

8.6. ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Производная логарифмической функции

Сначала рассмотрим частный случай
логарифмической функции:

$$y = \ln x$$

Используем схему нахождения производной:

Дадим аргументу x приращение Δx и найдем значение функции $y + \Delta y$:

$$y + \Delta y = \ln(x + \Delta x)$$

Находим приращение функции

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x =$$

По свойству логарифма:

$$= \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

Составляем отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

Находим предел этого отношения:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) =$$

Сделаем замену:

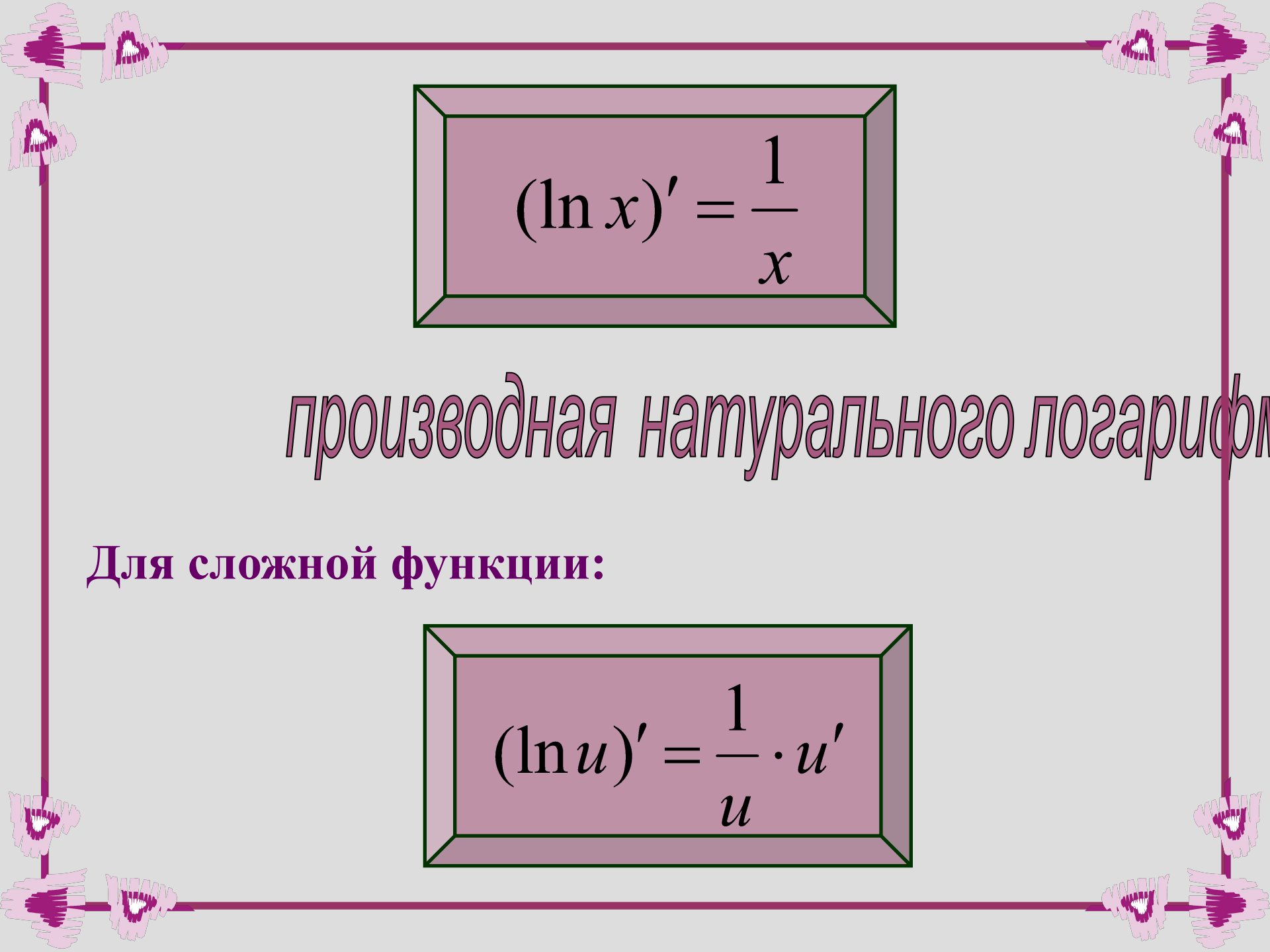
$$\frac{\Delta x}{x} = y ; \Delta x = xy$$

Тогда

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{xy} \ln(1+y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+y)^{\frac{1}{y}} = \frac{1}{x} \lim_{y \rightarrow 0} \ln(1+y)^{\frac{1}{y}} =$$

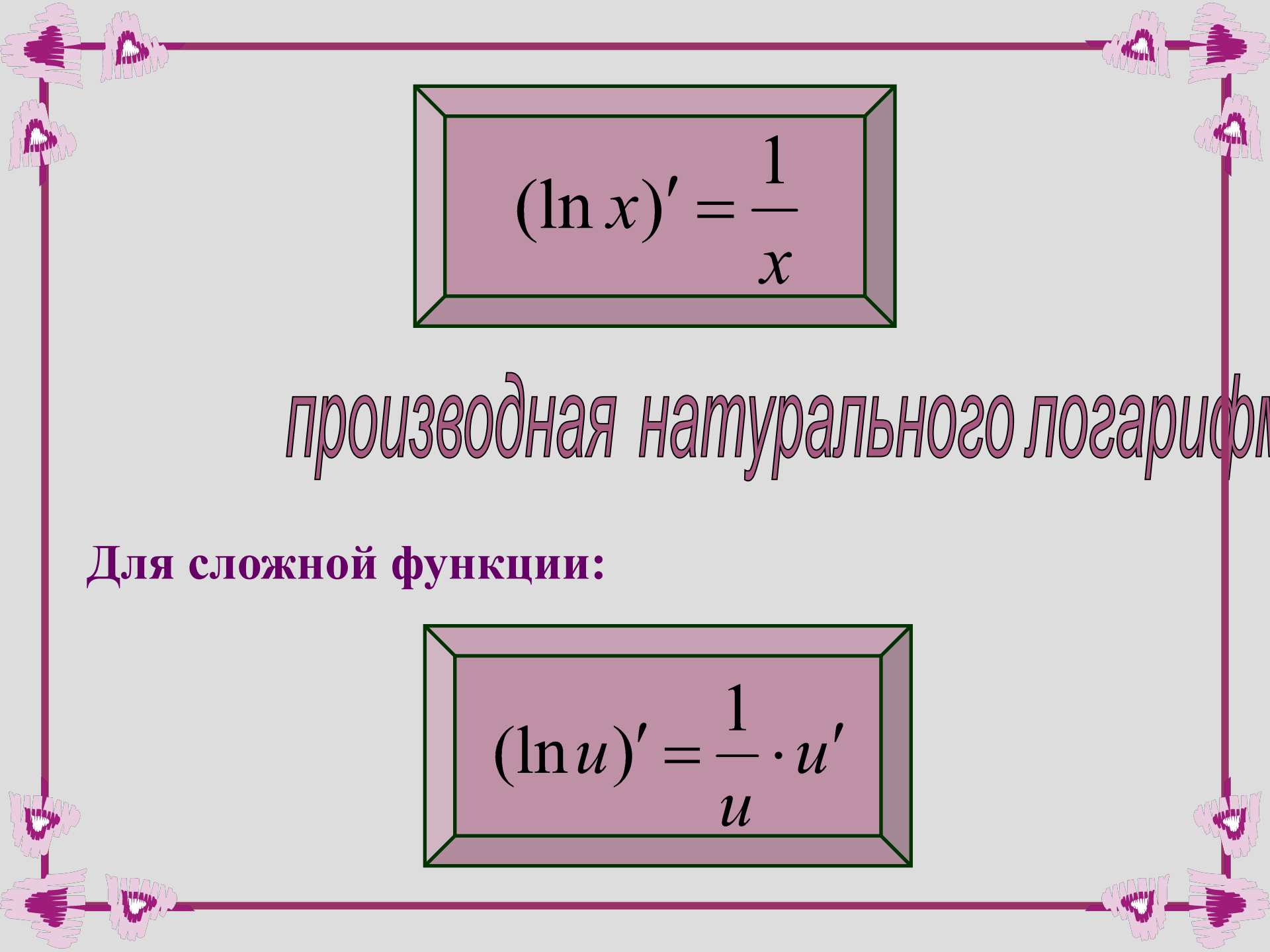
В силу непрерывности логарифмической функции меняем местами знаки логарифма и предела:

$$= \frac{1}{x} \ln \left(\underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}}}_e \right) = \frac{1}{x} \ln \underbrace{e}_1 = \frac{1}{x}$$


$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

производная натурального логарифма

Для сложной функции:

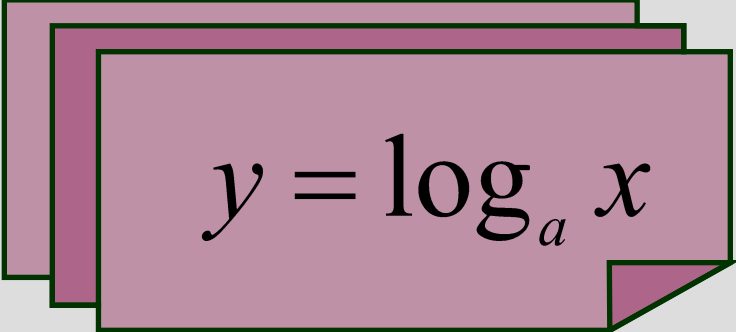

$$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

ПРИМЕР.

$$y = 3 \ln x^2$$

$$y' = (3 \ln x^2)' = 3 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2 \cdot x = \frac{6}{x}$$

Найдем производную для общего случая
логарифмической функции:


$$y = \log_a x$$

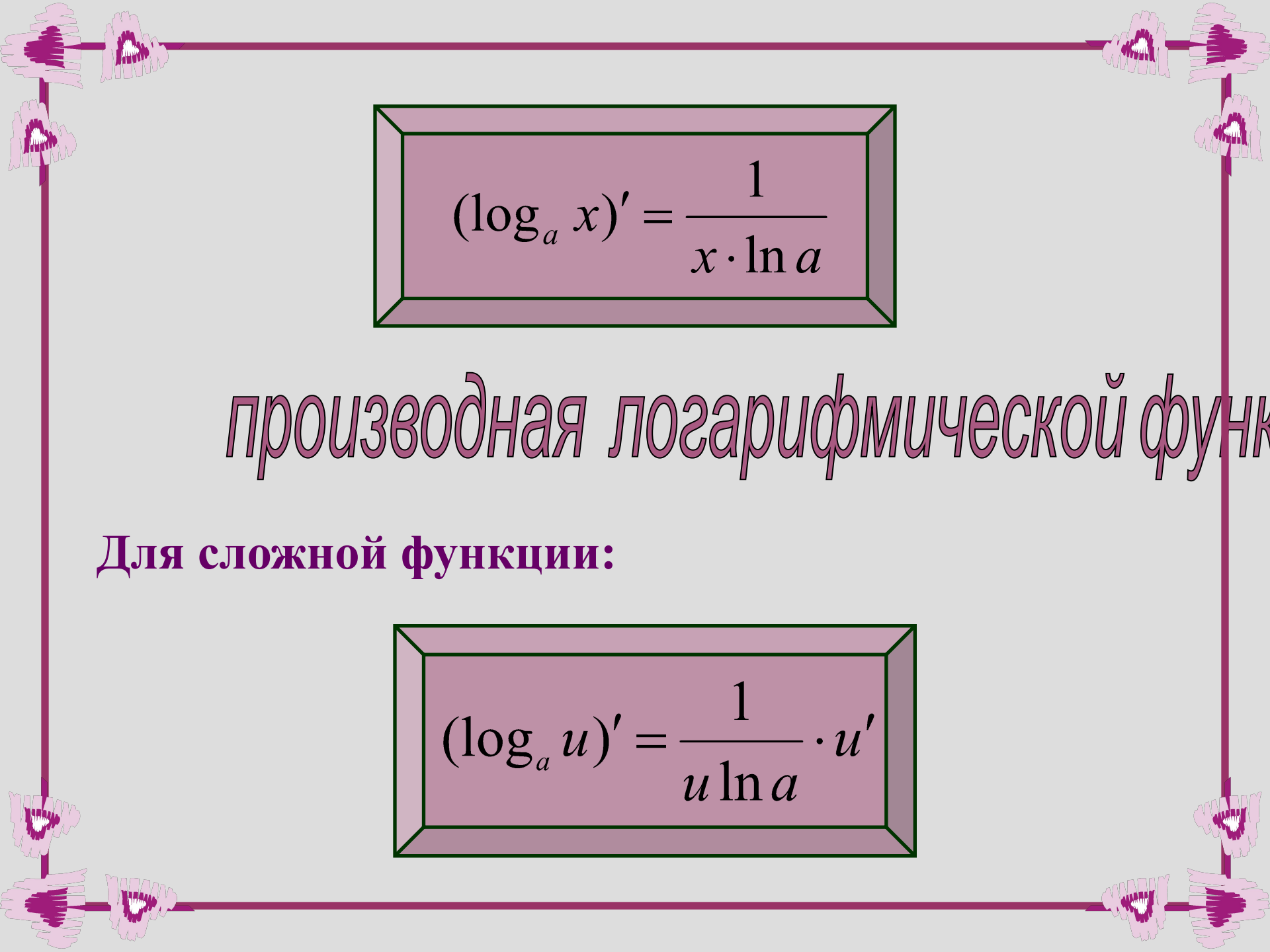
По свойству логарифма

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Тогда

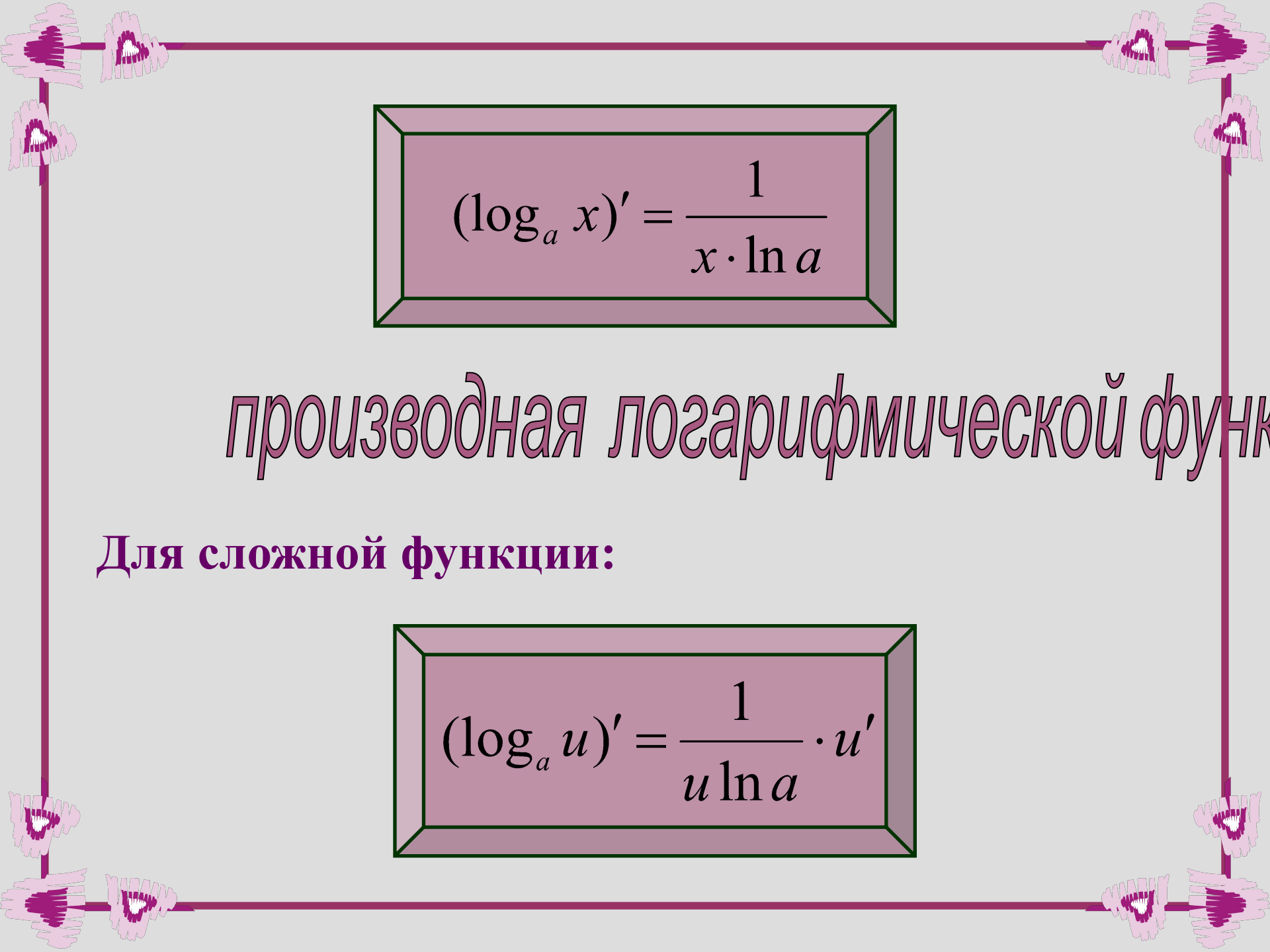
$$y' = (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} \underbrace{(\ln x)'}_{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Отсюда окончательно имеем


$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

производная логарифмической функ

Для сложной функции:


$$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$$

ПРИМЕР.

$$y = \log_5(x^2 + 3x)$$

$$y' = (\log_5(x^2 + 3x))' = \frac{1}{x^2 + 3x} \cdot \frac{1}{\ln 5} \cdot (2x + 3)$$

2. Производная показательной функции

Сначала рассмотрим частный случай
показательной функции:

$$y = e^x$$

Логарифмируем обе части равенства по основанию e :

$$\ln y = \ln e^x = x \ln e = x$$

Дифференцируем обе части равенства по x :

$$(\ln y)' = x' \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = 1$$

Отсюда выражаем искомую производную:

$$y' = y$$

Т.к. $y = e^x$

то окончательно получаем: $y' = e^x$


$$(e^x)' = e^x$$

производная экспоненты

Для сложной функции:


$$(e^u)' = e^u \cdot u'$$

Кривая

$$y = e^x$$

(экспонента) обладает свойством: в каждой точке x ордината y равна угловому коэффициенту касательной к кривой в этой точке:

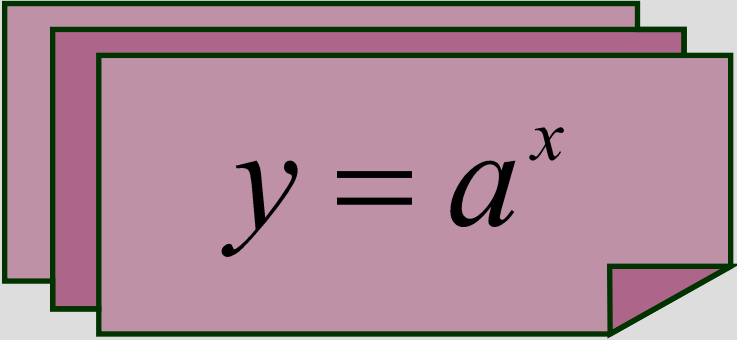
$$e^x = \operatorname{tg} \alpha$$

ПРИМЕР.

$$y = x \cdot e^{5x}$$

$$y' = (x \cdot e^{5x})' = e^{5x} + x \cdot 5 \cdot e^{5x} = e^{5x} (1 + 5x)$$

Найдем производную для общего случая
показательной функции:


$$y = a^x$$

$$y' = (a^x)' =$$

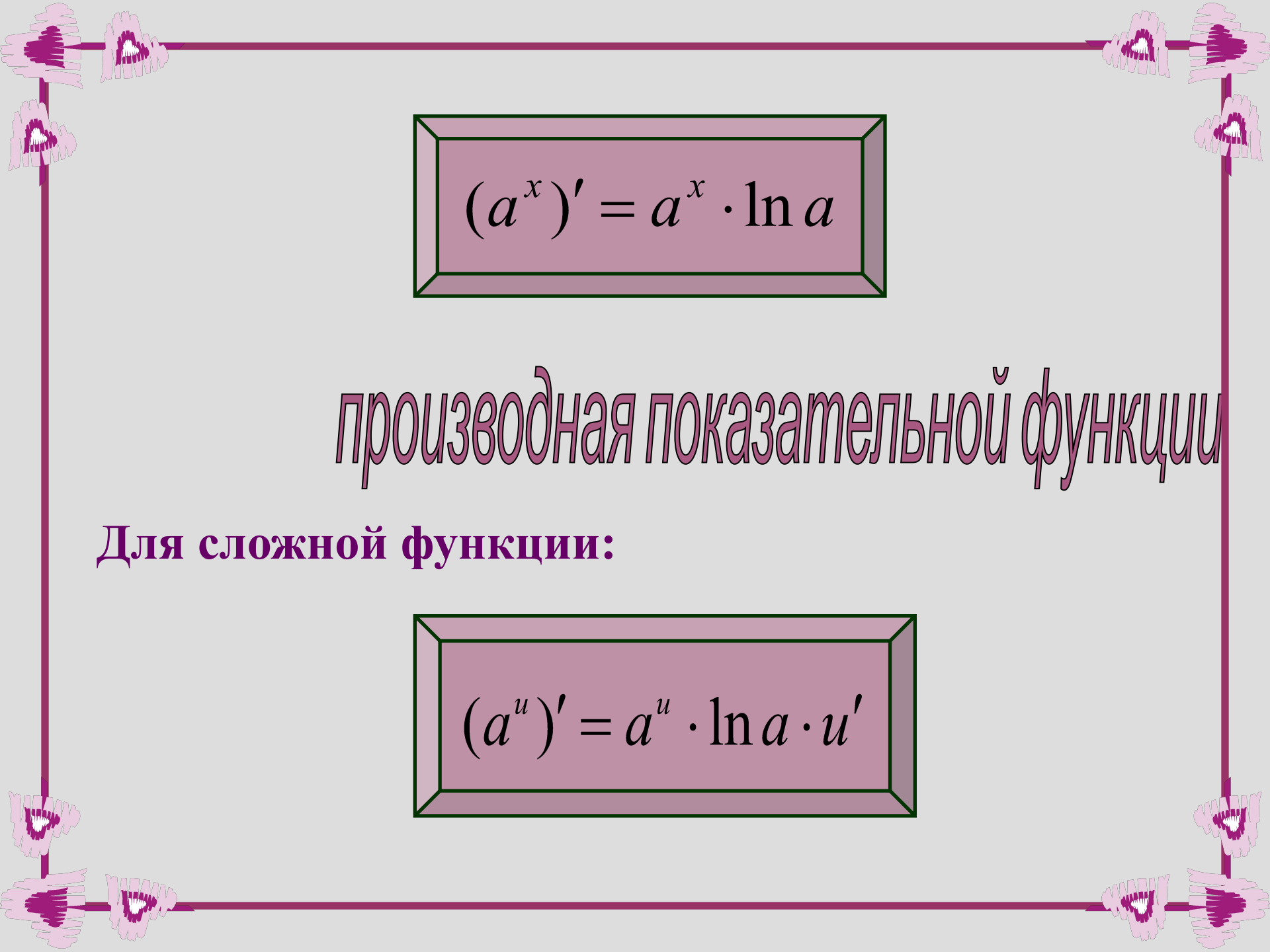
Т.к.

$$a = e^{\ln a}$$

$$\left((e^{\ln a})^x \right)' = (e^{x \ln a})' =$$

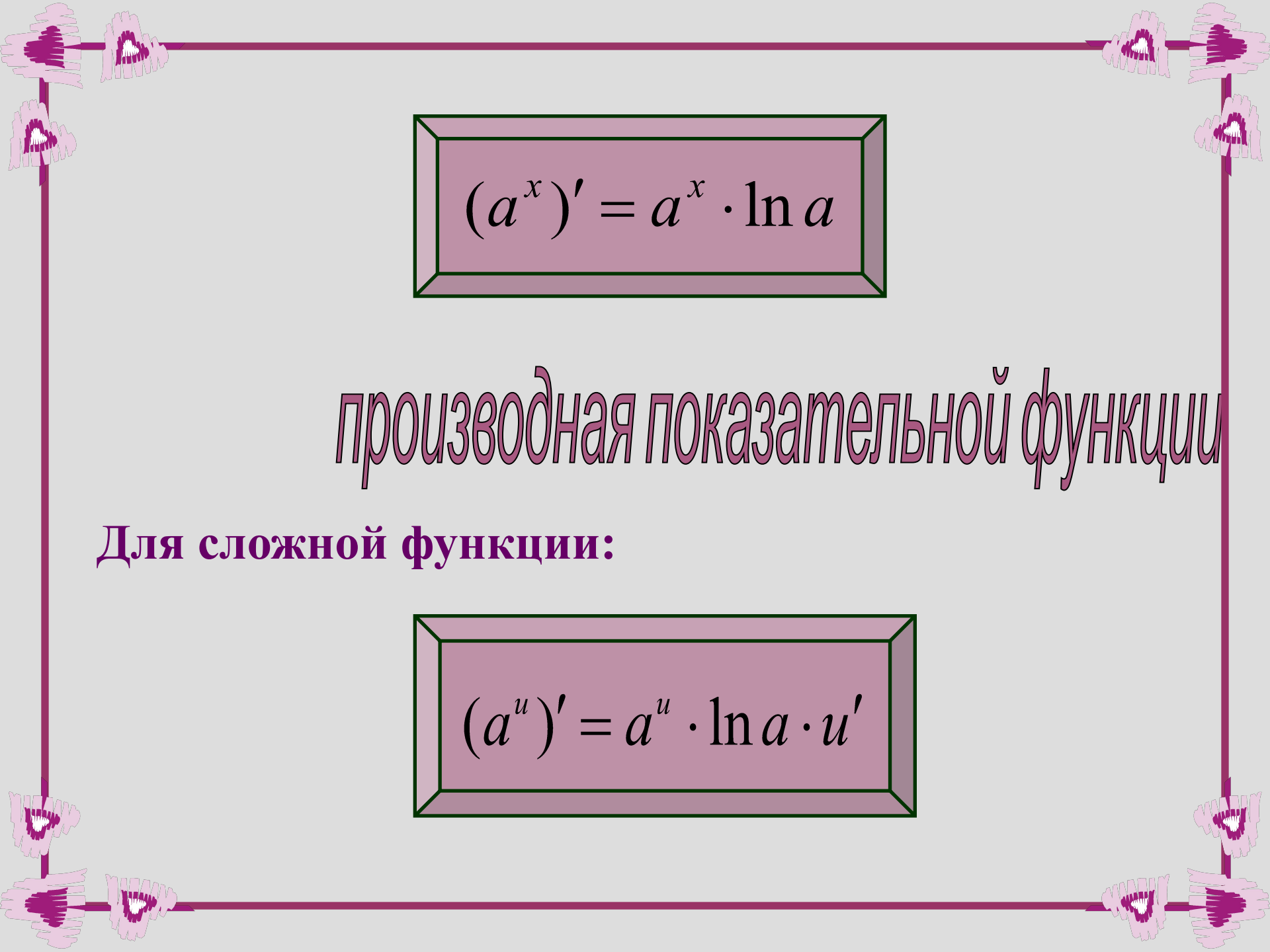
$$= e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

$$a^x$$


$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

производная показательной функции

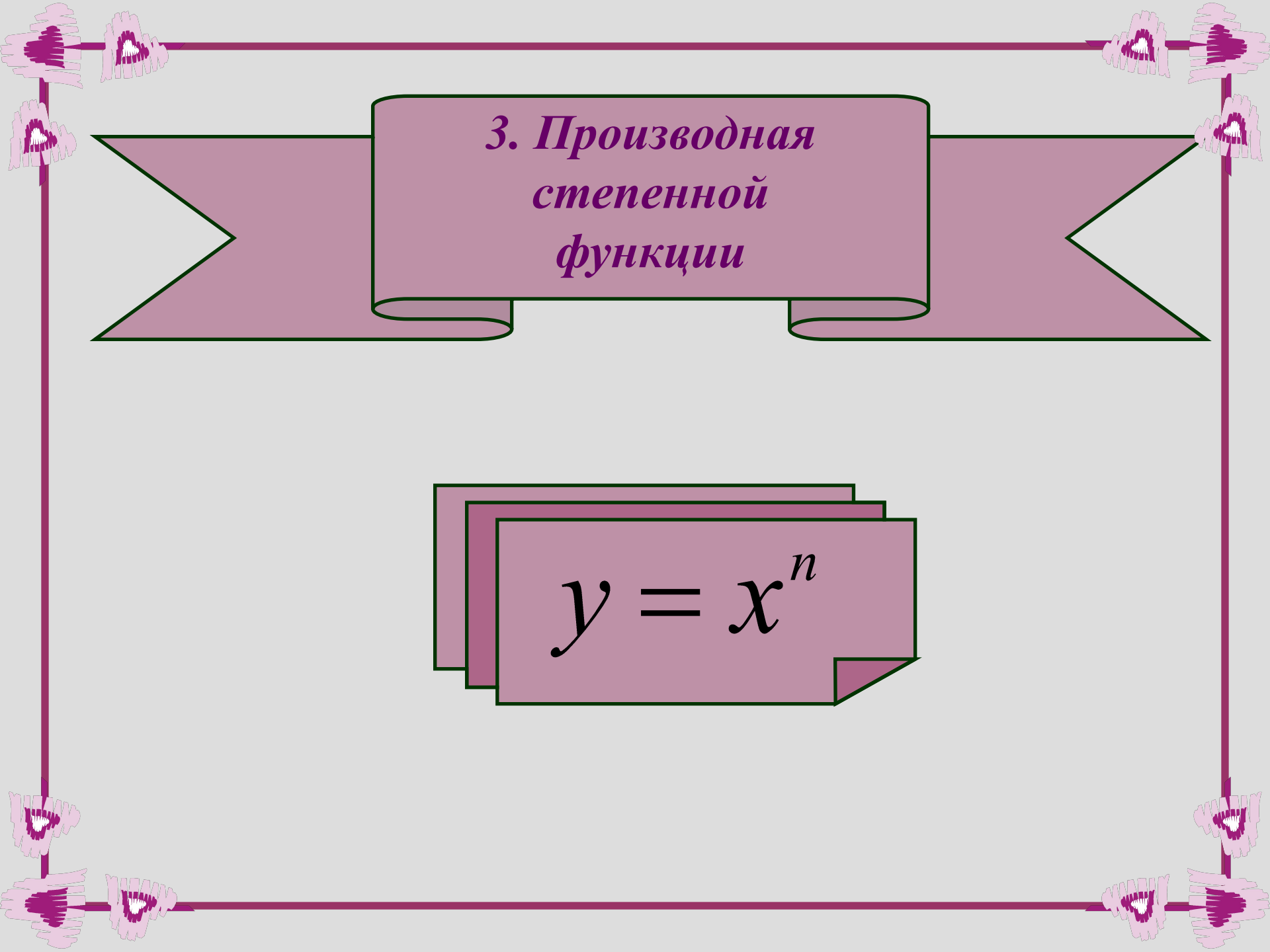
Для сложной функции:


$$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$$

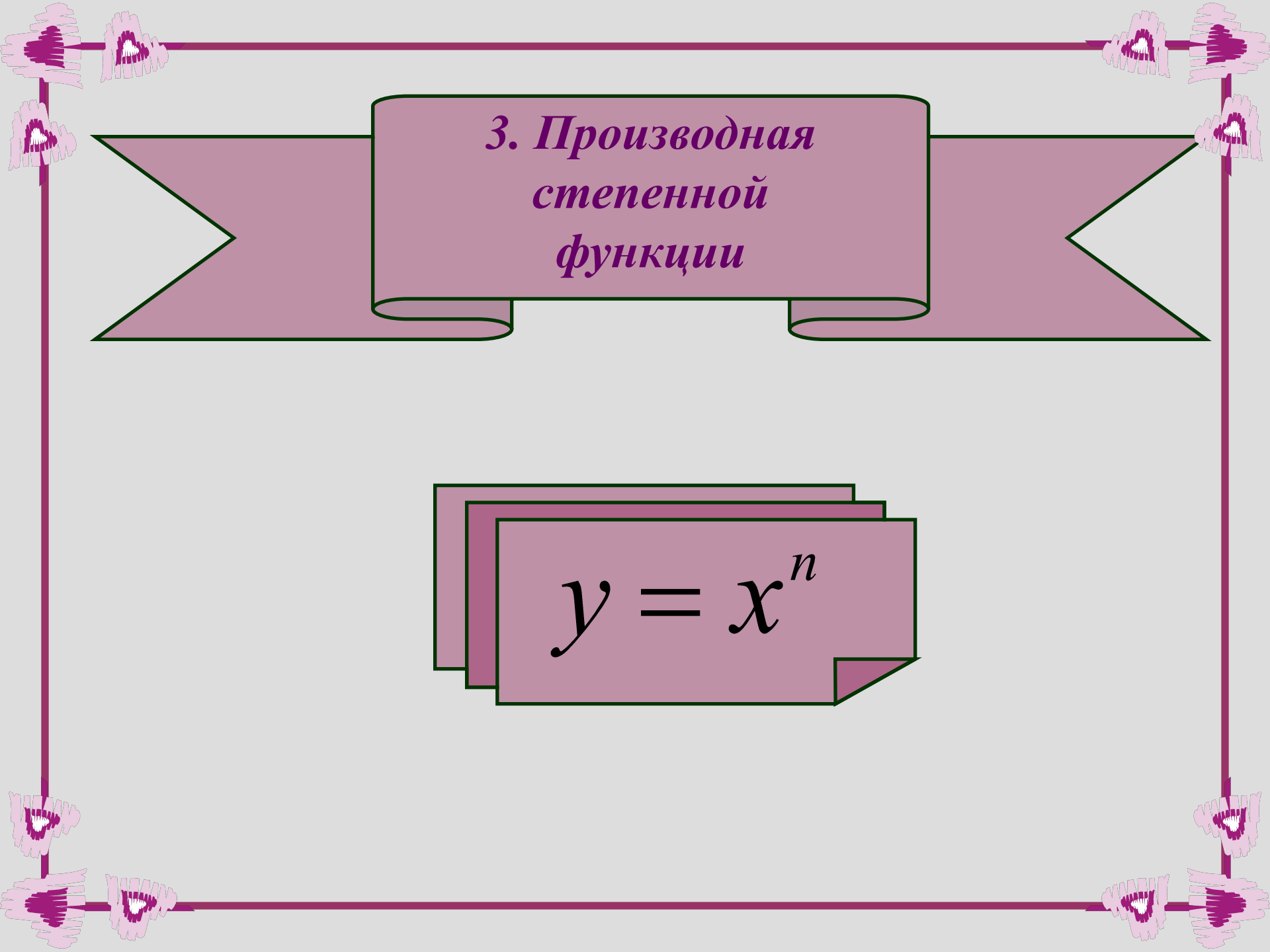
ПРИМЕР.

$$y = 7^{3x^3 + x}$$

$$\begin{aligned} y' &= (7^{3x^3 + x})' = 7^{3x^3 + x} \cdot \ln 7 \cdot (3x^3 + x)' = \\ &= 7^{3x^3 + x} \cdot \ln 7 \cdot (9x^2 + 1) \end{aligned}$$



3. Производная степенной функции

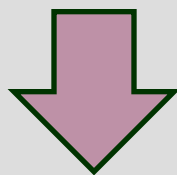

$$y = x^n$$

Логарифмируем обе части равенства по основанию e :

$$\ln y = \ln x^n = n \ln x$$

Дифференцируем обе части равенства по x :

$$(\ln y)' = (n \ln x)'$$



$$\frac{1}{y} \cdot y' = n \cdot \frac{1}{x}$$

Отсюда выражаем искомую производную:

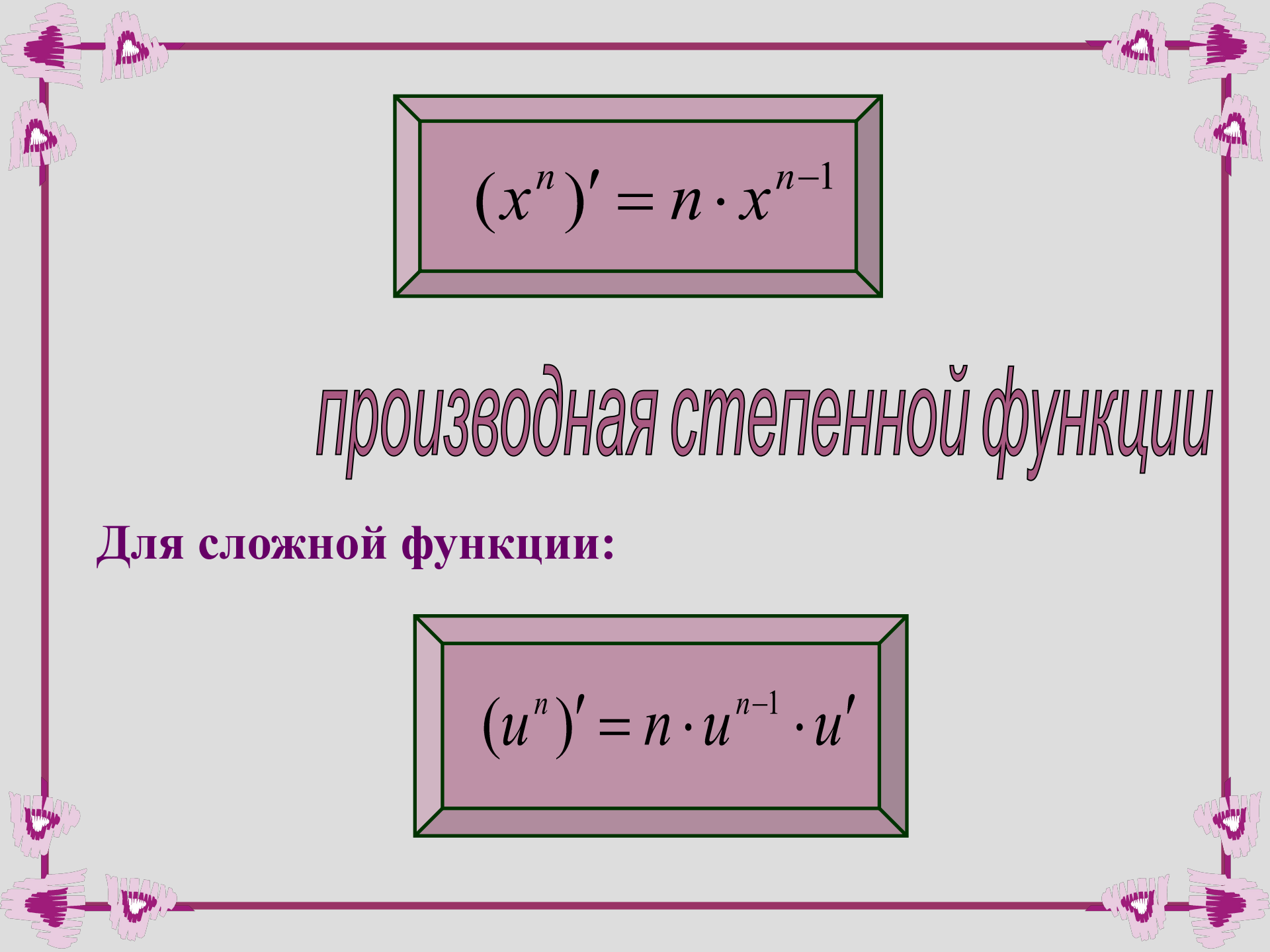
$$y' = y \cdot n \cdot \frac{1}{x}$$

Т.к.

$$y = x^n$$

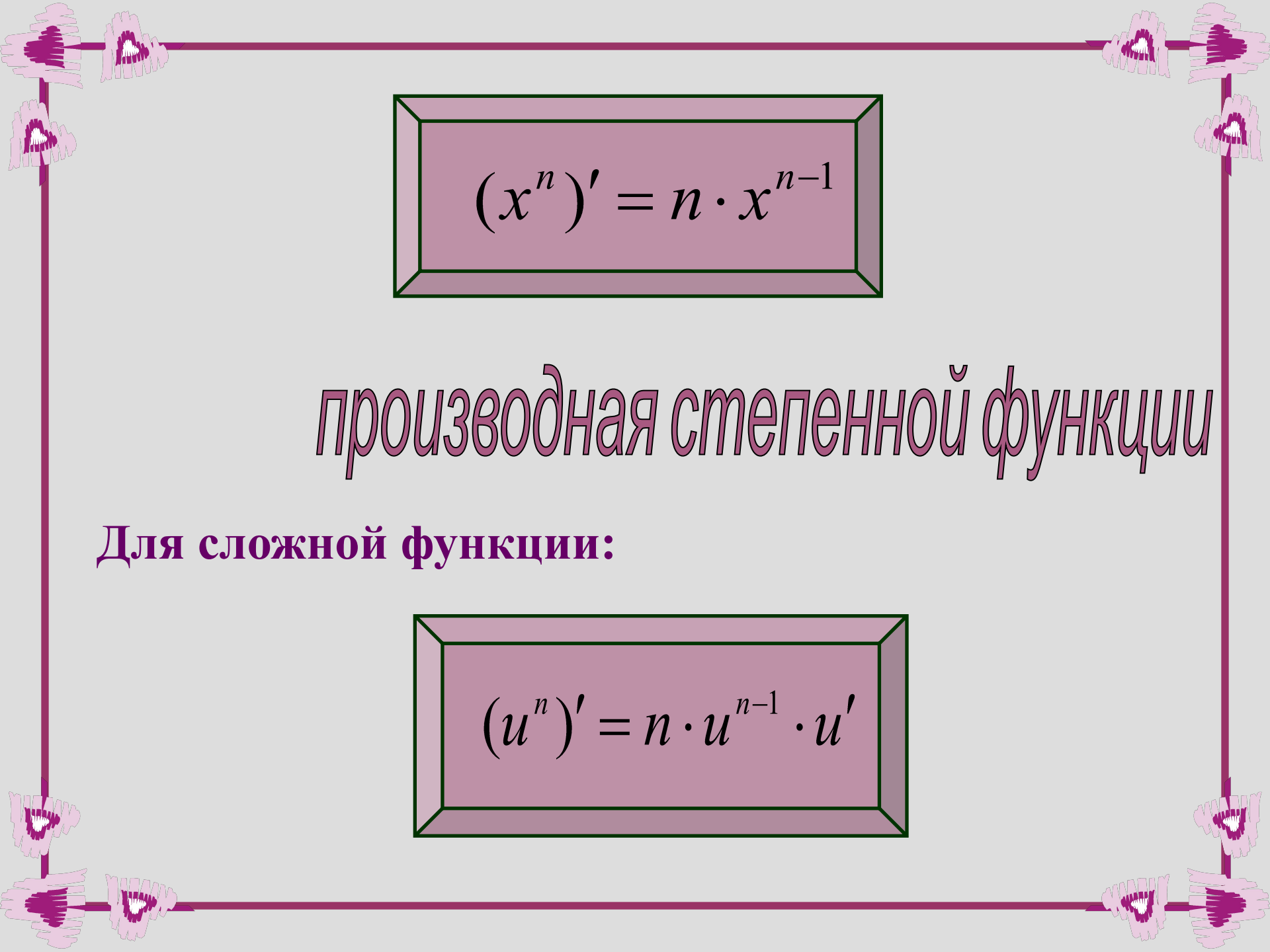
то окончательно получаем:

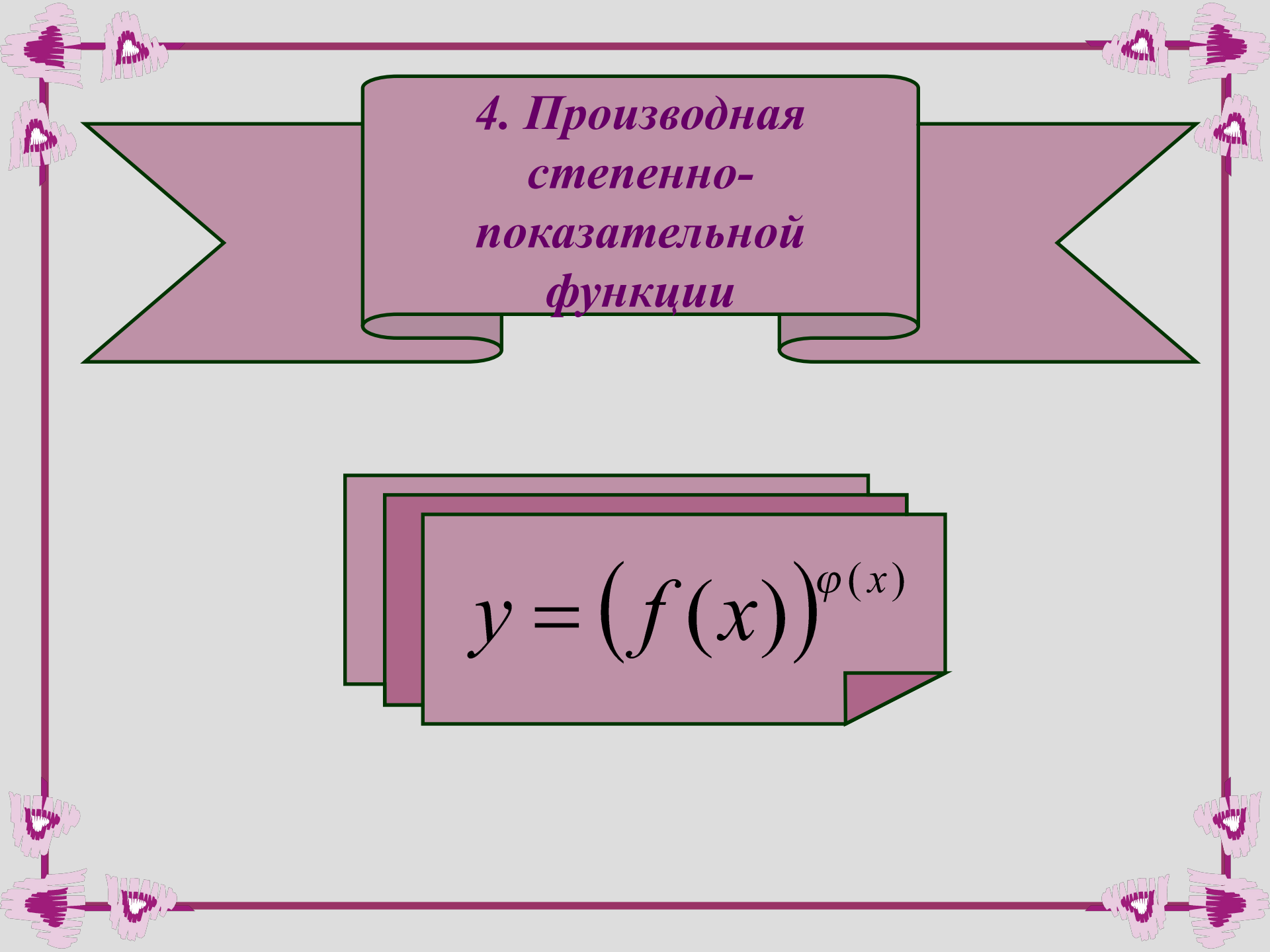
$$y' = n \cdot x^n \cdot \frac{1}{x} = n \cdot x^{n-1}$$


$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

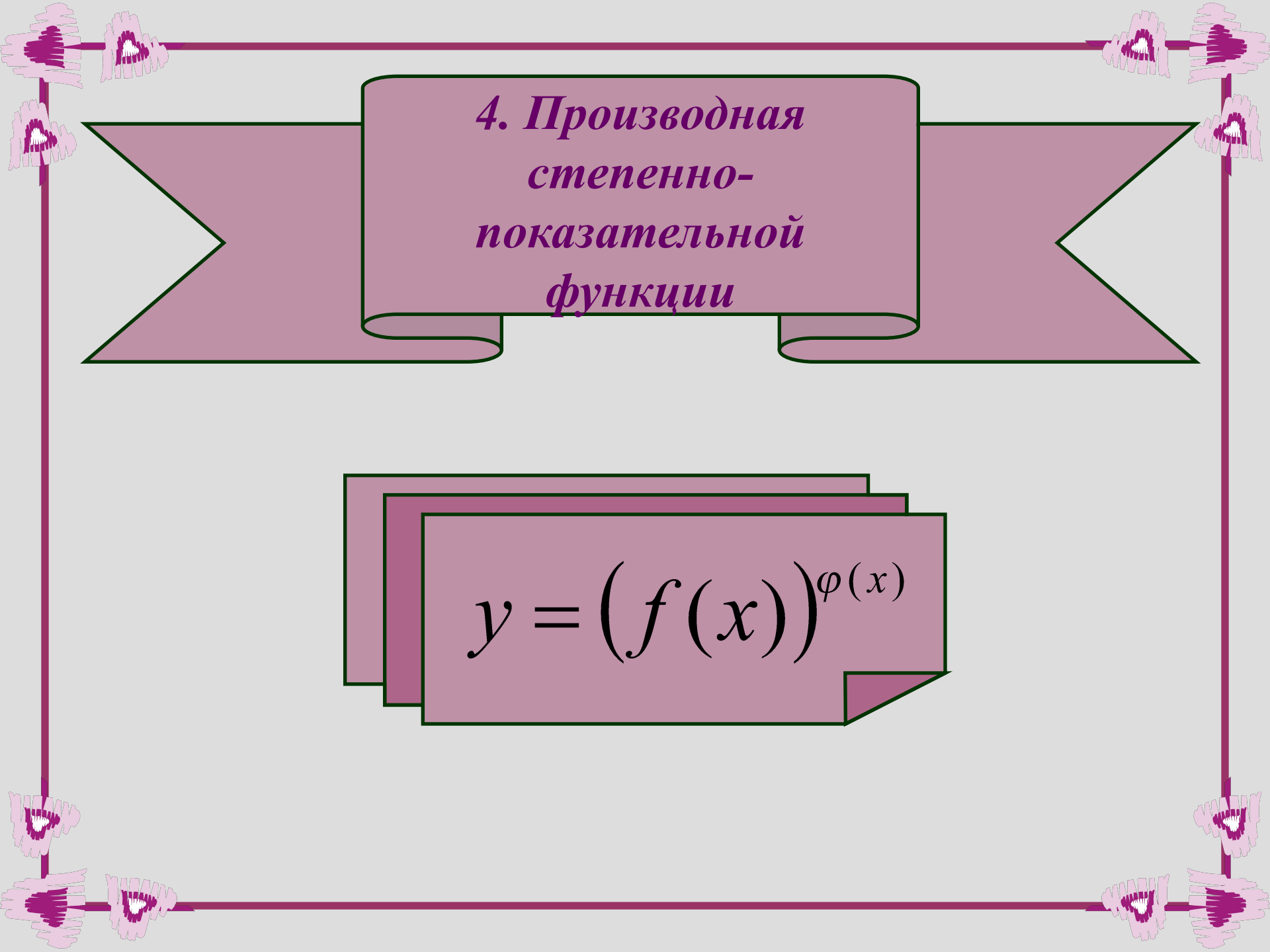
производная степенной функции

Для сложной функции:


$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$



4. Производная степенно- показательной функции


$$y = (f(x))^{\varphi(x)}$$

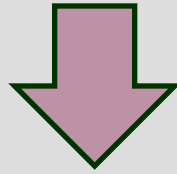
Логарифмируем обе части равенства по основанию e :

$$\ln y = \ln(f(x))^{\varphi(x)} = \varphi(x) \cdot \ln f(x)$$

Дифференцируем обе части равенства по x , учитывая, что в правой части стоит произведение:

$$(\ln y)' = (\varphi(x) \cdot \ln f(x))'$$

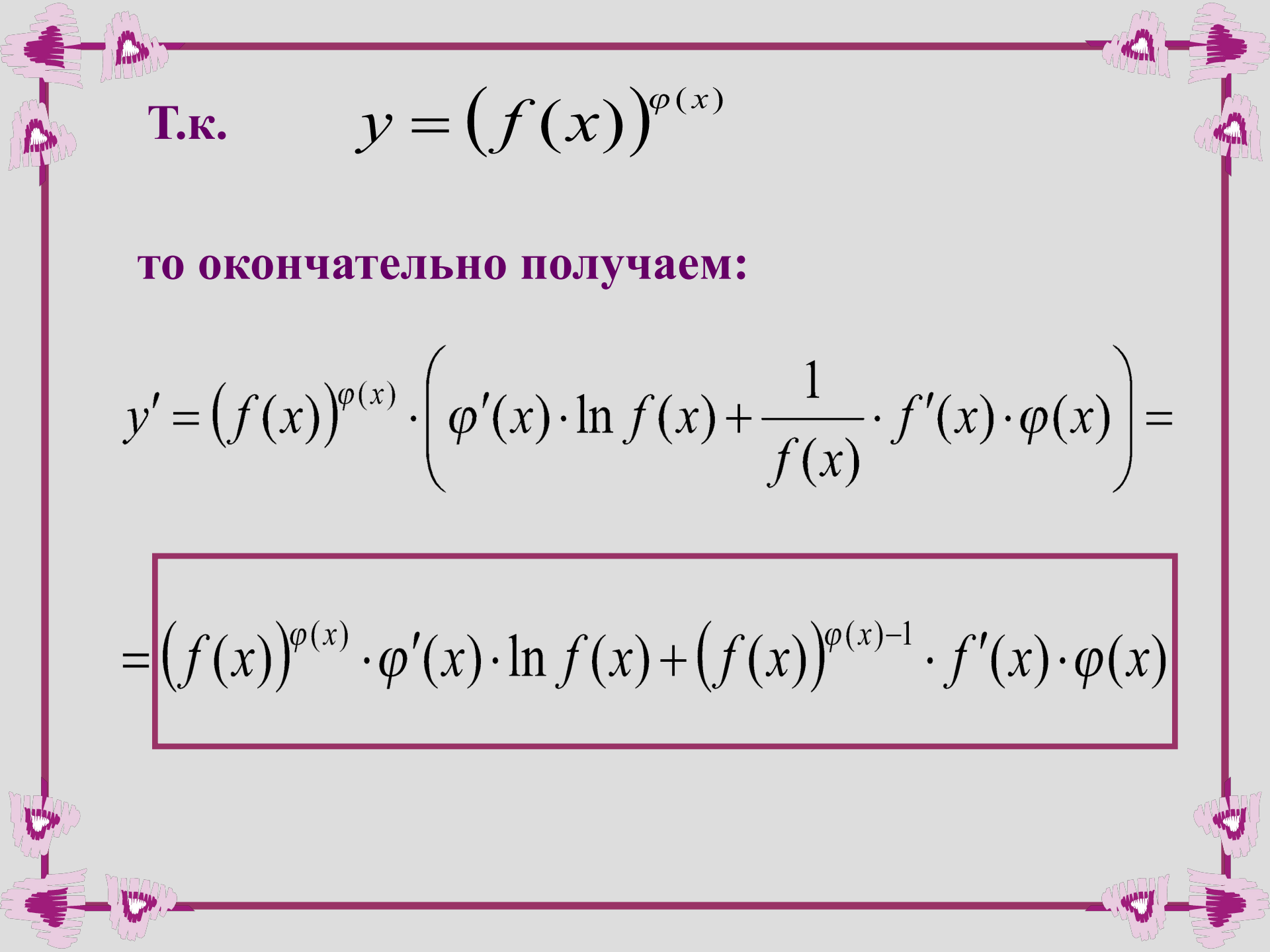
$$\frac{1}{y} \cdot y' = \varphi'(x) \cdot \ln f(x) + (\ln f(x))' \cdot \varphi(x)$$



$$\frac{1}{y} \cdot y' = \varphi'(x) \cdot \ln f(x) + \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \varphi(x)$$



$$y' = y \cdot \left(\varphi'(x) \cdot \ln f(x) + \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \varphi(x) \right)$$

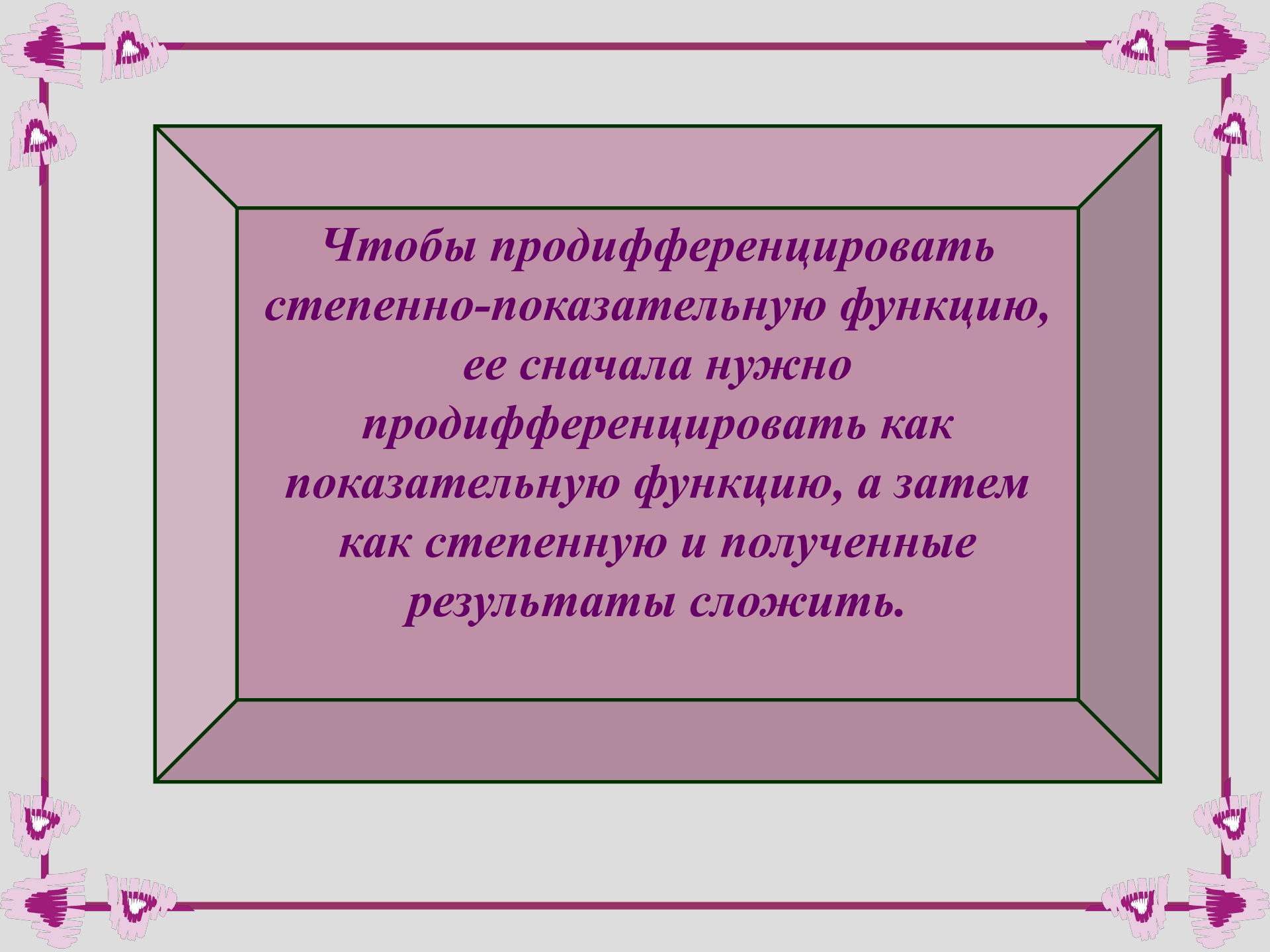


Т.к. $y = (f(x))^{\varphi(x)}$

то окончательно получаем:

$$y' = (f(x))^{\varphi(x)} \cdot \left(\varphi'(x) \cdot \ln f(x) + \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \varphi(x) \right) =$$

$$= (f(x))^{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) \cdot \ln f(x) + (f(x))^{\varphi(x)-1} \cdot f'(x) \cdot \varphi(x)$$



*Чтобы продифференцировать
степенно-показательную функцию,
ее сначала нужно
продифференцировать как
показательную функцию, а затем
как степенную и полученные
результаты сложить.*

ПРИМЕР.

$$y = x^x$$

$$y' = (x^x)' = x \cdot x^{n-1} + x^x \cdot \ln x = x^x (1 + \ln x)$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Производная логарифмической функции

$$(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'$$

называется логарифмической производной. Ее удобно использовать для дифференцирования функции, выражение которой существенно упрощается при логарифмировании.

ПРИМЕР.

$$y = \sqrt{\frac{(x+1)(x^2-2)}{3-x}}$$

Логарифмируем обе части равенства по основанию e :

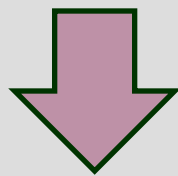
$$\ln y = \ln \sqrt{\frac{(x+1)(x^2-2)}{3-x}} =$$

Используем свойства логарифма:

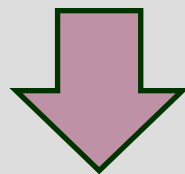
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \ln \frac{(x+1)(x^2-2)}{3-x} = \\ &= \frac{1}{2} (\ln(x+1) + \ln(x^2-2) - \ln(3-x)) \end{aligned}$$

Дифференцируем обе части равенства по x :

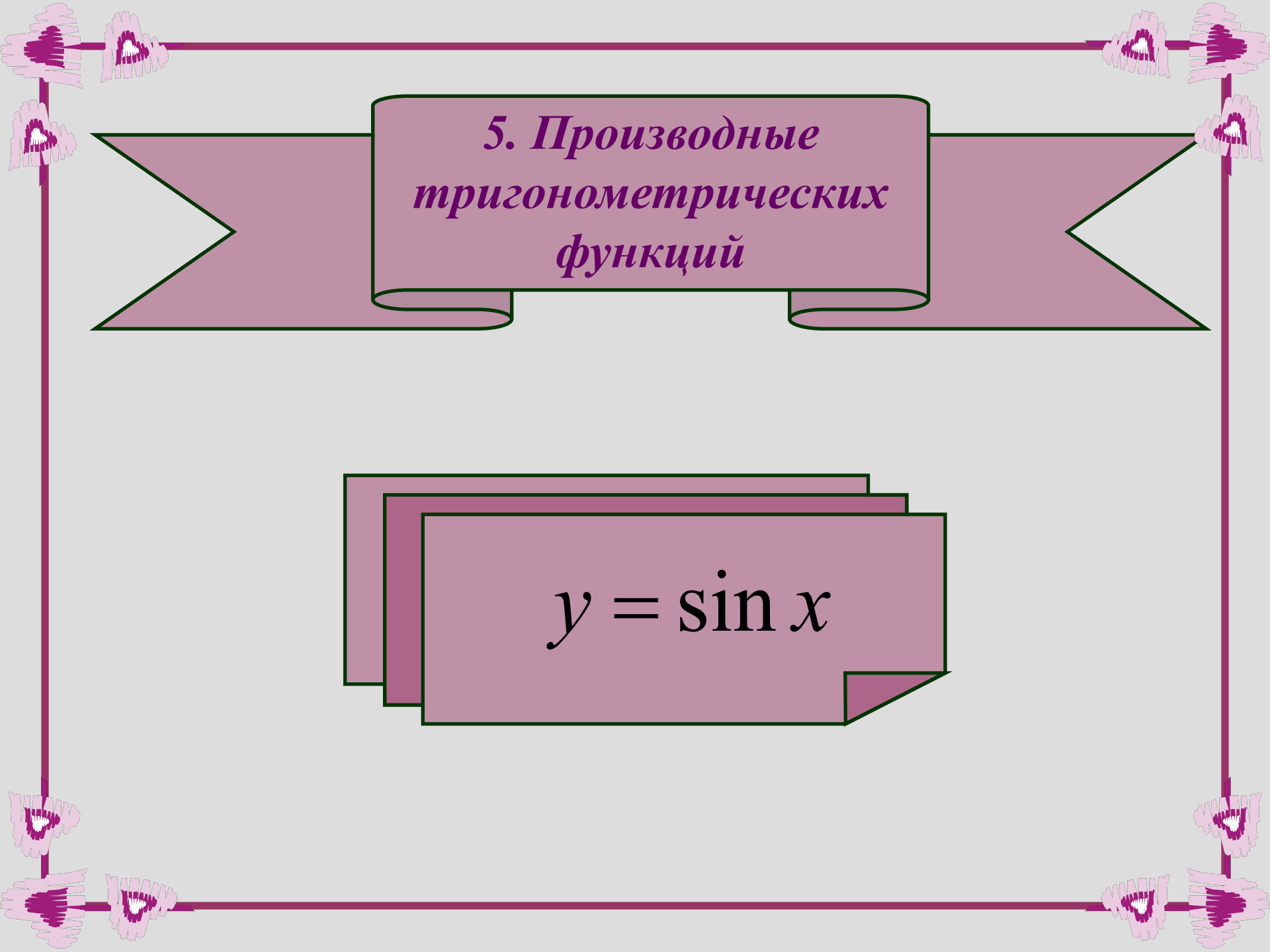
$$(\ln y)' = \left(\frac{1}{2} (\ln(x+1) + \ln(x^2 - 2) - \ln(3-x)) \right)$$



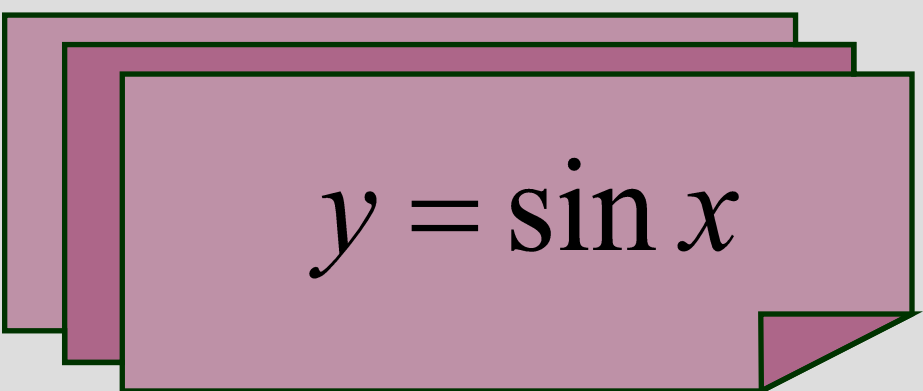
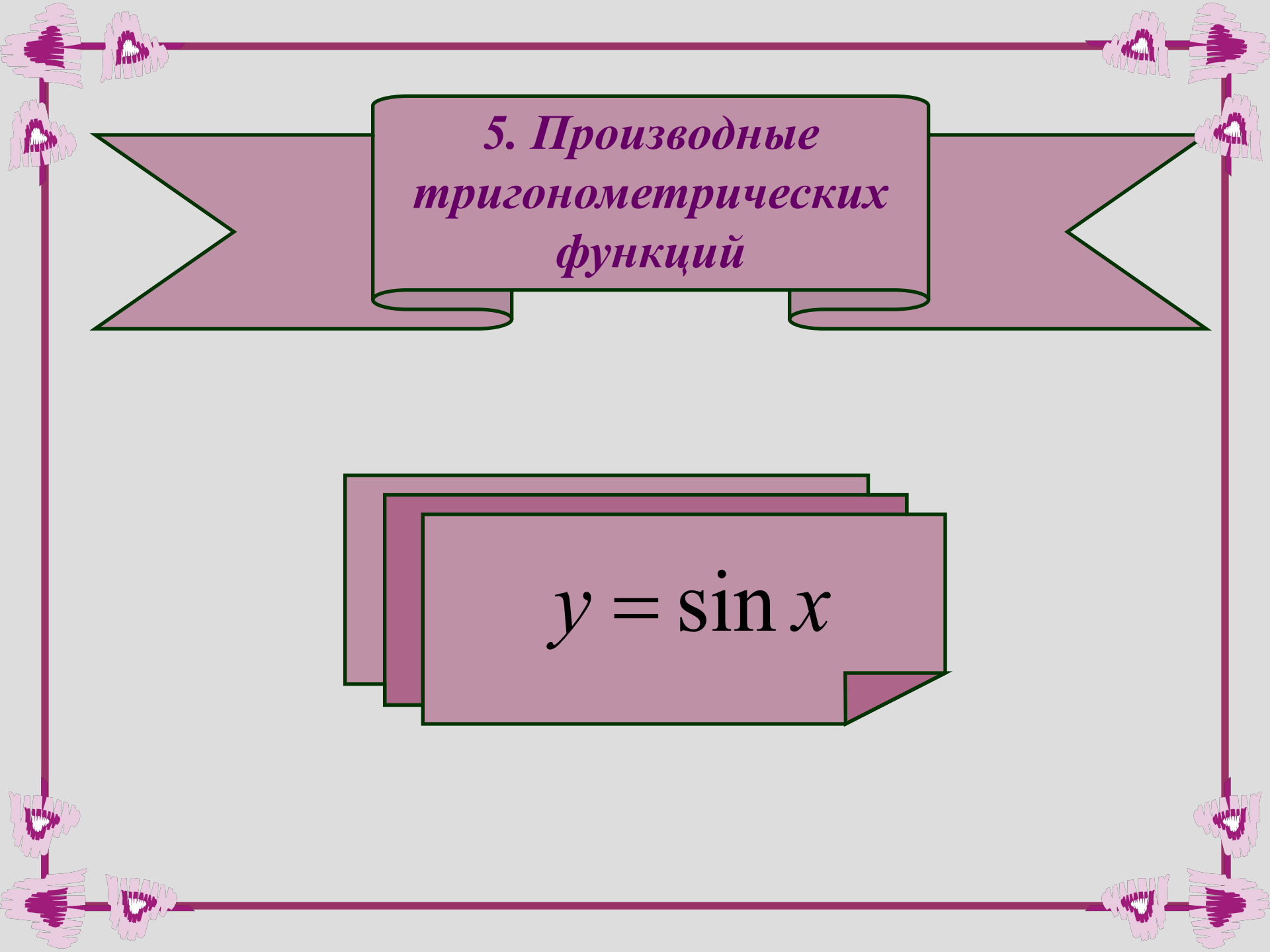
$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2 - 2} + \frac{1}{3-x} \right)$$



$$y' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2 - 2} + \frac{1}{3-x} \right) \cdot \sqrt{\frac{(x+1)(x^2 - 2)}{3-x}}$$



5. Производные тригонометрических функций


$$y = \sin x$$

Используем схему нахождения производной:

Дадим аргументу x приращение Δx и найдем значение функции $y + \Delta y$:

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

Находим приращение функции

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x =$$

Распишем разность синусов:

$$= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

Составляем отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x}$$

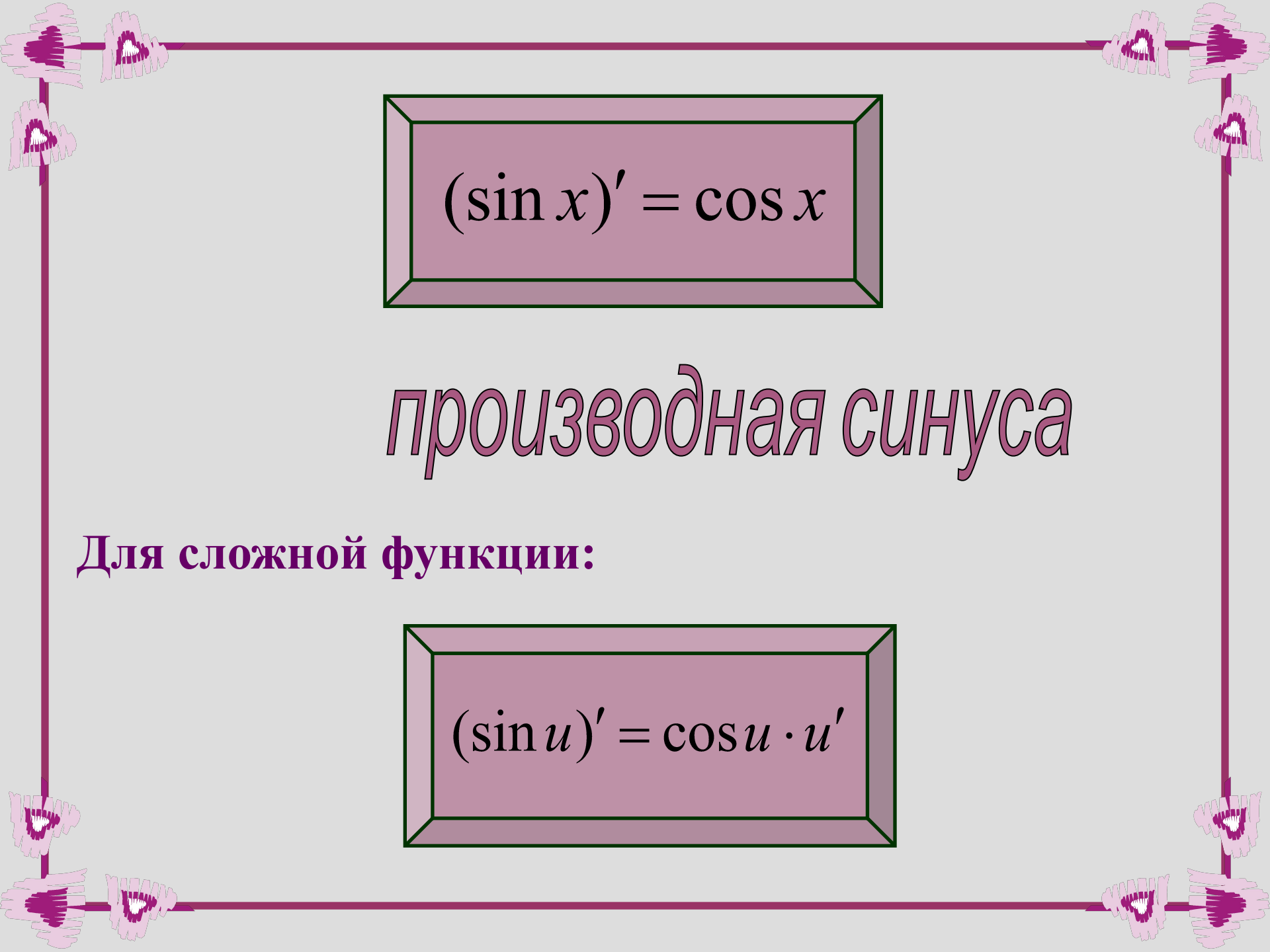
Находим предел этого отношения:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}_{\cos x} =$$

Первый предел сводим к первому
замечательному:

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x / 2}}_1 \cdot \cos x = \cos x$$

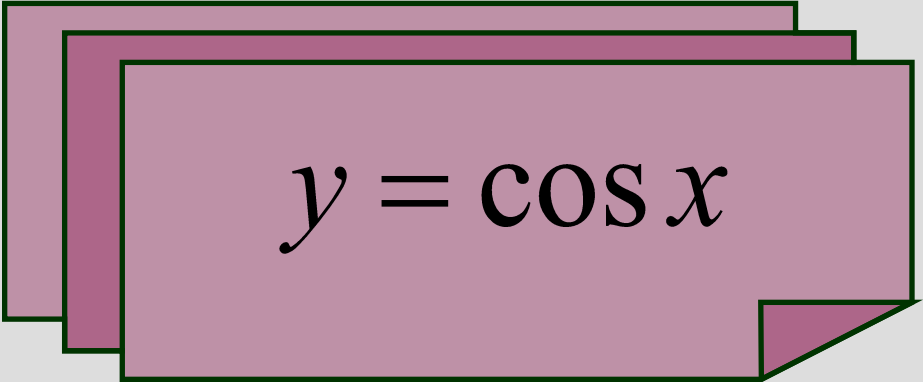

$$(\sin x)' = \cos x$$

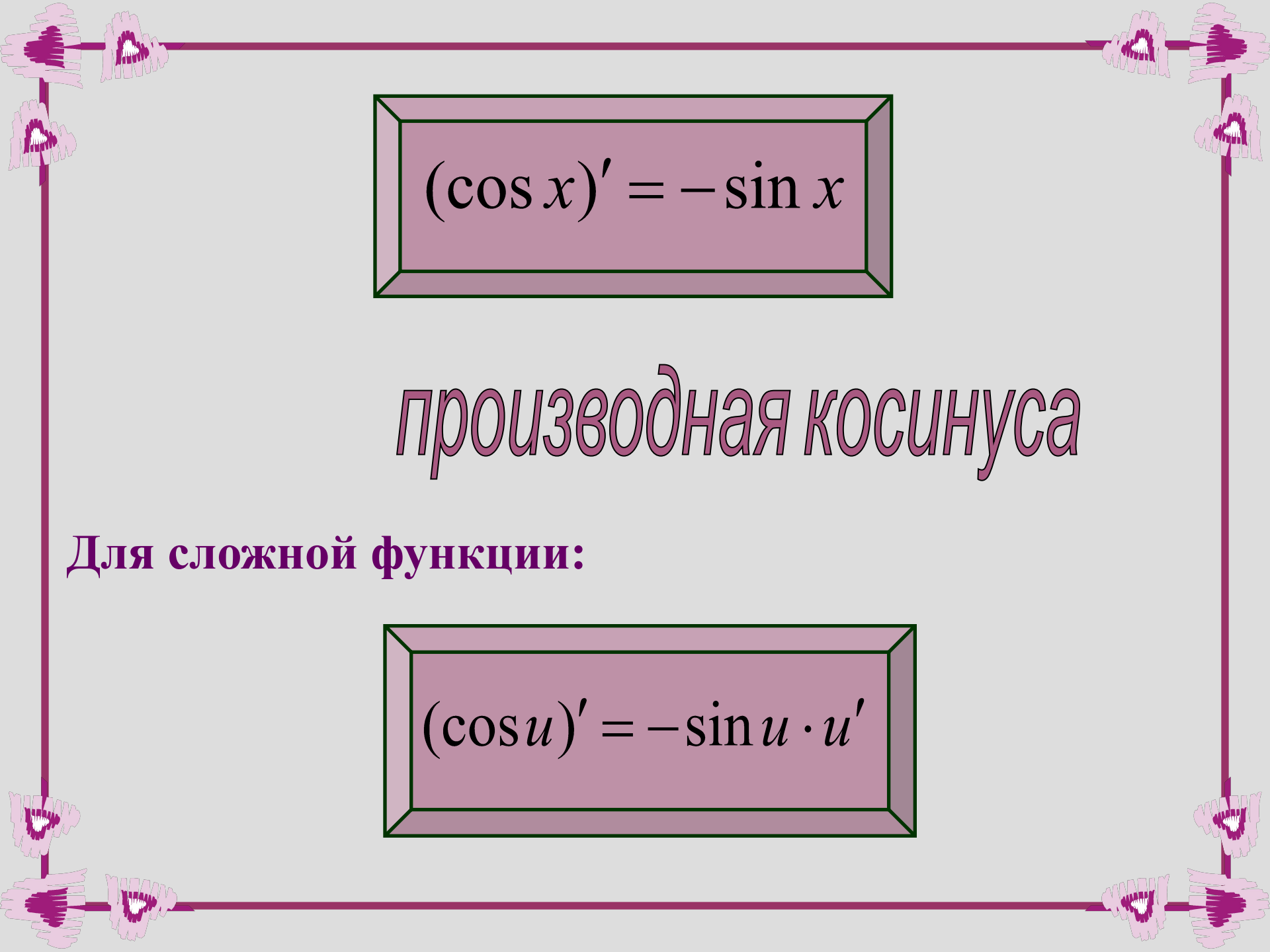
производная синуса

Для сложной функции:

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

Аналогично можно найти производную функции


$$y = \cos x$$


$$(\cos x)' = -\sin x$$

производная косинуса

Для сложной функции:

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

ПРИМЕР.

$$y = \frac{\sin 6x}{\cos(x^2 + 1)}$$

$$y' = \frac{(\sin 6x)' \cdot \cos(x^2 + 1) - \sin 6x \cdot (\cos(x^2 + 1))'}{(\cos(x^2 + 1))^2} =$$

$$= \frac{6 \cos 6x \cdot \cos(x^2 + 1) + \sin 6x \cdot \sin(x^2 + 1) \cdot 2x}{(\cos(x^2 + 1))^2}$$

Найдем производную функции

$$y = \operatorname{tg} x$$

$$y' = (tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' =$$

Находим производную дроби:

$$\begin{aligned} &= \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{1 \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$


$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

производная тангенса

Для сложной функции:


$$(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$

Аналогично можно найти производную функции

$$y = ctgx$$


$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

производная котангенса

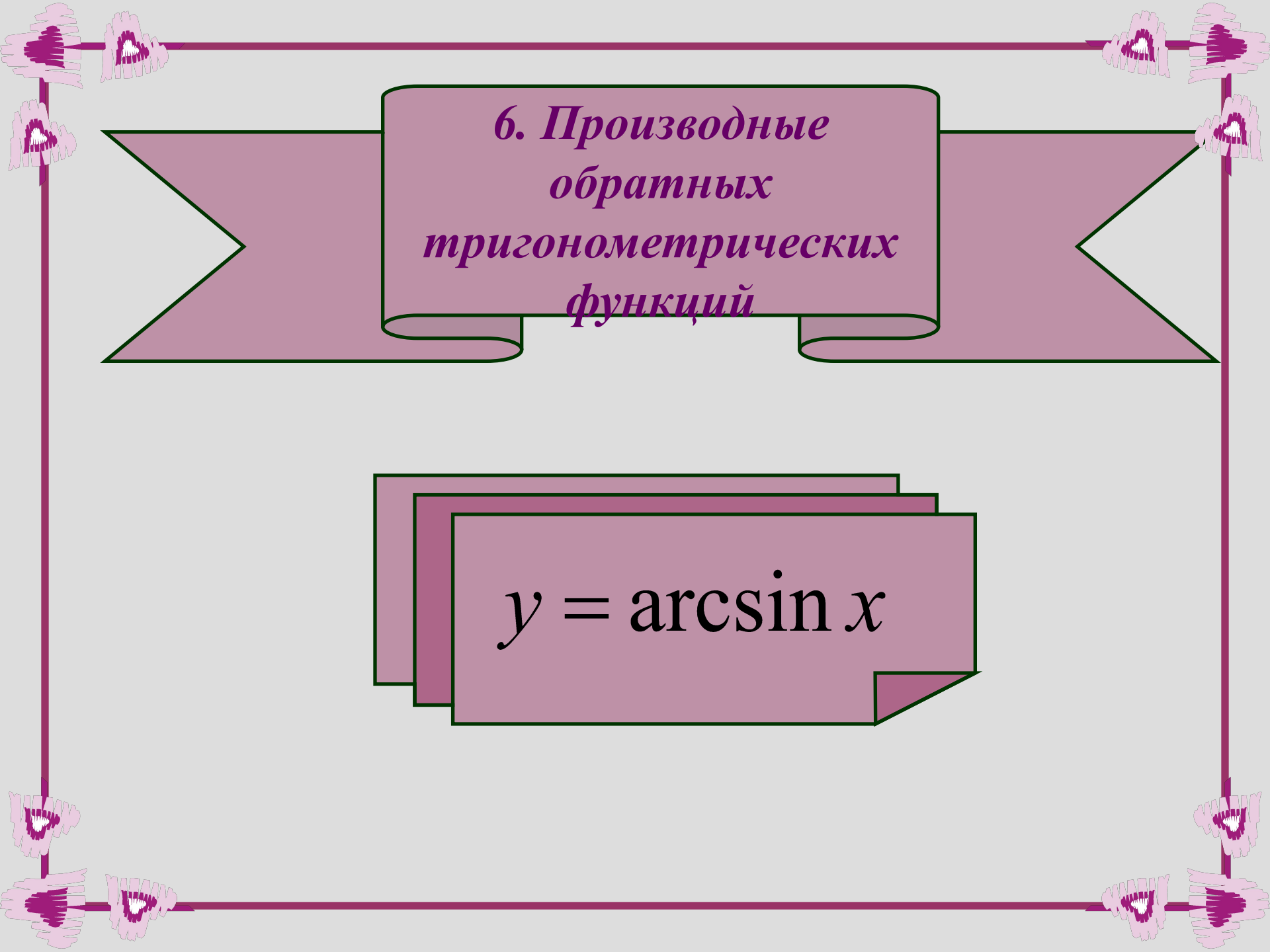
Для сложной функции:


$$(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$$

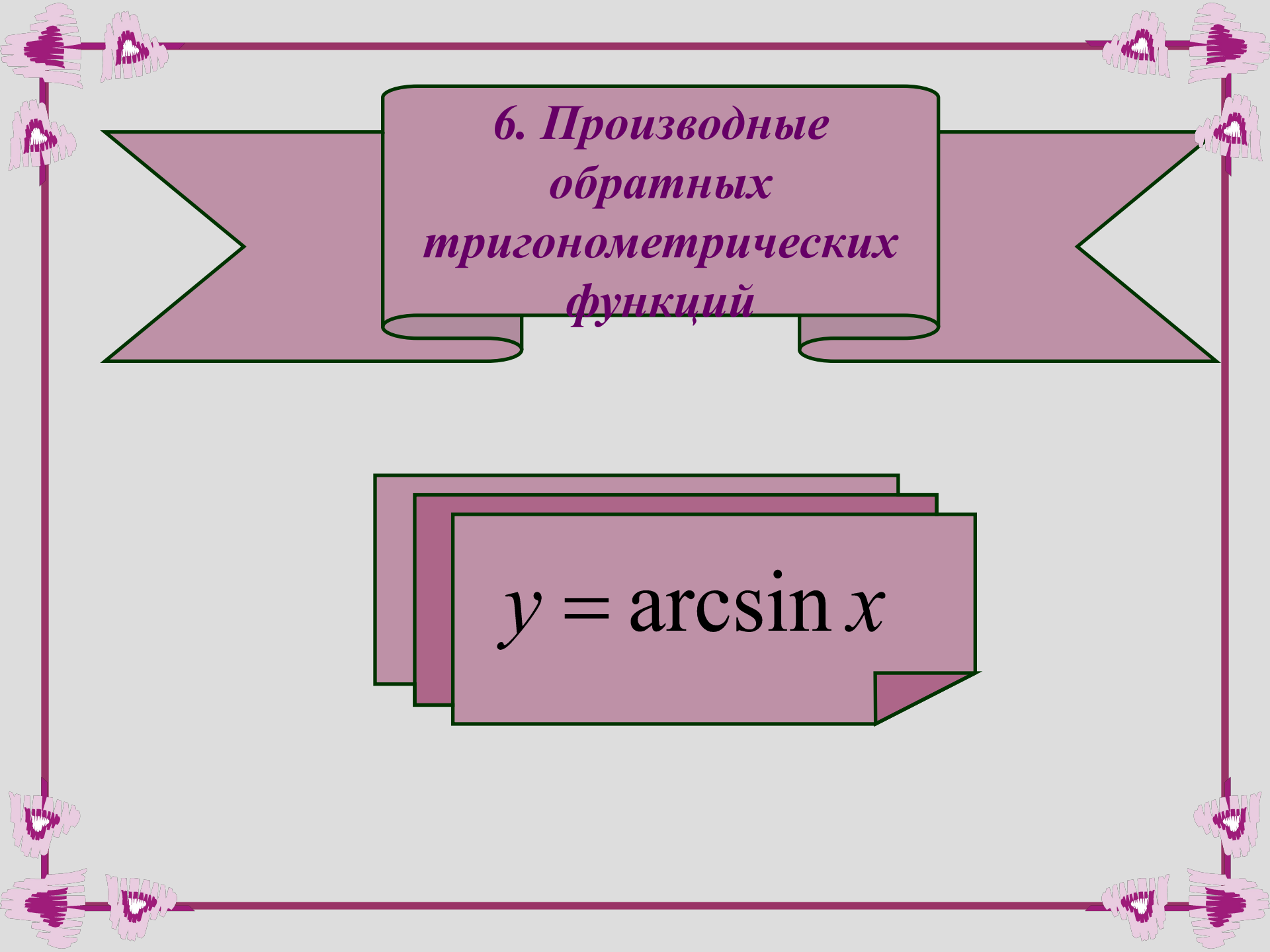
ПРИМЕР.

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x^2 - 3x}\right)$$

$$y' = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x^2 - 3x}\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x^2 - 3x}\right)} \cdot \left(-\frac{2x - 3}{(x^2 - 3x)^2}\right)$$



6. Производные обратных тригонометрических функций


$$y = \arcsin x$$

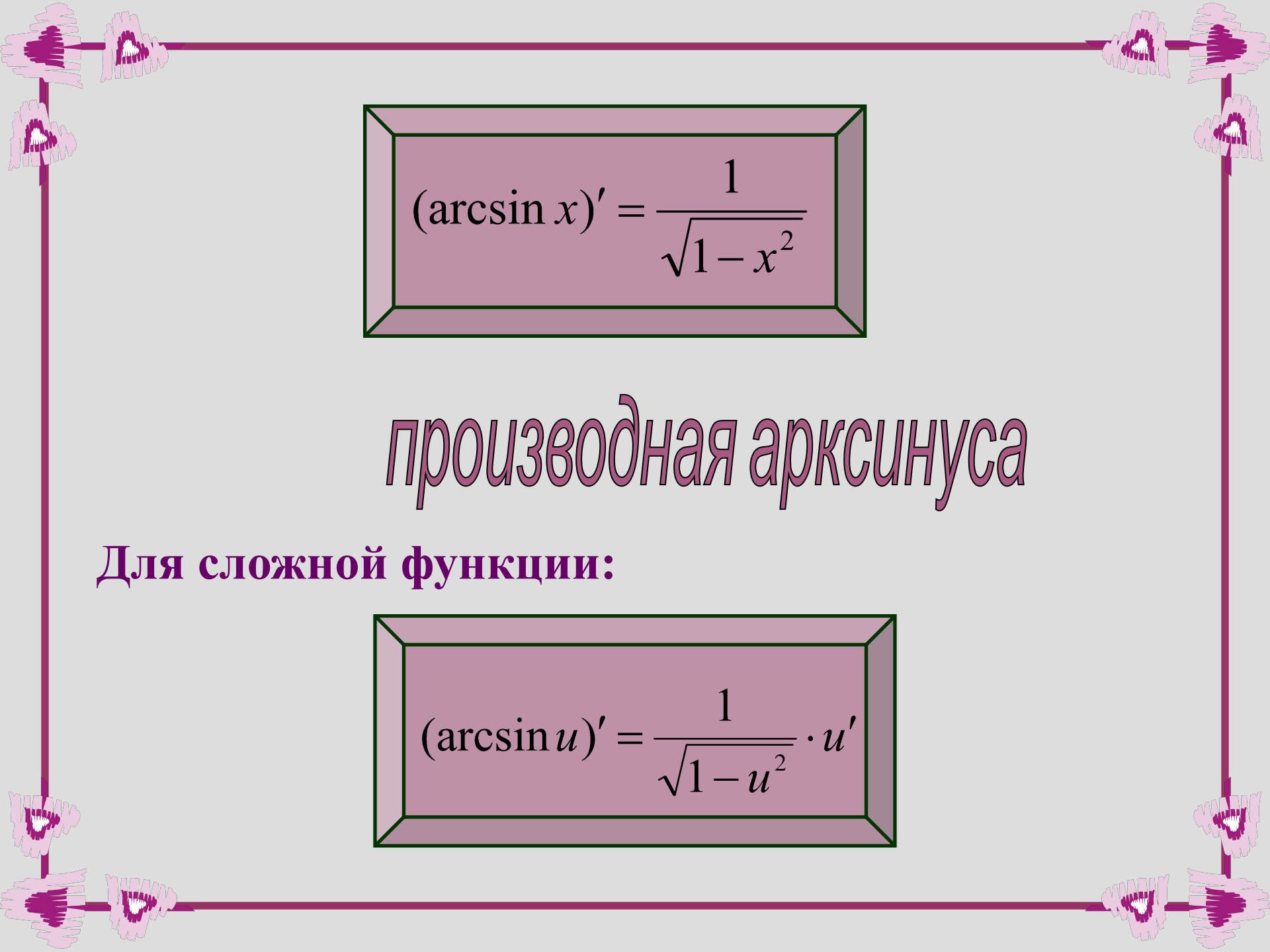
Обратной к ней функцией будет $x = \sin y$
Используем правило дифференцирования
обратной функции:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}$$

Теперь нужно выразить y через x с помощью
основного тригонометрического соотношения:

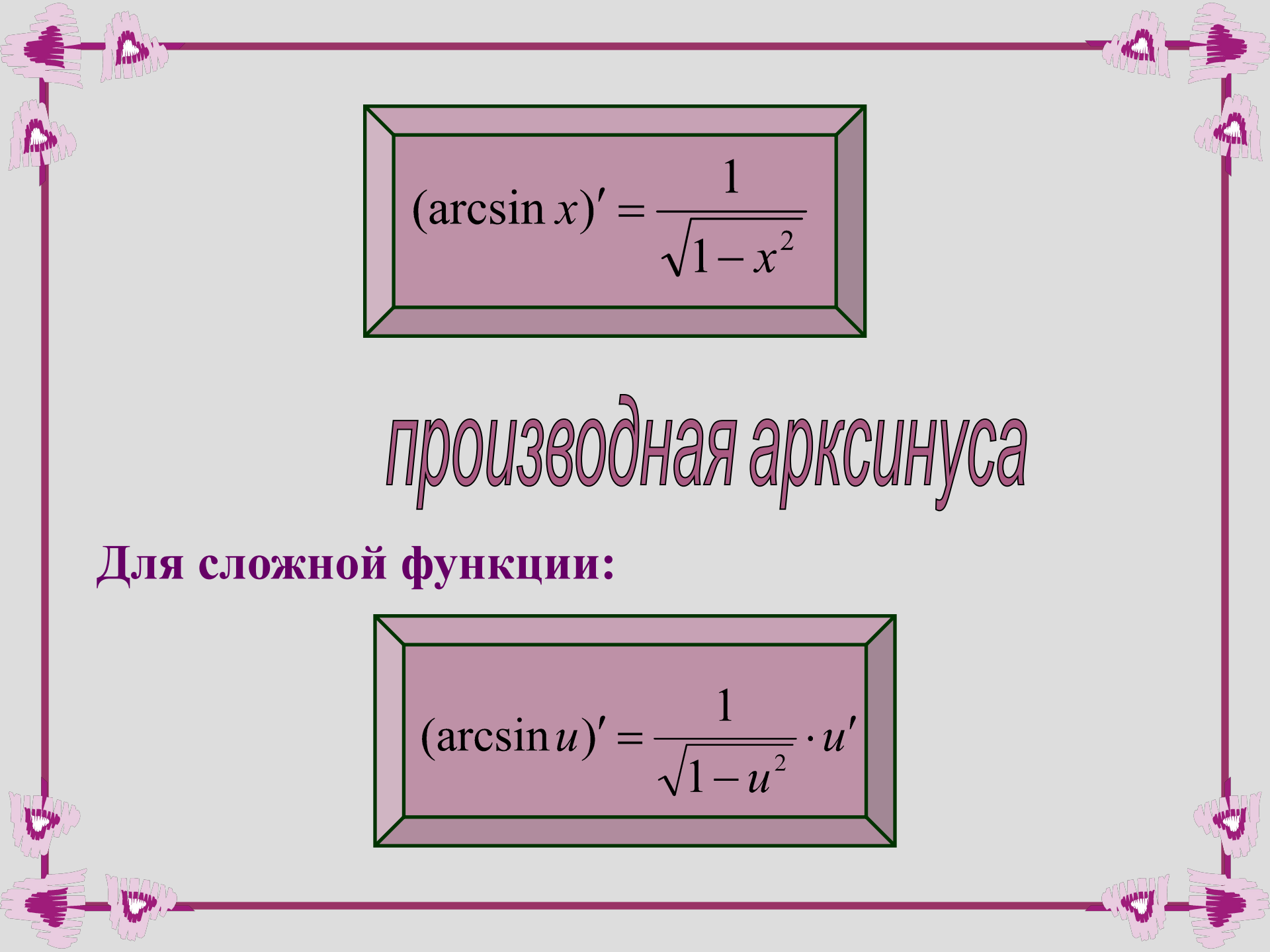
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \underbrace{\sin^2 y}_{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Эта производная не существует при $x = \pm 1$


$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

производная арксинуса

Для сложной функции:

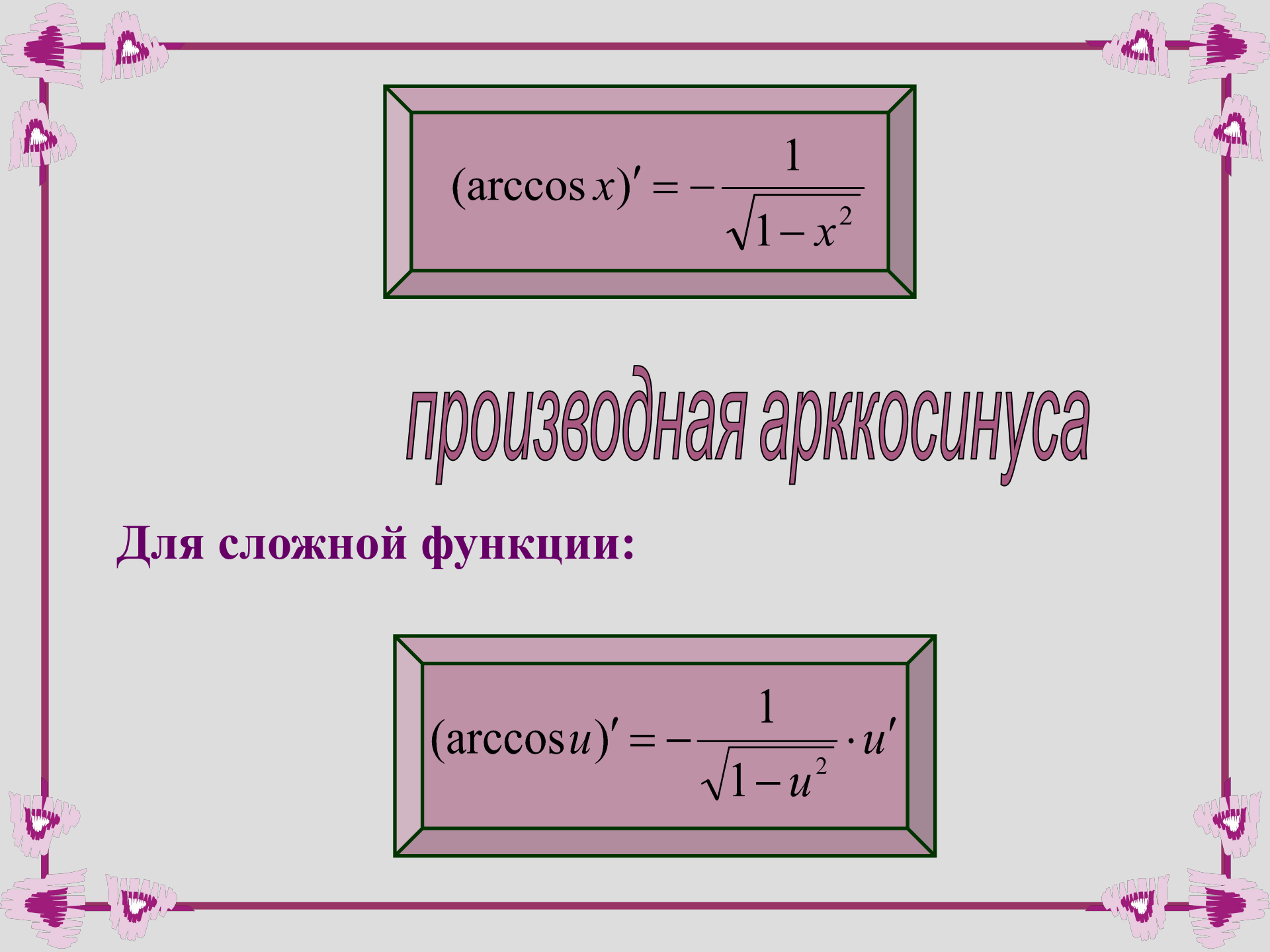

$$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

Аналогично можно найти производную функций

$$y = \arccos x$$

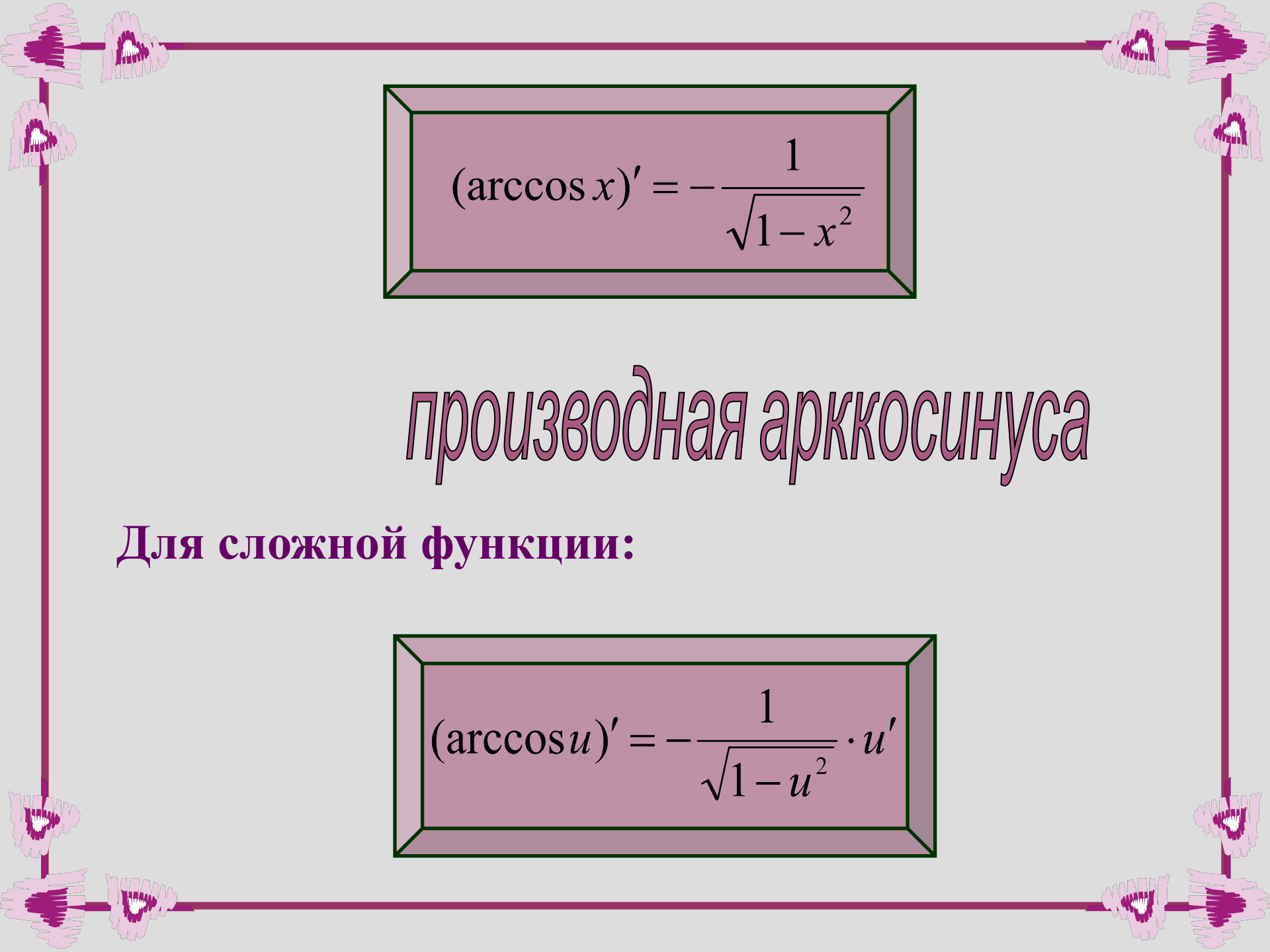
$$y = \arctg x$$

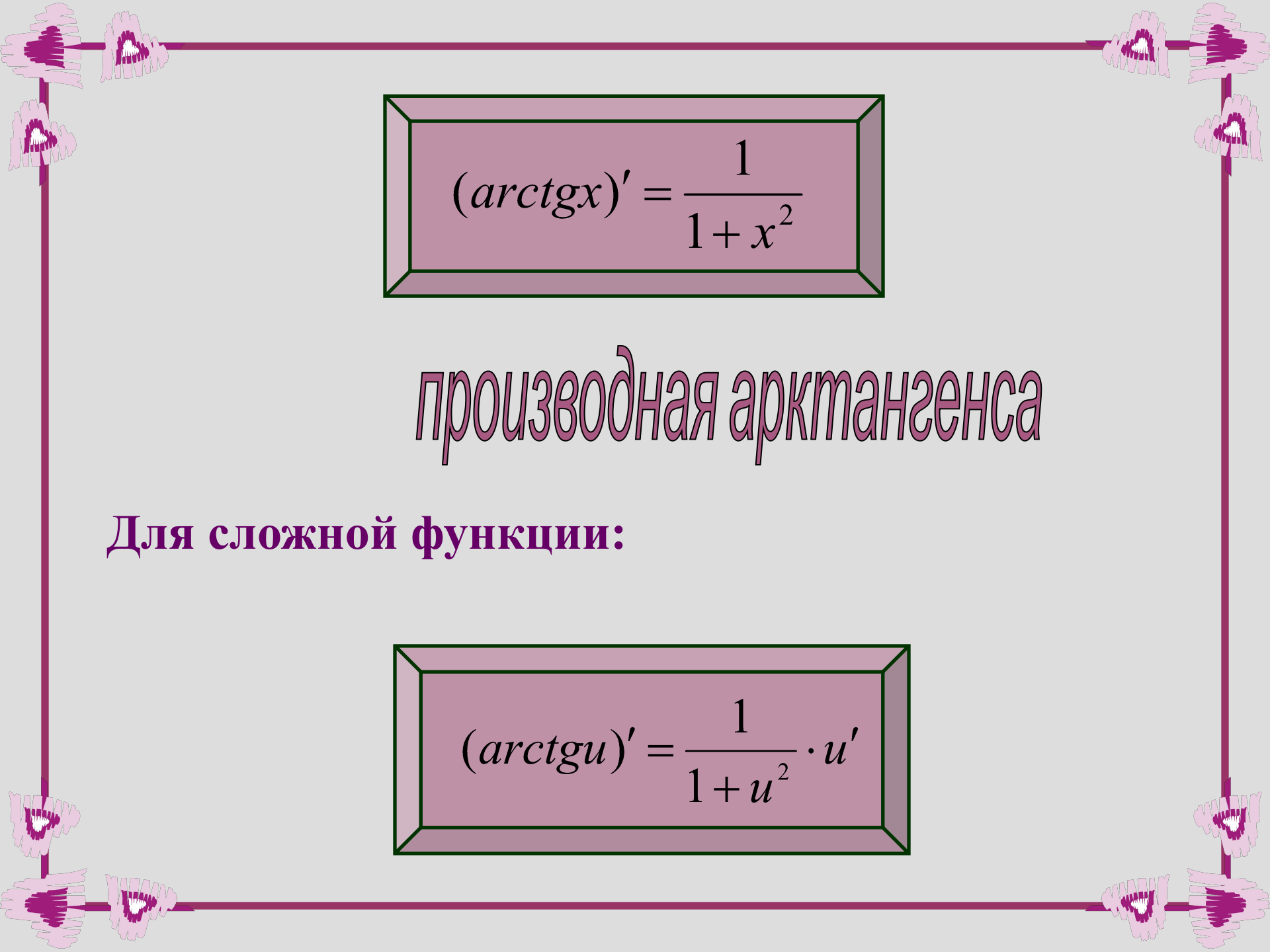
$$y = \operatorname{arcctg} x$$


$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

производная арккосинуса

Для сложной функции:

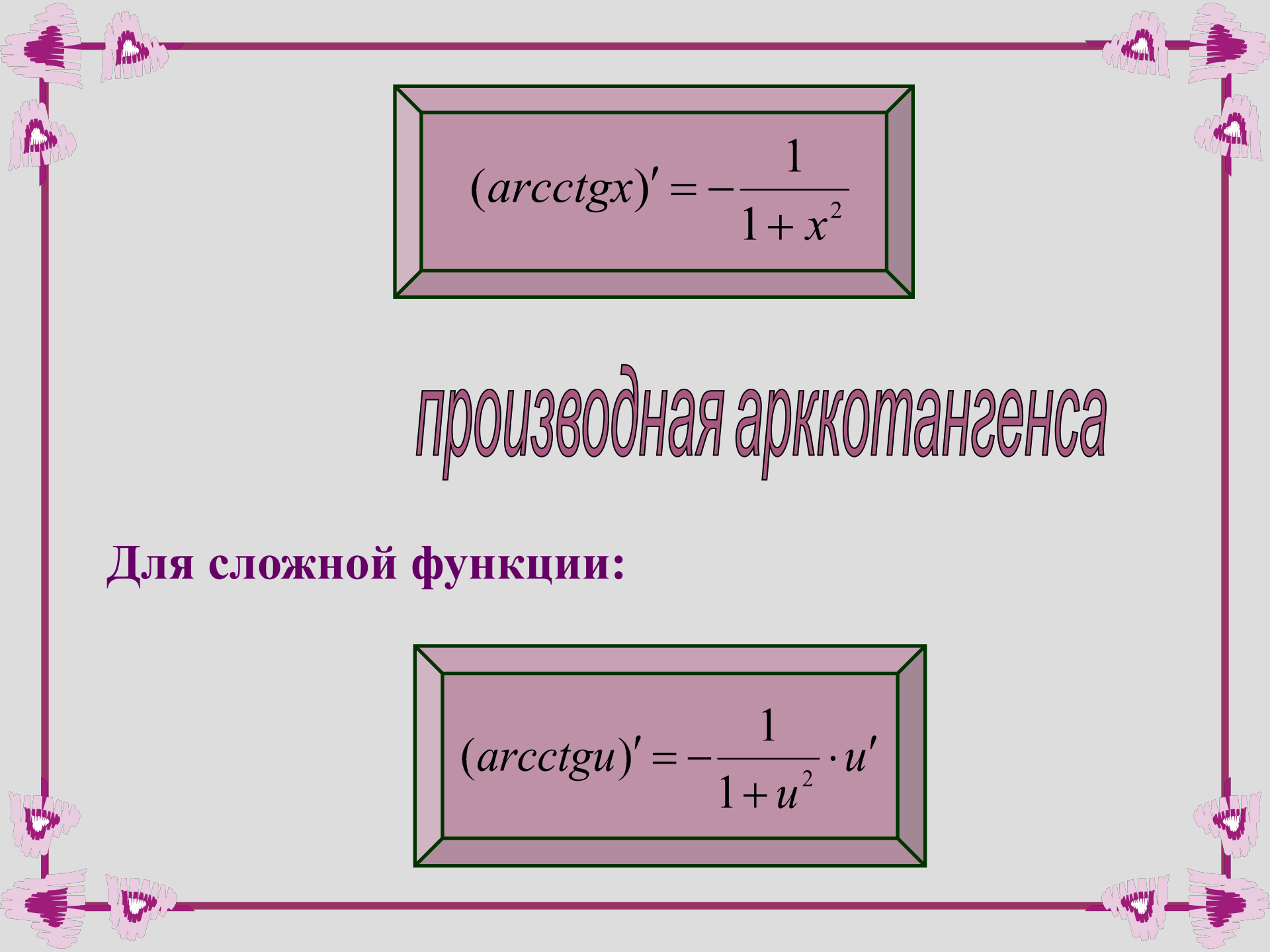

$$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$


$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

производная арктангенса

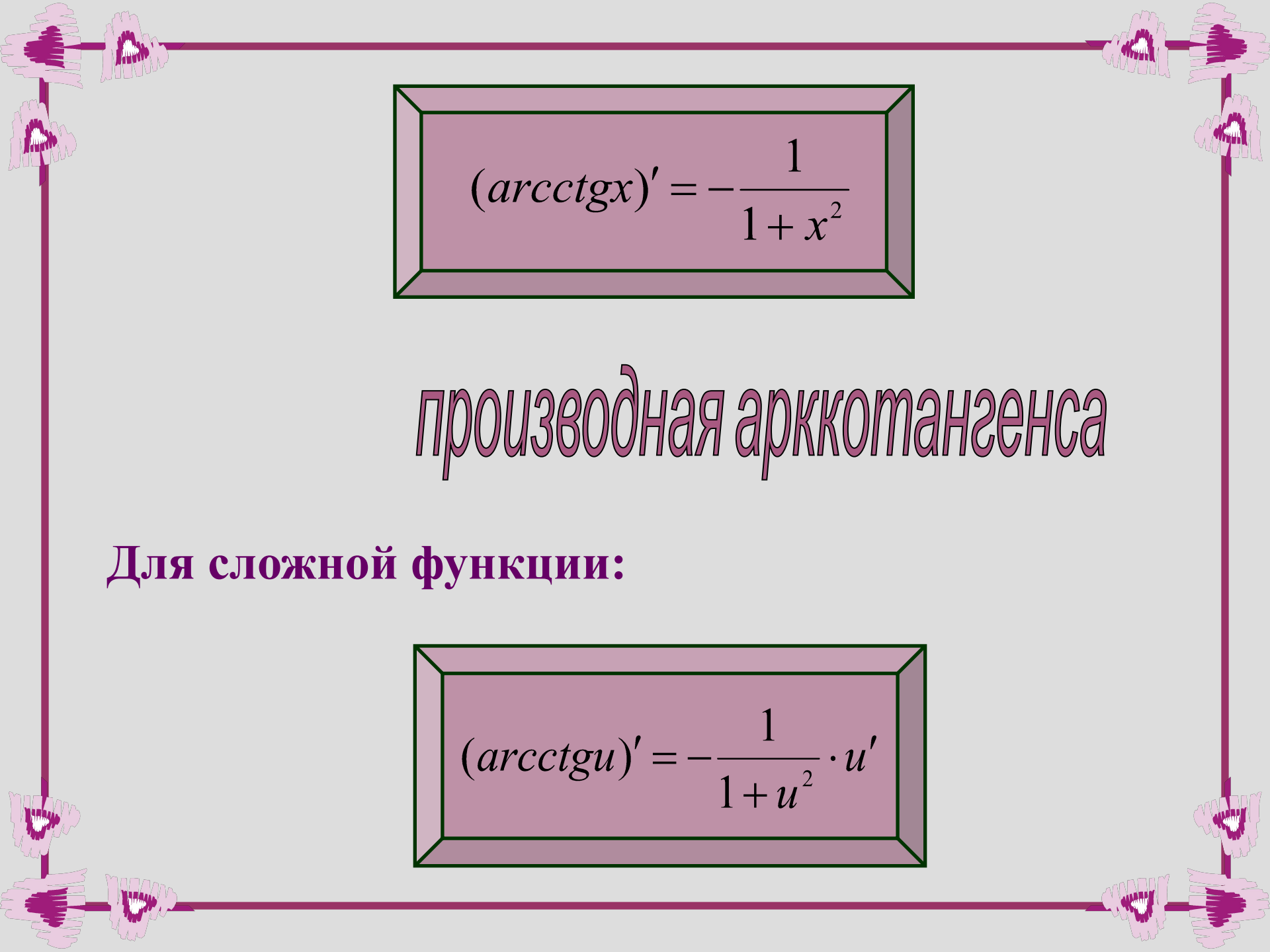
Для сложной функции:

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$


$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

производная арккотангенса

Для сложной функции:


$$(\operatorname{arccotg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

ПРИМЕР.

$$y = \arccos(\ln x)$$

$$y' = (\arccos(\ln x))' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \ln^2 x}} \cdot \frac{1}{x}$$

Таблица элементарных производных

Таблица производных основных элементарных функций

1. $C' = 0$;

2. $x' = 1$;

3. $(x^2)' = 2x$;

4. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$;

5. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$;

5* $(e^x)' = e^x$;

6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;

6* $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

7. $(\sin x)' = \cos x$;

8. $(\cos x)' = -\sin x$;

9. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ на отрезке $[1; 4]$.

Решение.

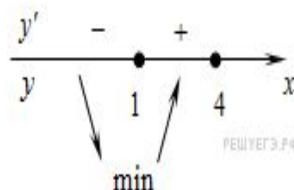
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 4x + 1.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 = 0, \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = \frac{1}{3}, \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow x = 1.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 1$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(1) = 1 - 2 + 1 + 3 = 3.$$

Ответ: 3.

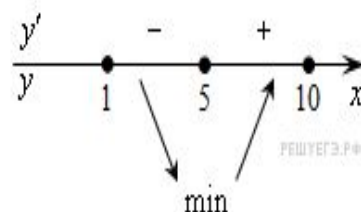
Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{x^2 + 25}{x}$ на отрезке $[1; 10]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = \left(\frac{x^2 + 25}{x} \right)' = \left(x + \frac{25}{x} \right)' = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2}.$$

Производная обращается в нуль в точках 5 и -5. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции на заданном отрезке:



Наименьшим значением функции на заданном отрезке будет ее значение в точке 5. Найдем его:

$$y(5) = \frac{25 + 25}{5} = 10.$$

Ответ: 10.

Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 8)e^{x-7}$ на отрезке $[6; 8]$.

Решение.

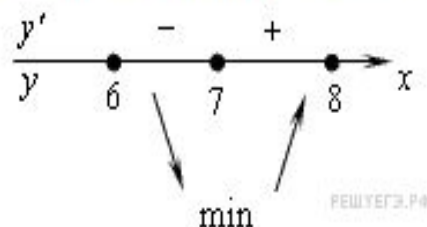
Найдем производную заданной функции:

$$y' = (x - 8)'e^{x-7} + (x - 8)(e^{x-7})' = e^{x-7} + (x - 8)e^{x-7} = (x - 7)e^{x-7}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} y' = 0, \\ 6 \leq x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 7)e^{x-7} = 0, \\ 6 \leq x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 7 = 0, \\ 6 \leq x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 7.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Наименьшим значением заданной функции на отрезке $[6; 8]$ будет $y(7) = -1$.

Ответ: -1.

Найдите точку максимума функции $y = (x - 2)^2(x - 4) + 5$.

Решение.

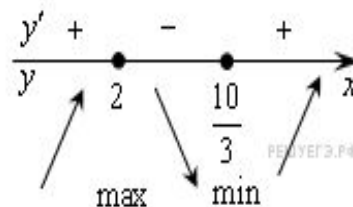
Найдем производную заданной функции:

$$\begin{aligned} y' &= ((x-2)^2)'(x-4) + (x-2)^2(x-4)' + (5)' = \\ &= 2(x-2)(x-4) + (x-2)^2 = (x-2) \cdot (2(x-4) + (x-2)) = (x-2)(3x-10). \end{aligned}$$

Найдем нули производной:

$$(x-2)(3x-10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = \frac{10}{3}. \end{cases}$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = 2$.

Ответ: 2.

Найдите наименьшее значение функции $y = 4x - 4\ln(x+7) + 6$ на отрезке $[-6,5; 0]$.

Решение.

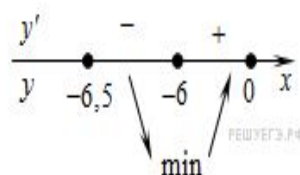
Найдем производную заданной функции:

$$y'(x) = 4 - \frac{4}{x+7}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 4 - \frac{4}{x+7} = 0, \\ -6,5 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6, \\ -6,5 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -6.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = -6$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(-6) = -6 \cdot 4 - 4\ln 1 + 6 = -18.$$

Ответ: -18 .

Найдите наименьшее значение функции $y = 3x - \ln(x+3)^3$ на отрезке $[-2,5; 0]$.

Решение.

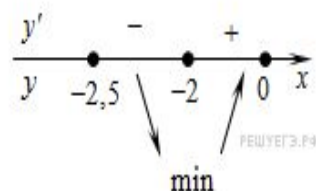
Найдем производную заданной функции:

$$y'(x) = 3 - \frac{3}{x+3}.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} 3 - \frac{3}{x+3} = 0, \\ -2,5 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+3} = 1, \\ -2,5 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ -2,5 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = -2$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(-2) = -2 \cdot 3 - \ln 1 = -6.$$

Ответ: -6 .