

ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

ЛЕКЦИЯ 9

2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)



2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

2.8. Выпуклые конусы.



2.9. Выпуклые конусы и частичная упорядоченность.



2.10. Многокритериальная оптимизация.



2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

2.8. Выпуклые конусы. Выпуклый конус – один из основных объектов изучения теории экстремальных задач.

Определение 13. Множество $K \subset R^n$ называется конусом, если из $u \in K$ и $\lambda \geq 0$ следует, что $\lambda u \in K$.

Если множество K выпукло, то конус называется выпуклым, если замкнуто – замкнутым, если открыто – открытым.

Пример 10. Множества

$$K_1 = \{u \in R^n \mid \langle a, u \rangle = 0\}, \quad K_2 = \{u \in R^n \mid \langle a, u \rangle \leq 0\},$$

$$K_3 = \{u \in R^n \mid \langle a, u \rangle < 0\}, \quad K_4 = \{u \in R^n \mid u \geq 0\}$$

являются выпуклыми конусами, при этом множества K_1, K_2, K_4 замкнутые,

а множество K_3 – открытое.

Здесь и далее запись $u \geq (\leq, >, <) 0$ означает, что каждая координата вектора u $(\leq, >, <) 0$.

Пример 11. Угол на плоскости раствора, меньшего чем π является выпуклым конусом.

Упражнение 1. Доказать, что пересечение выпуклых конусов является выпуклым конусом.

Решение.

Ранее было установлено, что пересечение выпуклых множеств выпукло. Докажем, что пересечение конусов—конус.

Пусть $K \subset R^n$ и $L \subset R^n$ конусы. Полагаем $M = K \cap L$. Требуется доказать, что M – конус. Пусть $u \in M$ и $\lambda > 0$. Имеем

$$u \in K, u \in L \Rightarrow \lambda u \in K, \lambda u \in L \Rightarrow \lambda u \in K \cap L = M$$

Утверждение доказано.

В частности, пересечение множеств типа $K_2 = \{u \in R^n \mid \langle a, u \rangle \leq 0\}$, называют многогранным углом.

Приведем некоторые свойства выпуклых конусов.

Теорема 19. Пусть $K \subset R^n$ — выпуклый конус. Если $u_1, \dots, u_m \in K$,
 $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0$, то $\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i \in K$.

Доказательство. Положим $\lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i$ и будем считать, что $\lambda \neq 0$. Очевидно,

что

$$\beta_i = \frac{\lambda_i}{\lambda} \geq 0, i = 1, \dots, m$$

~~λ~~

и

$$\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda} \beta_i = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1.$$

~~β_i~~

Тогда в силу выпуклости множества K справедливо включение $\sum_{i=1}^m \left(\frac{\lambda_i}{\lambda} \right) u_i =$
 $= \sum_{i=1}^m \beta_i u_i \in K$. С другой стороны по определению конуса имеем

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i = \lambda \cdot \left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{\lambda_i}{\lambda} \right) u_i \right] = \lambda \cdot \left[\sum_{i=1}^m \beta_i u_i \right] \in K.$$

Теорема доказана.

Приведем важный пример конуса.

Упражнение 1. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$. Доказать, что множество

$$\text{con}U = \{u = av \mid v \in U, a > 0\}$$

(конусная оболочка) является конусом.

Решение.

Пусть $u \in \text{con}U$. Тогда $u = av$, где $a > 0, v \in U$. Для всех $\lambda > 0$ имеем

$$\lambda u = (\lambda a) v \in \text{con}U.$$

Таким образом, $\text{con}U$ - конус.

Теорема 20. Если множество $U \subset \mathbb{R}^n$ выпукло, то $\text{con}U$ - выпуклый конус, причем если $v \in \text{int}U$, $a > 0$, то $u = av \in \text{int}(\text{con}U)$.

Доказательство. Возьмем произвольные точки $u_1, u_2 \in \text{con}U$. Тогда

$$u_1 = a_1 v_1, u_2 = a_2 v_2, \quad v_1, v_2 \in U, \quad a_1, a_2 > 0.$$

Покажем, что для любых $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ выполнено включение

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 \in \text{con}U.$$

Из условия $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ следует $\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 > 0$.

Тогда

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 = (\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2) \cdot \left[\frac{\alpha_1 \lambda_1}{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2} v_1 + \frac{\alpha_2 \lambda_2}{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2} v_2 \right].$$

Из выпуклости U и равенства $\frac{\alpha_1 \lambda_1}{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2} + \frac{\alpha_2 \lambda_2}{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2} = 1$ выводим

$$\frac{\alpha_1 \lambda_1}{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2} v_1 + \frac{\alpha_2 \lambda_2}{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2} v_2 \in U \Rightarrow \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in U \quad \text{con} U.$$

Выпуклость множества $\text{con} U$ доказана.

Далее пусть $u = a v$, $a > 0$, $v \in \text{int} U$. Для малых $e > 0$ имеем

$$\begin{aligned} u + O(0, a e) &= \{a v\} + O(0, a e) = a \{v\} + O(0, e) \quad a U = \\ &= \left\{ u = a w \mid w \in U \right\} \cap \left\{ u = b w \in R^n \mid b > 0, w \in U \right\} = \text{con} U \ni \\ &\quad u \in \text{int}(\text{con} U). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

2.9. Выпуклые конусы и частичная упорядоченность. Используя понятие выпуклого конуса в пространстве R^n можно ввести частичный порядок его элементов, т.е. ввести отношение «больше».

Определение 14. Пусть $K \subset R^n$ – выпуклый конус. Будем говорить, что $u \in R^n$ не меньше (строго больше) $v \in R^n$, если $u - v \in K$ ($u - v \in \text{int } K$). В этом случае будем писать $u \overset{K}{\geq} v$ ($u \overset{K}{>} v$).

Когда ясно, о каком конусе идет речь, писать будем просто " $\geq$ ", " $>$ ".

Принимаем также, что отношение $u \geq v$ ($u > v$) эквивалентно отношению $v \leq u$ ($v < u$). Заметим, что если $u \in K$ ($u \in \text{int } K$), то $u \overset{K}{\geq} 0$ ($u \overset{K}{>} 0$).

Перечислим и докажем ряд свойств введенного отношения, присущие обычным неравенствам.

Теоремы 18. Пусть $K \subset R^n$ – выпуклый конус. Если $u_1, \dots, u_m \in K$, $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0$, то $\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i \in K$.

1. Из $u \geq v$ следует, что $\alpha u \geq \alpha v$ при $\alpha \geq 0$.

Неравенство $u \geq v$ означает, что $u - v \in K \Rightarrow \alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v \in K \Rightarrow \alpha u \geq \alpha v$.

2. Если $u_1 \geq v_1$ и $u_2 \geq v_2$, то $u_1 + u_2 \geq v_1 + v_2$.

Справедливы включения $u_1 - v_1 \in K, u_2 - v_2 \in K$. В силу теоремы 18 имеем

$$\begin{aligned} (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) \in K &\Rightarrow u_1 - v_1 + u_2 - v_2 = (u_1 + u_2) - (v_1 + v_2) \in K \Rightarrow \\ u_1 + u_2 &\geq v_1 + v_2. \end{aligned}$$

3. Если $u \geq v, v \geq w$, то $u \geq w$.

Из включений $(u - v), (v - w) \in K$ в силу теоремы 18 выводим

$$(u - v) + (v - w) \in K \Rightarrow (u - v) + (v - w) = u - w \in K \Rightarrow u \geq w.$$

В случае, когда конус K замкнутый, справедливо еще одно свойство

4. Если $\{u_k\} \rightarrow u_0, \{v_k\} \rightarrow v_0, u_k \geq v_k, k = 1, 2, \dots$, то $u_0 \geq v_0$.

Для всех номеров $k = 1, 2, \dots$ справедливо включение $\overset{\rightarrow u_0}{u_k} - \overset{\rightarrow v_0}{v_k} \in K$. Переходя в нем

к пределу при $k \rightarrow \infty$ в силу замкнутости конуса K получим $u_0 - v_0 \in K \Rightarrow u_0 \geq v_0$.

Упражнение. Какую упорядоченность вводит конус

$$K = \{u \in R^1 \mid u \geq 0\}$$

в пространстве R^1 — множестве действительных чисел, а конус

$$K_n = \{u = (u^1, \dots, u^n) \in R^n \mid u^i \geq 0, i = 1, \dots, n\} —$$

в пространстве R^n — множестве n — мерных векторов.

Решение. Конус $K = \{u \in R^1 \mid u \geq 0\}$ вводит естественную упорядоченность на множестве действительных чисел.

Конус $K_n = \{u = (u^1, \dots, u^n) \in R^n \mid u^i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ частично упорядочивает n — мерные вектора по признаку: вектор u больше либо равен вектора v , если каждая координата вектора u больше либо равна соответствующей координаты вектора v .

2.10. Многокритериальная оптимизация. Пусть $F_i : \Sigma \rightarrow R^1, i = 1, \dots, n$

набор из n функций, определенных на множестве Σ произвольной природы.

Задача состоит в том, чтобы выбором элемента $\sigma \in \Sigma$ минимизировать каждую из этих функций. Такую задачу обычно называют задачей оптимизации с векторным критерием. В общем случае эта задача, очевидно, решения не имеет. Однако можно искать оптимум в смысле частичной упорядоченности значений векторного критерия, задаваемой некоторым выпуклым конусом.

Рассмотрим задачу векторной оптимизации $F_i(u) \in \min, u \in U \subset R^n, i = 1, \dots, r$, где U - компактное множество, а $F_i \in C(U)$. В пространстве R^r - значений критериев введем частичную упорядоченность. Будем говорить, что точка

$$F^{(1)} = \begin{pmatrix} F_1^{(1)} \\ \vdots \\ F_i^{(1)} \\ \vdots \\ F_r^{(1)} \end{pmatrix} \text{ меньше точки } F^{(2)} = \begin{pmatrix} F_1^{(2)} \\ \vdots \\ F_i^{(2)} \\ \vdots \\ F_r^{(2)} \end{pmatrix} \text{ если } F_j^{(1)} \leq F_j^{(2)}$$

для всех $j \in \{1, \dots, r\}$ и существует номер $i \in \{1, \dots, r\}$, что $F_i^{(1)} < F_i^{(2)}$.

Упражнение 1. Построить выпуклый конус K_F , который будет определять

введенную частичную упорядоченность.

Решение. $K_F = \left\{ R^r \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_r \end{pmatrix} \mid F_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, r\}, \exists j \in \{1, \dots, r\} : F_j > 0 \right\}$.

Докажем, что конус K_F выпуклый. Пусть

$$F^{(1)}, F^{(2)} \in K_F, \quad F^{(1)} = \begin{pmatrix} F_1^{(1)} \\ \vdots \\ F_i^{(1)} \\ \vdots \\ F_j^{(1)} \\ \vdots \\ F_r^{(1)} \end{pmatrix}, \quad F^{(2)} = \begin{pmatrix} F_1^{(2)} \\ \vdots \\ F_i^{(2)} \\ \vdots \\ F_j^{(2)} \\ \vdots \\ F_r^{(2)} \end{pmatrix} \quad t \in [0, 1]$$

Тогда

$$l F^{(1)} + (1-l) F^{(2)} = \begin{pmatrix} F_1^{(1)} + (1-l) F_1^{(2)} \geq 0 \\ \vdots \\ F_i^{(1)} + (1-l) F_i^{(2)} > 0 \\ \vdots \\ F_j^{(1)} + (1-l) F_j^{(2)} > 0 \\ \vdots \\ F_r^{(1)} + (1-l) F_r^{(2)} \geq 0 \end{pmatrix} K_F$$

Определение 15. Точка u_* , оптимальная в смысле конуса K_F называется оптимальной по Парето, т. е. не существует такой точки $u \hat{=} U$, для которой выполнялось бы $F_i(u) \leq F_i(u_*) \quad i = 1, \dots, k$ и $\exists j \in \{1, \dots, k\} : F_j(u) < F_j(u_*)$.

Множество оптимальных по Парето точек обычно содержит более одной точки.

Полагаем

$$F(u, l_1, \dots, l_r) = \mathop{\text{arg}}_{i=1}^r l_i F_i(u), \quad u \hat{=} U, l_i > 0, i = 1, \dots, r.$$

Теорема 21. Пусть точка $u_* \in U$ такова, что

$$F(u_*) = \min_{u \in U} F(u, l_1, \dots, l_r), \quad l_i > 0, i = 1, \dots, r. \quad (1)$$

Тогда точка u_* - оптимальна по Парето.

Доказательство. От противного приходим к существованию точки $u_{**} \in U$

для которой

$$F_i(u_{**}) \leq F_i(u_*), \quad i = 1, \dots, r, \\ \exists j \in \{1, \dots, r\} : F_j(u_{**}) < F_j(u_*).$$

Тогда

$$\begin{aligned} F(u_{**}, l_1, \dots, l_r) &= \\ &= l_1 F_1(u_{**}) + \dots + l_j F_j(u_{**}) + \dots + l_r F_r(u_{**}) < \\ &< l_1 F_1(u_*) + \dots + l_j F_j(u_*) + \dots + l_r F_r(u_*) = F(u_*, l_1, \dots, l_r) \end{aligned}$$

$$F(u_{**}, l_1, \dots, l_r) < F(u_*, l_1, \dots, l_r).$$

Последнее неравенство противоречит (1). Теорема доказана.

Упражнение 2. Найти все точки Парето в задачи векторной оптимизации

$$\begin{aligned} F_1(u) &= (u-1)^2 \text{ @ min,} \\ F_2(u) &= (u-3)^2 \text{ @ min,} \end{aligned} \quad u \hat{=} U = [0, 3]$$

Решение. Полагаем

$$F(u, l_1, l_2) = l_1(u-1)^2 + l_2(u-3)^2 \text{ @ min, } u \hat{=} R^1, \quad l_1, l_2 > 0$$

$$\begin{aligned} F'(u) = 2l_1(u-1) + 2l_2(u-3) = 0 &\text{ } \Leftrightarrow (l_1 + l_2)u - l_1 - 3l_2 = 0 \text{ } \Leftrightarrow \\ u_* &= \frac{l_1 + 3l_2}{l_1 + l_2}. \end{aligned}$$

Покажем, что $u_* \hat{=} (0, 3)$. Неравенство $u_* > 0$ очевидно. Проверим неравенство $u_* < 3$. Имеем

$$\frac{l_1 + 3l_2}{l_1 + l_2} < 3 \text{ } \Leftrightarrow \overset{>0}{l_1} + \overset{>0}{3l_2} < \overset{>0}{3l_1} + \overset{>0}{3l_2} \text{ } \Leftrightarrow 1 < 3$$

Таким образом, точка u_* является внутренней точкой множества U . При этом

$F''(u) = 2l_1 + 2l_2 > 0$. Тогда u_* - точка минимума функции F и она

оптимальна по Парето. Построим область всех таких точек.

$$u_* = \frac{\frac{l_1}{l_2} + 3}{\frac{l_1}{l_2} + 1} = \frac{t + 3}{t + 1} = 1 + \frac{2}{t + 1}, \quad l_1, l_2 \in (0, +\infty) \ni t \in (0, +\infty)$$

$$u_* \in (1, 3) \ni U_* = [1, 3].$$





