится ли число $x =$
 $5.143.628.457.913.427$ на 9.

$5+1+4+3+6+2+8+4+5+7+9+1+3+4+2+7=71,$
но $\overline{71:9}$

Остаток от деления x на 9 равен остатку
от деления числа 71 на 9.

$$71 = 9 \cdot 7 + 8$$

Значит остаток от деления числа x на 9 равен 8.

Теорема: признак делимости на 3

- Для того чтобы число x делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 3.
- Доказать самостоятельно

Проверим делится ли число $x =$
 $5.143.628.457.913.427$ на 3.

$5+1+4+3+6+2+8+4+5+7+9+1+3+4+2+7=71,$
но $\overline{71:3}$

Остаток от деления x на 3 равен остатку
от деления числа 71 на 3.

$$71 = 3 \cdot 23 + 2$$

Значит остаток от деления числа x на 3 равен 2.

- Ответ:

- Остаток от деления числа

$$X=5143628457913427$$

- На 2 равен 1

- На 3 равен 2

- На 4 равен 3

- На 5 равен 2

- На 9 равен 8

- На 25 равен 2.

- Сумма остатков равна $1+2+3+2+8+2= 18$.

Задание:

- Сформулируйте признак делимости на 8 и 125; 16 и 225.

Спасибо за внимание