Синтез комбинационных схем Типовые логические элементы и их обозначения на функциональных схемах

Логический элемент — простейшее устройство ЭВМ, выполняющее одну определённую логическую операцию над входными сигналами согласно правилам алгебры логики.

Логический элемент характеризуется:

1. Наличием одного или нескольких входов, на которые подаются входные сигналы (входные переменные).

2. Наличием выхода, на котором формируется выходной сигнал (выходная переменная).

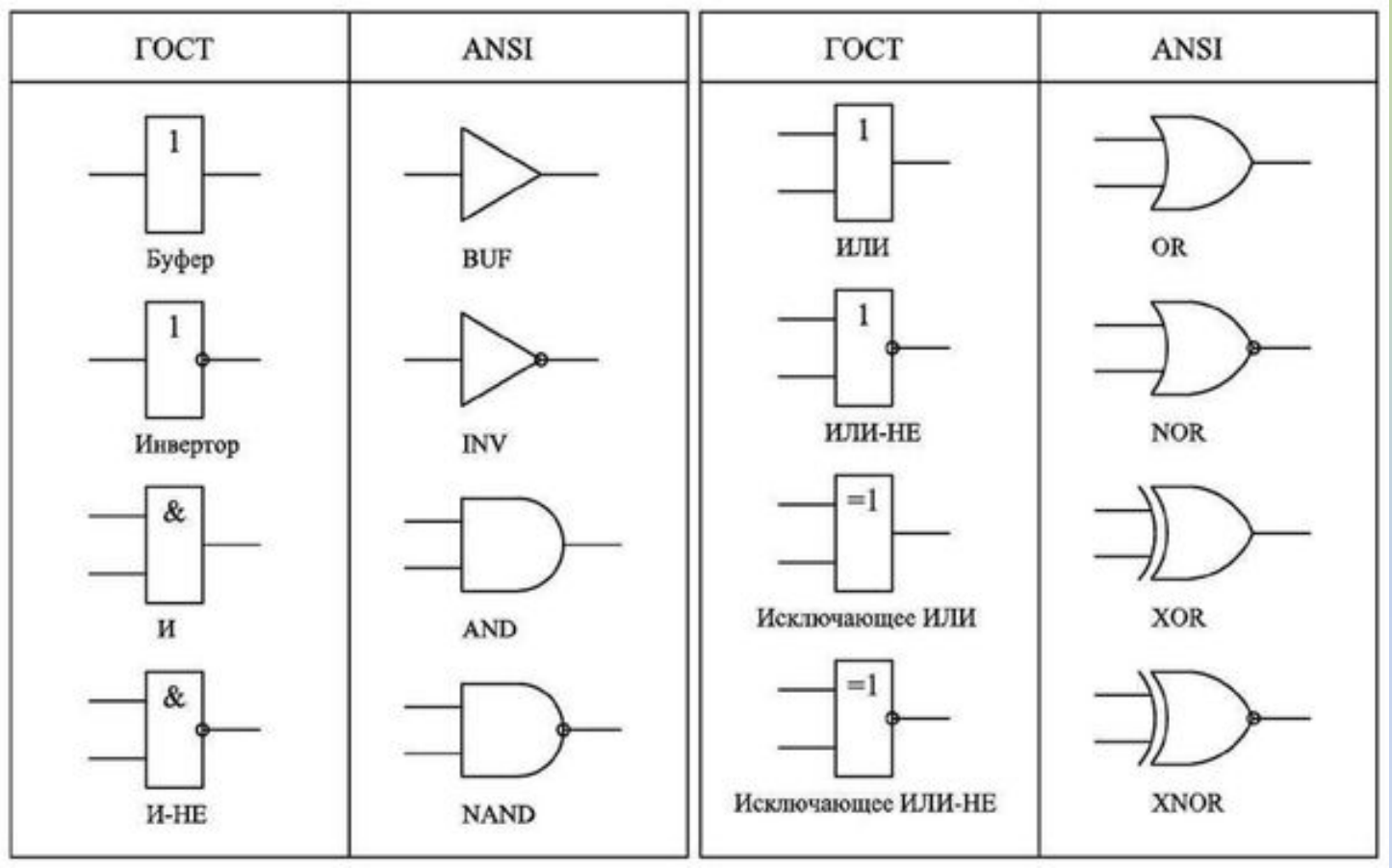
3. Определенной функцией, которая отображает зависимость выходного сигнала от входных.

В мире применяют две системы условных графи-ческих обозначение (УГО) логических элементов - ANSI и DIN.

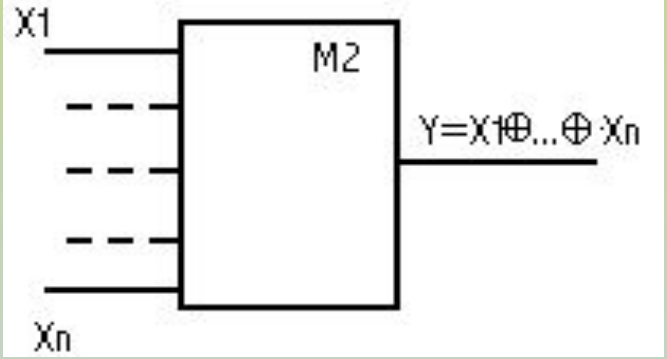
ANSI - это американский стандарт (American National Standart Institute), DIN - европейский стандарт (Deutsche Ingenieuring Normen - немецкий инженерный стандарт). Российский ГОСТ ближе к стандарту DIN.

В первом столбце таблицы показаны некоторые обозначения в соответствии с ГОСТ, который применим в России. Похожий стандарт DIN используется в странах Европы. Второй столбец соответствует стандарту ANSI.

К базовым логическим элементам относятся:



В России еще используется элемент «Сумматор по модулю 2», функция которого совпадают с элементом «Исключающее ИЛИ» только при наличии двух входов.



При построении функциональных схем используется совокупность типовых логических элементов, образующих *функционально полную систему* (*базис*).

Основными базисами являются:

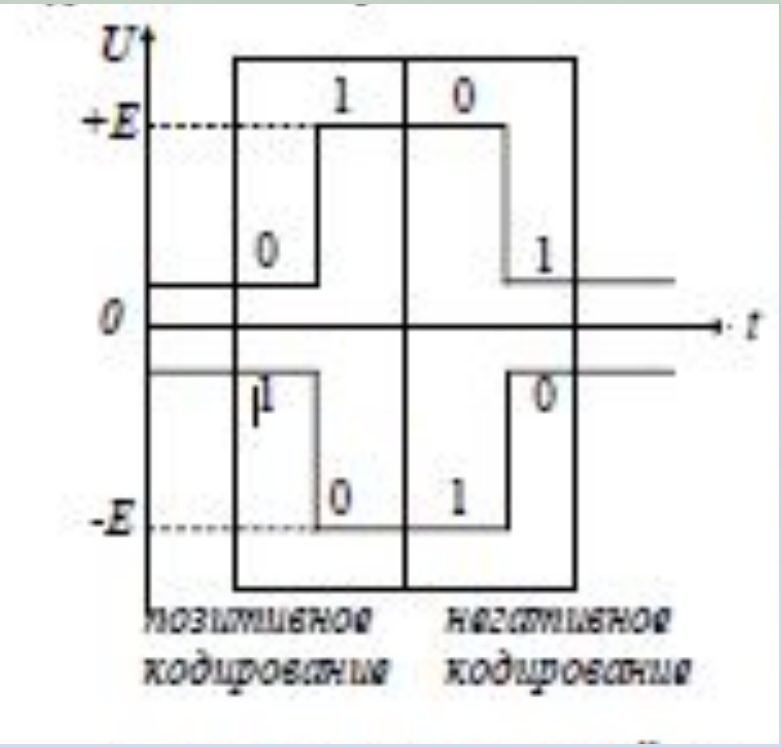
1. булев базис (И, ИЛИ, НЕ);
2. сокращенные булевы базисы (И, НЕ), (ИЛИ, НЕ);
3. универсальные базисы (И - НЕ), (ИЛИ - НЕ);
4. базис Жегалкина (И, М2).

Способы кодирования логических сигналов

В связи с использованием двухзначной логики в логических схемах как входные, так и выходные сигналы представляются с помощью, так называе-мого, ***двоичного сигнала***, особенностью которого является наличие двух четко различимых уровней, отождествляемых с нулем и единицей соответст-венно. В зависимости от того, какой уровень сигна-ла сопоставляется с логическим нулем, а какой с логической единицей, различают два способа кодирования двоичных сигналов:

позитивное (положительное) кодирование (позитивная логика) – высокий уровень сигнала принимается за “1”, а низкий за “0”.

-негативное (отрицательное) кодирование (негативная логика) высокий уровень сигнала принимается за “0”, а низкий за “1”.



При изменении способа ко-дирования двоичного сигна-ла функция одной и той же электронной схемы, реали-зующей некоторый логичес-кий элемент, меняется на противоположную.

Понятие логической схемы. Типы логических схем

Функциональная логическая схема представляет собой совокупность логических элементов и связей между ними.

Соединения логических элементов в рамках единой логической схемы должны удовлетворять следующим правилам:

1. К любому входу логического элемента могут быть подключены:

- выход любого другого логического элемента;
- входной сигнал (входная переменная);
- логическая константа (0 или 1).

В реальных электронных схемах подача логичес-кой константы на вход элемента реализуется заземлением или подключением этого входа, обязательно через резистор, к цепи питания.

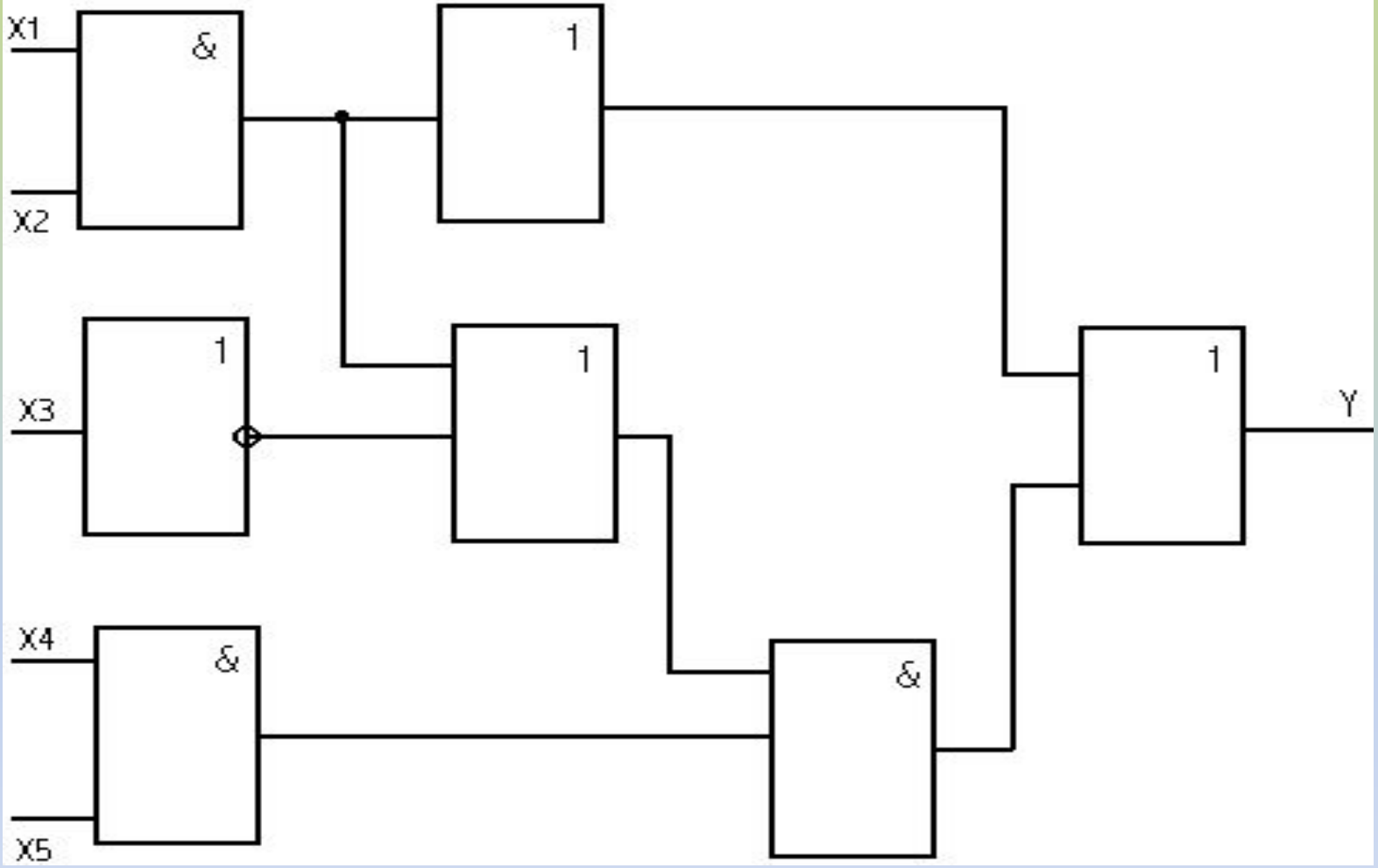
2. Выход любого логического элемента схемы может быть подключен к входу другого логического элемента или представлять собой выходной сигнал схемы. В частном случае возможна комбинация того и другого.

Логические схемы разделяются на два типа :
- комбинационные;
- последовательностные.

В ***комбинационных схемах*** значение выходного сигнала в любой момент времени зависит только от комбинации входных сигналов в этот же момент времени.

С учетом этой задержки распространения сигналов от входов схемы к ее выходу изменение значения выходного сигнала запаздывает по сравнению с моментом изменения входных сигналов.

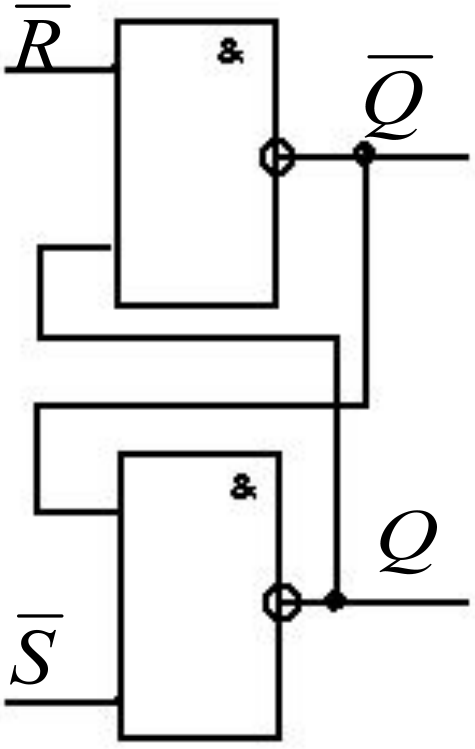
Поведение комбинационной схемы может быть описан булевой функцией, отражающей зависимость выходного сигнала схемы, как функции от входных сигналов, как аргумент этой функции.



Комбинационная схема

Для комбинационных схем с несколькими выходами эта зависимость отражается системой булевых функций.

В ***последовательностных*** схемах значение вы-ходного сигнала в любой момент времени зависит не только от комбинации входных сигналов в данный момент времени, но и от предыстории их изменения, то есть от последовательности входных сигналов во времени. Как правило, последователь-ностные схемы характеризуются некоторым внут-ренним состоянием, от которого зависит значение выходного сигнала (сигналов). Внутреннее состоя-ние такой схемы сохраняется на запоминающих элементах (триггерах), в связи с чем, схемы этого типа называются также *схемами с памятью*. В об-



R	S	Q(t)	Q(t+1)	Пояснения
0	0	0	0	Режим хранения информации R=S=0
0	0	1	1	
0	1	0	1	Режим установки единицы S=1
0	1	1	1	
1	0	0	0	Режим записи нуля R=1
1	0	1	0	
1	1	0	*	R=S=1 запрещенная комбинация
1	1	1	*	

Схема простейшего запоминающего элемента – RS-триггера.

Последовательностные схемы характеризуются на-личием так называемых петель, по которым выход некоторого элемента соединяется со входом этого же самого элемента через другие элементы схемы

Основные параметры комбинационных схем

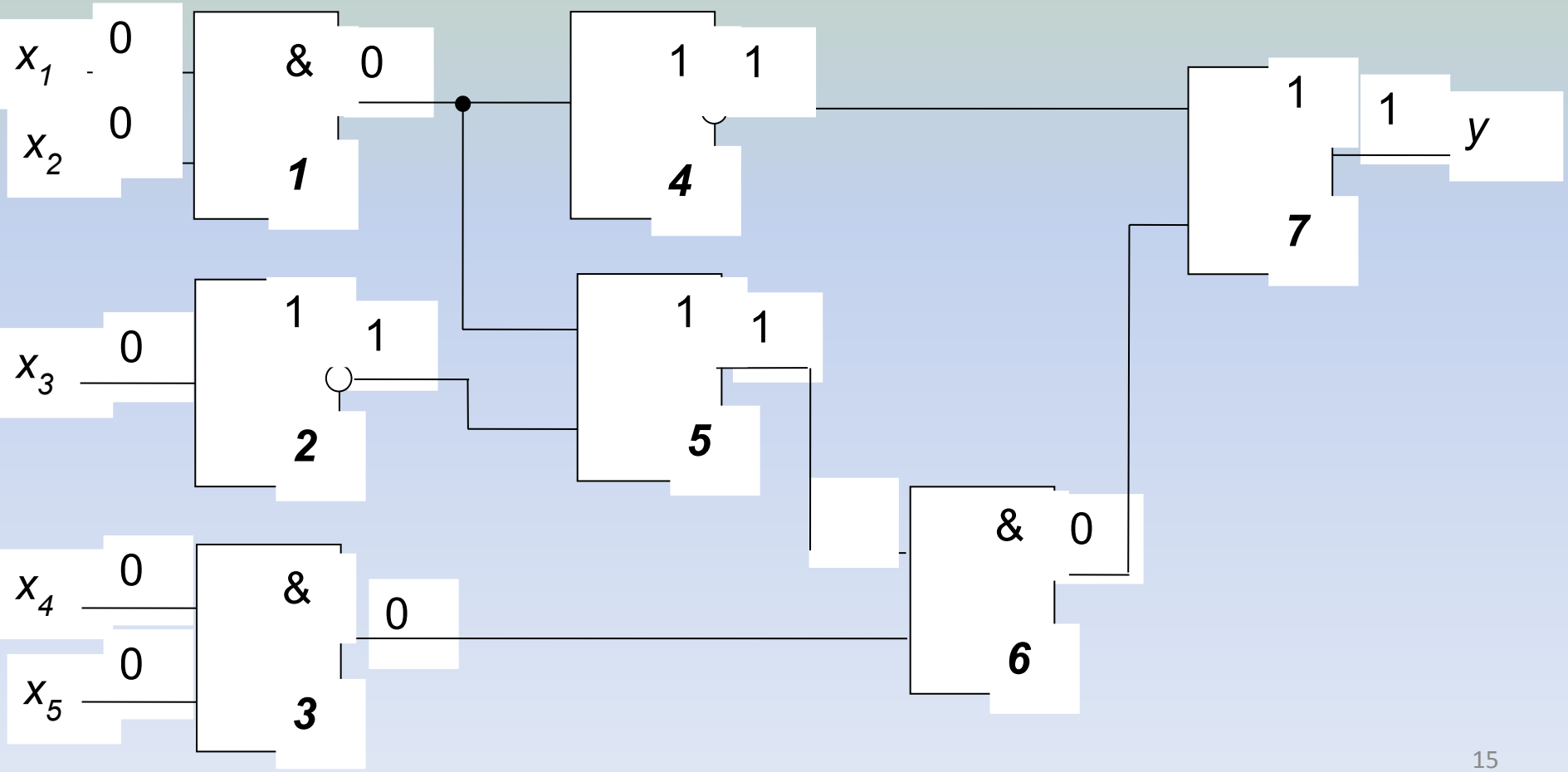
Основными параметрами комбинационных схем (КС) является стоимость и быстродействие.

Стоимость КС определяется двумя составляющи-ми; стоимостью логических элементов и стои-мостью связей. Как правило, стоимостью связей (соединений) пренебрегают. В свою очередь, стоимость логического элемента определяется числом его входов. Как правило, при построении абстрактных КС, не привязанных к конкретной системе элементов, ***цена схемы*** определяется

Быстродействие схемы, как правило, оценивает-ся ***задержкой*** распространения сигналов от входов схемы к ее выходу. Для абстрактных КС эту задерж-ку принято определять в виде: **T=Кт**, где т - задер-жка на одном логическом элементе; К – макси-мальное количество логических элементов, через которые проходит сигнал от входов к выходу.

Как правило, задержка схемы сопоставляется с числом уровней этой схемы. Для этой цели все элементы схемы распределяются по уровням. Входные сигналы схемы относятся к уровню 0. Элемент схемы относится к уровню *N*, если он

Уровень элемента, на выходе которого формируется выходной сигнал схемы, совпадает с количеством уровней схема и, тем самым, определяет ее задержку.



Для схемы, приведенной на рисунке:

- элементы 1,2,3 относятся к первому уровню;
- элементы 4,5 ко второму уровню;
- элемент 6 к третьему уровню;
- элемент 7 к четвертому уровню.

Задержка приведенной схемы составляет: Т=4т. Цена схемы по Квайну S_Q=12.

Задачи анализа и синтеза комбинационных схем

В общем виде ***задача анализа***, комбинационных схем сводится к определению функции, реализу-емой заданной схемой. В частном случае задача анализа состоит в определении реакции заданной схемы на

Для определения функции схемы целесообразно использовать ***метод подстановки***. Его идея сос-тоит в следующем. Выходы логических элементов обозначаются промежуточными переменными: y_1, y_2, … Последовательно продвигаясь от выхода схе-мы к входам, осуществляют подстановку в выход-ную функцию промежуточных переменных, как аргументов, до тех пор. пока в выражении функции все промежуточные переменные не будут замене-ны на входные переменные.

Для схемы, приведенной на рисунке:

$$y = y_1 \vee y_2 = y_4 \vee y_3 y_6 = x_1 x_2 \vee (y_4 \vee y_5) x_4 x_5 = x_1 x_2 \vee (x_1 x_2 \vee \bar{x}_3) x_4 x_5 .$$

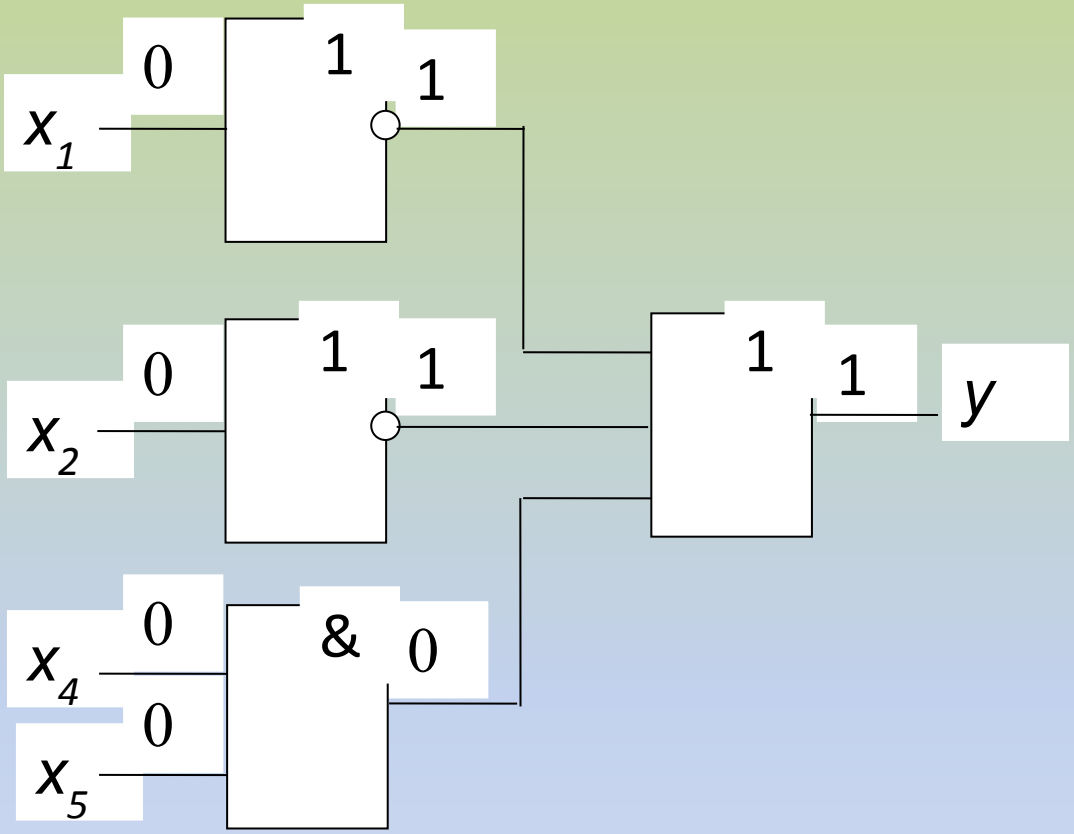
Полученное выражение для функции *y* можно привести к ДНФ и далее упростить с использова-нием законов булевой алгебры. Цепочка преобра-зований выражения имеет следующий вид:

$$y = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_1 x_2 \overline{x}_4 x_5 \vee \overline{x}_3 x_4 x_5 = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_4 x_5 \vee \overline{x}_3 x_4 x_5 =$$

$$= \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_4 x_5$$

Замечание. В полученном аналитическом выраже-нии отсутствует один из аргументов – x_3, т.е. функция является вырожденной по аргументу x_3.

Схема, реализующая заданную функцию по сокращенной аналитической форме, принимает следующий вид:



По сравнению с исходной КС полученная схема обладает меньшей ценой по Квайну S_Q=7 и меньшей задержкой T=2т.

Определим реакцию схемы на входной набор, например (00000). На обеих схемах показаны значения входных и промежуточных выходных сигналов: y(00000)=1.

Задача синтеза состоит в построении комбинационной схемы по заданному закону функционирования.

При решении задачи синтеза необходимо учитывать следующие моменты:

1. Синтезируемая схема должна, по возможности, содержать минимум оборудования (логических элементов). В связи с этим актуальной задачей яв-ляется минимизация заданной булевой функции. При решении этой задачи целесообразно получить как МДНФ, так и МКНФ.

2. Как правило, синтезируемая схема строится на логических элементах, принадлежащих некоторо-му базису.

Естественно, что используемая система элементов должна обладать свойством функциональной пол-ноты, то есть быть достаточной для построения на ее основе комбинационной схемы, реализующей любую, наперед заданную булеву функцию.

Такими функционально полными системами логических элементов являются: {И, ИЛИ, НЕ}; {И, НЕ}; {ИЛИ, НЕ}; {И-НЕ}; {ИЛИ-НЕ}; {И, М2}.

3. Как правило, при решении задачи синтеза стараются добиться экстремального значения одного из параметров схемы: минимума цены или максимума быстродействия (минимум задержки).

В тех случаях, когда критерием эффективности схемы является цена по Квайну, над минимальны-ми формами проводят дополнительные преобра-зования, путем решения задач ***факторизации*** и, возможно, ***декомпозиции*** булевой функции с целью дальнейшего уменьшения цены схемы.

Если же критерием эффективности схемы является задержка, то следует иметь в виду, что факторное преобразование и декомпозиция булевой функ-ции, в общем случае, могут уменьшить цену схе-мы, но всегда увеличивают ее задержку.

В более сложном случае схема оптимизируется по одному из показателей при

Пример подобной постановки задачи синтеза: син-тезировать схему с минимальной ценой по Квайну и с задержкой, не превосходящей величины 4т.

4. Необходимо учитывать, в каком виде представлены входные сигналы схемы: только в прямом или и в прямом, и в инверсном. В первом случае строится комбинационная схема с ***однофазными*** входами. Во втором случае - с ***парафазными***. В реальных комбинационных схемах входные сигналы представляют собой значение выходов регистров. Например, при построении комбинационного сумматора входные сигналы

При интегральной реализации регистров в целях минимизации числа выходов интегральной микросхемы выходные сигналы регистров, как правило, представляются только в прямом виде, что делает актуальными схемы с однофазными входами. Если же выходные сигналы регистра представляются в прямом и инверсном виде, то целесообразным является построение КС с парафазными входами.

При построении схем в реальной системе элемен-тов необходимо учитывать ряд конструктивных ограничений, основными из которых являются:

- ***коэффициент объединения по входу***, который представляет собой ограничение на число входов в логический элемент и может принимать значения 2, 3, 4, 8, 16;
- ***коэффициент разветвления по выходам***, определяющий максимальное число логических элементов, которые можно подключить к выходу данного элемента при сохранении условий его нормального функционирования. (Этот коэффи-циент определяет нагрузочную способность элемента и варьируется от 1 до 30).

5. В реальных системах элементов однотипные элементы объединяются в модули, реализуемые одной интегральной схемой.

В связи с этим при построении схем в реальной системе элементов необходимо минимизировать не столько число элементов и входов в них, сколько число модулей, из которых компонуется схема.

6. Как правило, в большинстве реальных систем элементов наряду с простыми логическими эле-ментами, реализующими элементарные булевы функции, используются также сдвоенные элемен-ты, реализующие составную булеву функцию. Типичным примером подобного элемента может служить элемент И-ИЛИ-НЕ.

7. В реальных системах элементов, как правило, используется значительное разнообразие логических элементов, относящихся к разным базисам. Тем не менее, построение схемы в рамках определенного базиса является достаточно актуальной задачей, так как позволяет уменьшить

Построение комбинационных схем по минималь-ным нормальным формам в различных базисах

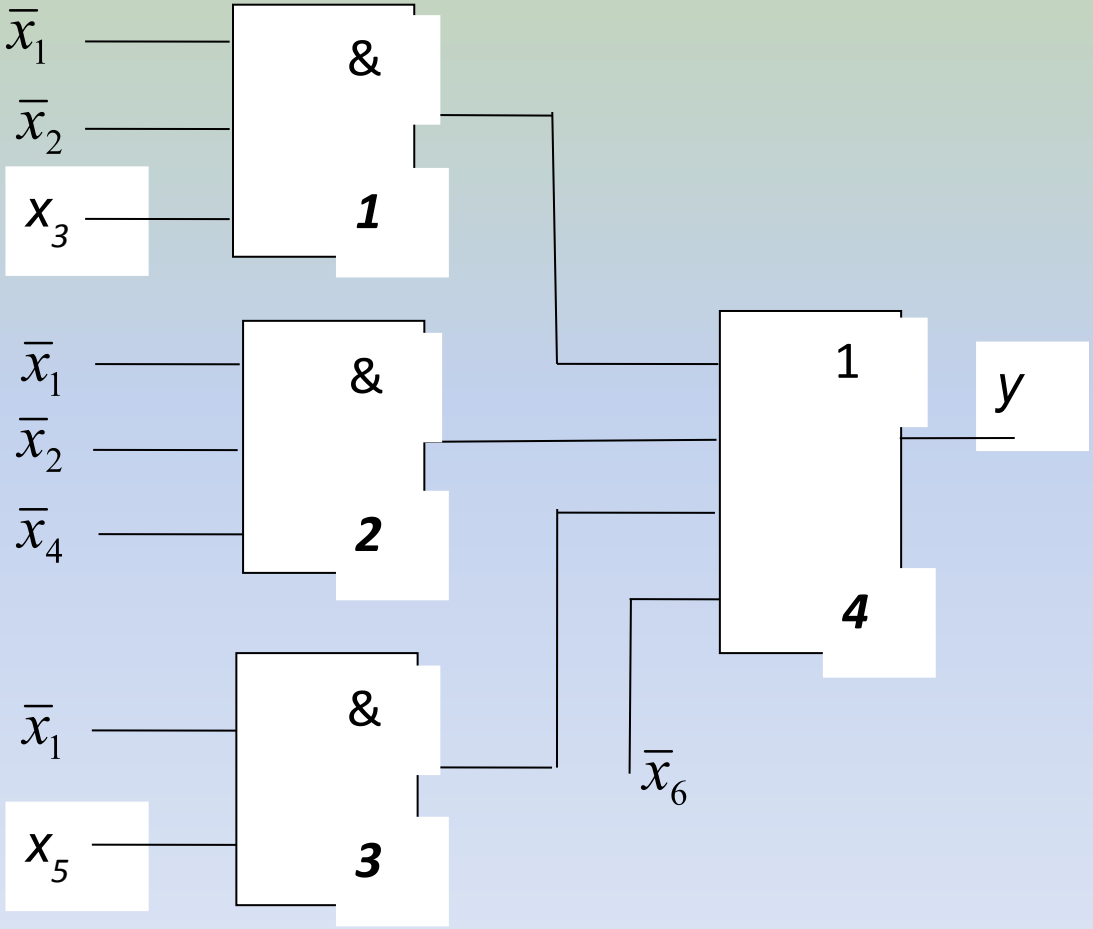
Булев базис (И, ИЛИ, НЕ)

Пример. Построить схему, реализующую функцию:

$$y = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_4 \vee x_1 x_5 \vee x_6$$

И (3) И (3) И (2) ИЛИ (4)

Построим схему с парафазными входами на элементах булева базиса, реализующую заданную функцию



Цена схемы:

S_Q=3+3+2+4=12,

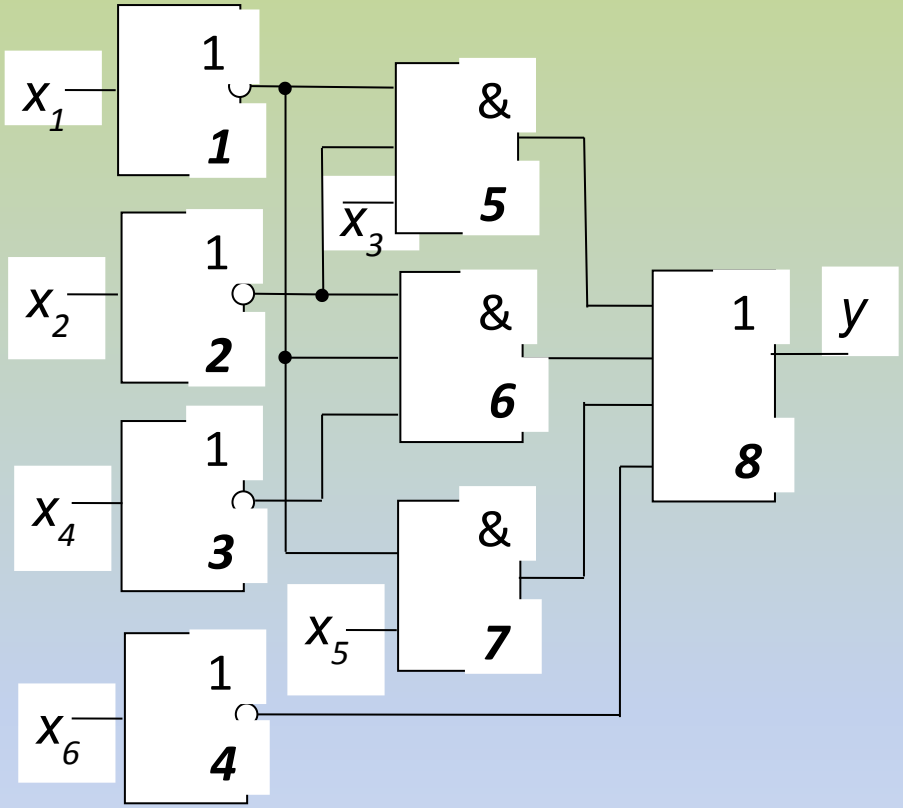
S^a=9,

S^b=9+4=13,

$S^a < S_Q < S^b$.

В общем случае, задержка схемы с парафазными входами: Т=2т (схема двухуровневая), в частном случае Т=1т.
При построении схемы по МКНФ элементами 1-го уровня будут ИЛИ, а 2-го - И.
В общем случае, задержка схемы с однофазными входами составляет Т=3т, а в частных случаях, Т=2т или Т=1т.

Построим схему с однофазными входами на элементах булева базиса, реализующую заданную функцию .



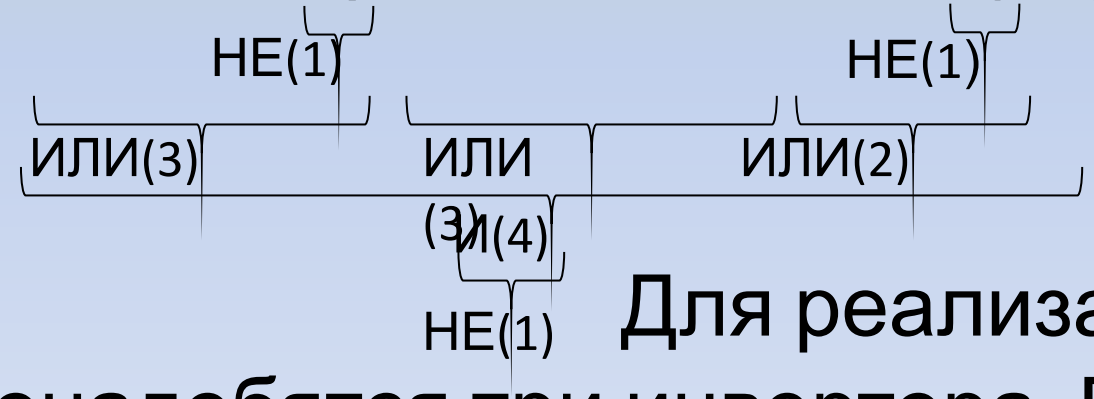
Цена схемы:
S_Q=16, S^a=9,
S^b=9+4=13,
S^a<S_Q<S^b+ 4 (четыре входных инвертора).

При построении схемы с однофазными входами целесообразно выбирать такую минимальную форму (если она не единственная), которая содер-жит наименьшее число инверсий над разными входными переменными.

При наличии единственной минимальной нормальной формы, можно осуществить ее преобра-зование с использованием законов двойного отрицания и двойственности (Де Моргана).

$$y = \overline{\overline{x_1 x_2 x_3} \vee \overline{x_1 x_2 x_4} \vee \overline{x_1} x_5 \vee \overline{x_6}} = \overline{\overline{x_1 x_2 x_3} \wedge \overline{x_1 x_2 x_4} \wedge \overline{x_1} x_5 \wedge x_6} =$$

$$= \overline{(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee x_2 \vee x_4)(x_1 \vee \overline{x_5}) x_6}.$$



Для реализации этой схемы понадобятся три инвертора. По сравнению с пре-дыдущей схемой цена уменьшается на единицу (S_Q=15). Однако наличие выходного инвертора приведет к увеличению задержки,

Сокращенный булев базис (И, НЕ)

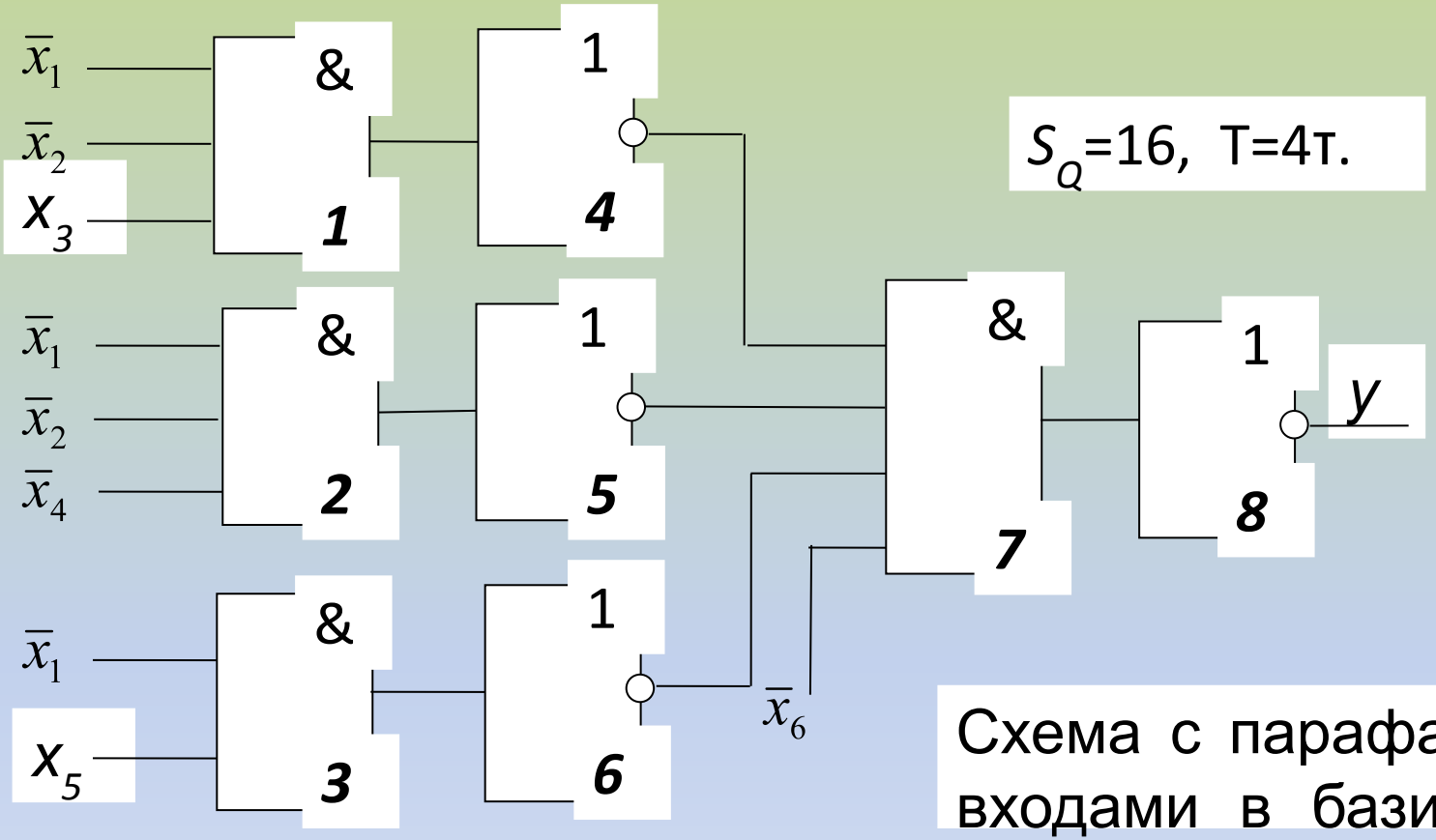
При использовании этого базиса необходимо из используемого выражения удалить все операции дизъюнкции, заменив их на конъюнкции и отрицания.

$$y = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_5 \vee \bar{x}_6$$

$$y = \overline{\overline{\bar{x}_1\bar{x}_2x_3} \wedge \overline{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4} \wedge \overline{\bar{x}_1x_5} \wedge x_6}$$

Используя предыдущие преобразования, можно построить схему как с парафазными, так и с однофазными входами.

Построим схему с парафазными входами в данном базисе.



S_Q=16, T=4т.

Схема с парафазными входами в базисе (И, НЕ)

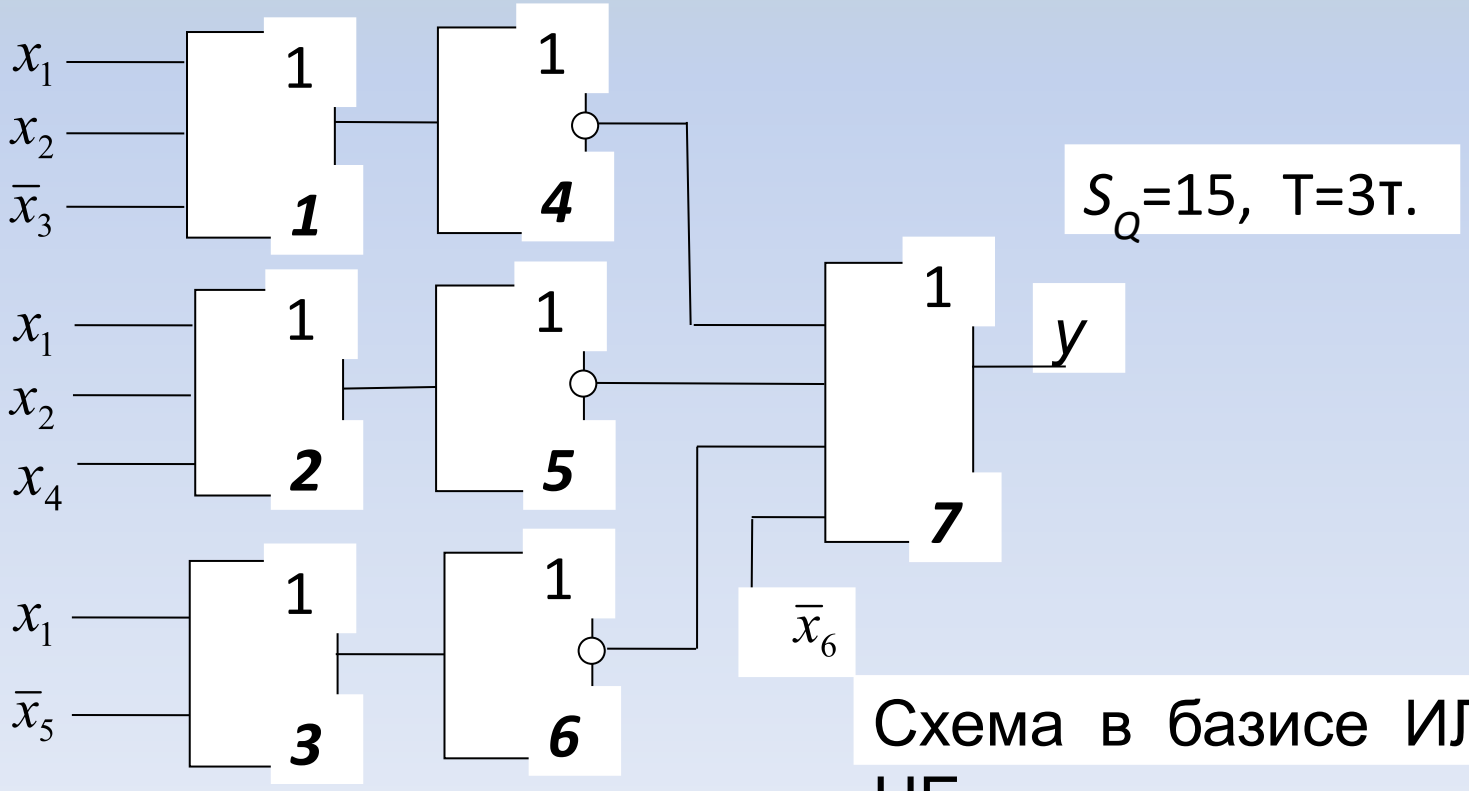
При построении схемы на элементах базиса (И, НЕ) по МДНФ задержка схемы, в общем случае, составляет T=4т. А при использовании однофазных входов - T=5т.

Сокращенный булев базис (ИЛИ, НЕ)

При использовании этого базиса необходимо из выражения удалить все операции конъюнкции, заменив их на дизъюнкции и отрицания.

$$y = \overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,x_5 \vee \overline{x_6}}$$

$$y = \overline{x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}} \vee \overline{x_1 \vee x_2 \vee x_4} \vee \overline{x_1 \vee \overline{x_5}} \vee \overline{x_6}$$



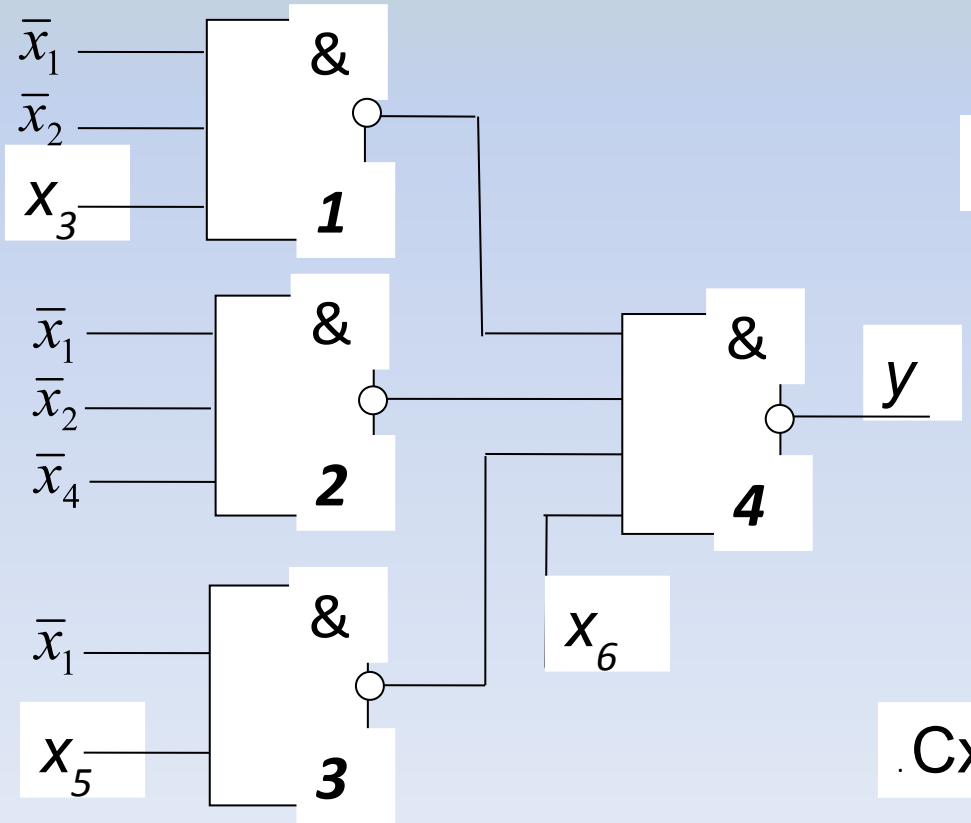
S_Q=15, T=3т.

Схема в базисе ИЛИ, НЕ

Универсальный базис (И-НЕ)

Для получения выражения в базисе (И-НЕ) воспользуемся выражением, полученном для базиса (И, НЕ).

$$y == \overline{\overline{\bar{x}_1\bar{x}_2x_3} \wedge \overline{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4} \wedge \overline{\bar{x}_1x_5} \wedge x_6} = (\bar{x}_1 \mid \bar{x}_2 \mid x_3) \mid (\bar{x}_1 \mid \bar{x}_2 \mid \bar{x}_4) \mid (\bar{x}_1 \mid x_5) \mid x_6$$



S_Q=12, T=2т.

. Схема в базисе (И-НЕ)

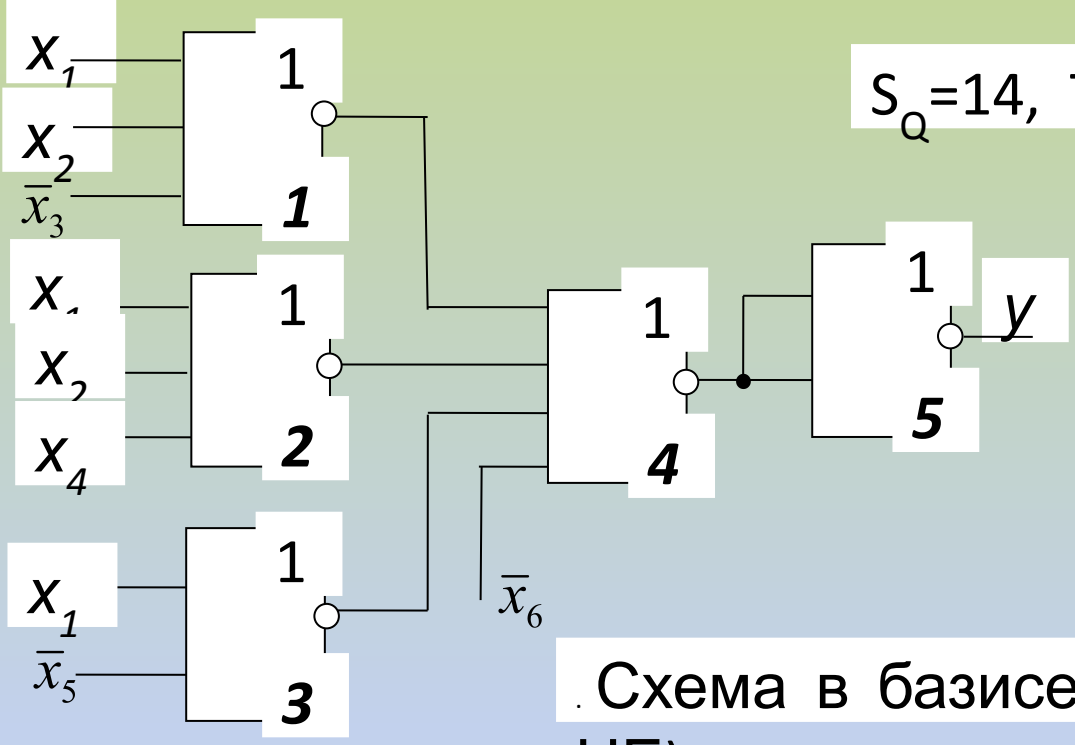
Заметим, что цена по Квайну и задержка схемы, построенной в базисе (И-НЕ), такие же, как и у схемы, построенной в булевом базисе.

Универсальный базис (ИЛИ-НЕ)

$$y = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_5 \vee \bar{x}_6 = \overline{\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_5 \vee \bar{x}_6} =$$

$$= \overline{(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)} \vee \overline{(x_1 \vee x_2 \vee x_4)} \vee \overline{(x_1 \vee \bar{x}_5)} \vee \bar{x}_6 =$$

$$= \overline{(x_1 \downarrow x_2 \downarrow \bar{x}_3) \downarrow (x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_4) \downarrow (x_1 \downarrow \bar{x}_5) \downarrow \bar{x}_6}$$



S_Q=14, T=3т.

. Схема в базисе (ИЛИ-НЕ)

Цена по Квайну и задержка схемы, построенной в базисе (ИЛИ-НЕ), из-за наличия выходного инвертора больше, чем у схем, построенных в булевом базисе и базисе (И-НЕ).

Задача факторизации булевых функций

Факторизация (факторное преобразование) булевой функции сводится к определению общих частей термов и вынесению их за скобки для ДНФ и из скобок для КНФ, что, как правило, приводит к уменьшению числа операций.

Рассмотрим факторизацию булевой функции из примера

$$y = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_5 \vee \bar{x}_6 = \quad (S_Q = 12, \quad T = 2\tau),$$

И (3) И (3) И (2)

ИЛИ (4)

схема двухуровневая, поэтому задержка равна 2

вынесем из первых двух термов переменные $\bar{x}_1\bar{x}_2$

получим

$$= \bar{x}_1\bar{x}_2(x_3 \vee \bar{x}_4) \vee \bar{x}_1 x_5 \vee \bar{x}_6 = \quad (S_Q = 10, T = 3\tau),$$

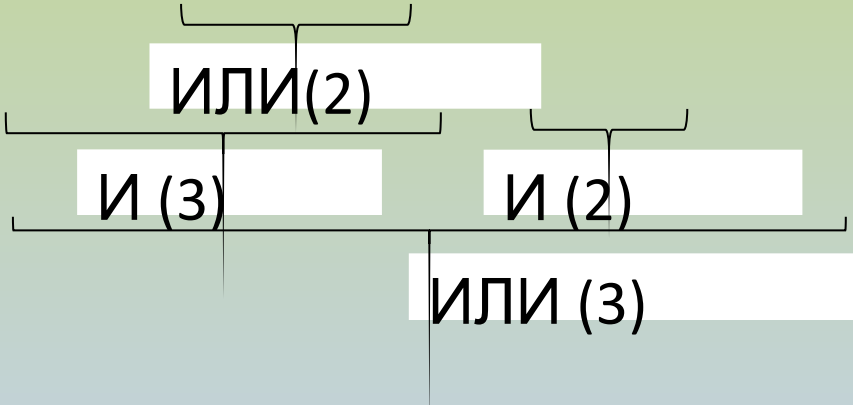


схема трехуровневая, поэтому задержка равна 3

можно из исходного выражения сначала из трех термов вынести переменную $\bar{x}_1$

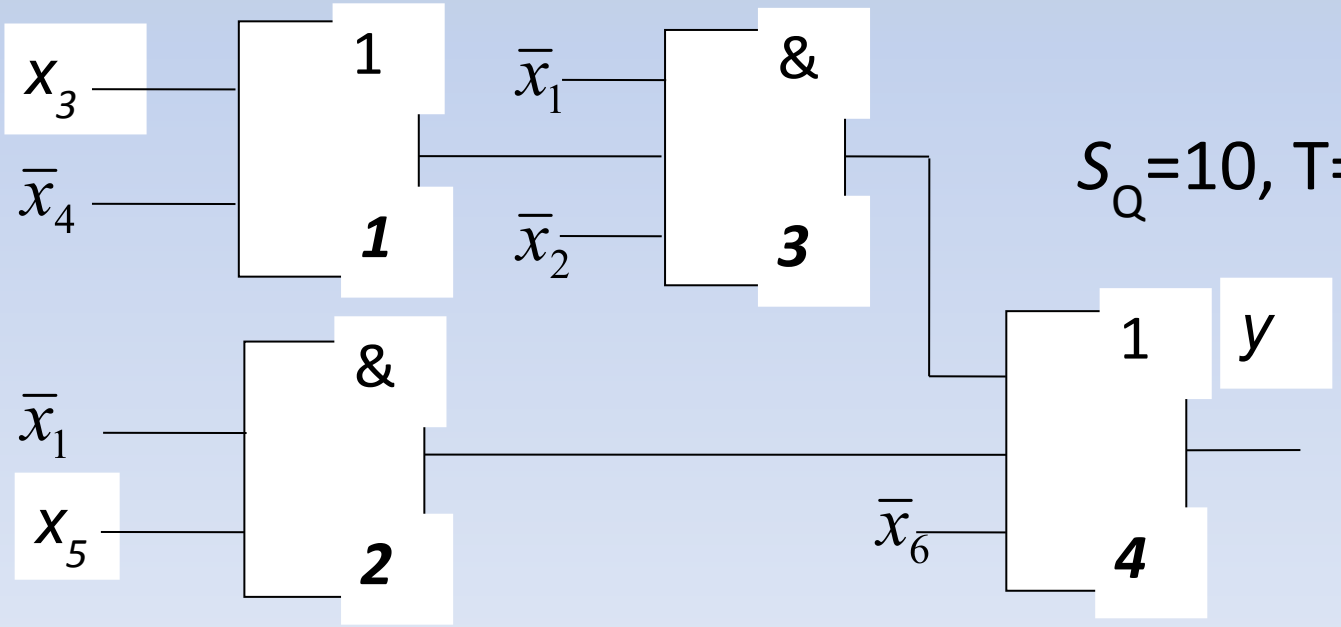
$$= \bar{x}_1(\bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_5) \vee \bar{x}_6 = \quad (S_Q = 11, T = 4\tau),$$

а затем из первых двух термов переменную $\bar{x}_2$

$$= \bar{x}_1(\bar{x}_2(x_3 \vee \bar{x}_4) \vee x_5) \vee \bar{x}_6 \quad (S_Q = 10, T = 5\tau).$$

Решение задачи факторизации, приводя к умень-шению цены схемы, увеличивает ее задержку. Для рассмотренного примера S_Q=10, а T_1=3т и T_2=5т.

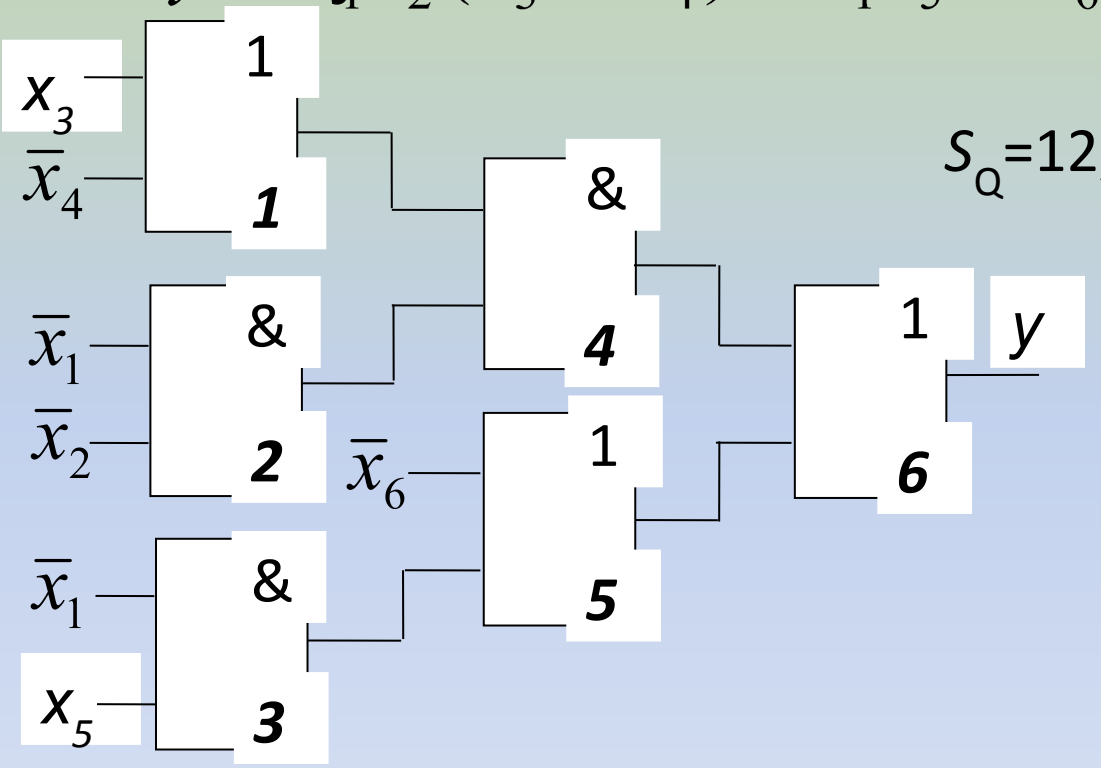
В тех случаях, когда схема синтезируется при ограничении на число входов в элементы, например, равное двум, предпочтение следует отдавать второй скобочной форме.
Построим схему по первому выражению без ограничений на число входов в элементы:



S_Q=10, T=3т.

Построим схему по первому выражению с ограничением на число входов в элементы, равное двум.

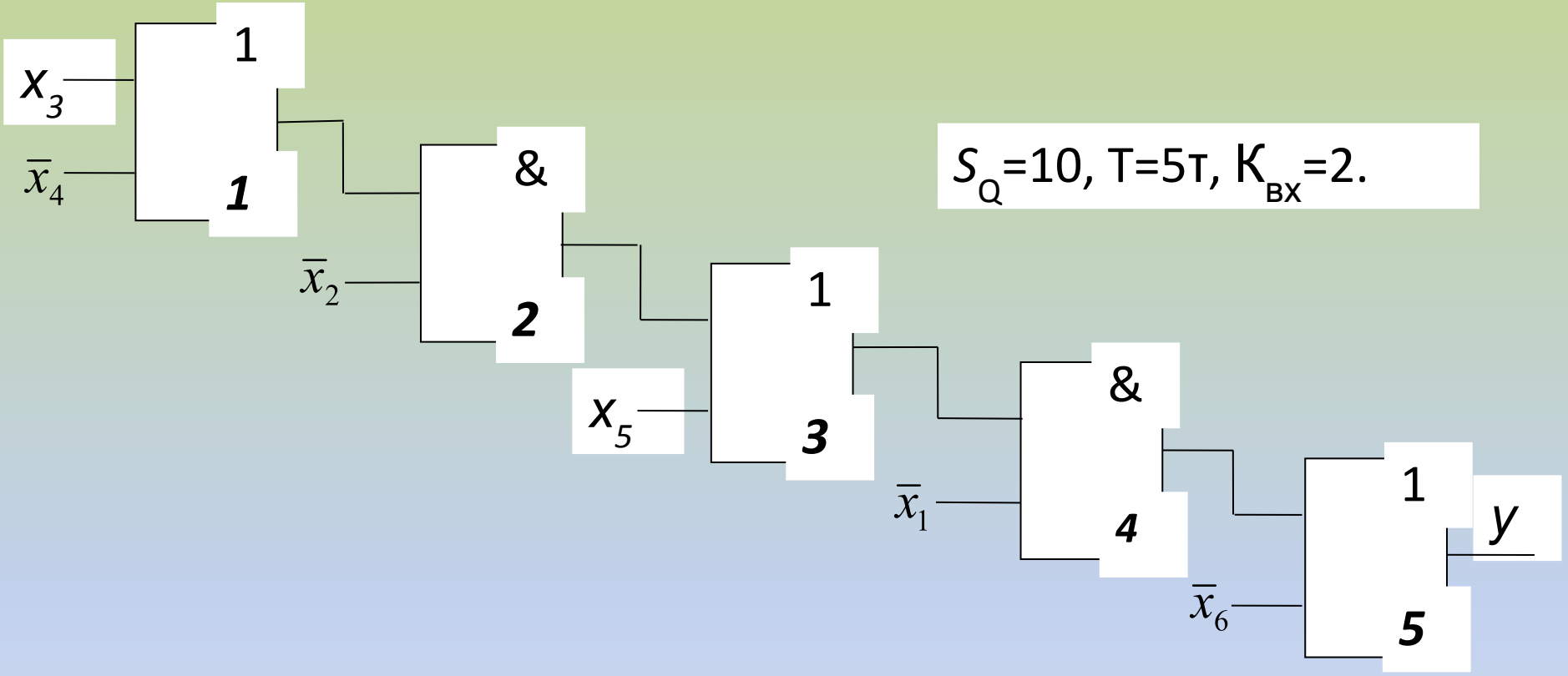
$$y = \bar{x}_1 \bar{x}_2 (x_3 \vee \bar{x}_4) \vee \bar{x}_1 x_5 \vee \bar{x}_6$$



S_Q=12, T=3т, $К_{вх}$=2.

Построим схему по второму выражению с ограничением на число входов в элементы, равное двум.

$$y = \bar{x}_1 (\bar{x}_2 (x_3 \vee \bar{x}_4) \vee x_5) \vee \bar{x}_6 .$$



S_Q=10, T=5т, $К_{вх}$=2.

Схема, построенная по второму выражению, по критерию цены схемы является более предпочтительной по сравнению с первой схемой, а по критерию минимальной задержки - лучше первая схема.

Пример. Для функции, заданной в МКНФ

$y = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee x_5) \qquad (S_Q = 11, T = 2\tau)$

выполним факторное преобразование.

Вынесем из первых двух термов дизъюнкцию

$y = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3\bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee x_5) = \quad (S_Q = 9, \ T = 3\tau),$

можно вынести из всех термов переменную $\bar{x}_1$

$= \bar{x}_1 \vee (x_2 \vee x_3)(\bar{x}_4 \vee x_2)x_5 = \quad (S_Q = 9, \ T = 3\tau),$ а затем – x_2 переменную из двух

$= \bar{x}_1 \vee (x_2 \vee x_3\bar{x}_4)x_5 \qquad (S_Q = 8, \ T = 4\tau).$

Оценка эффекта факторизации

Этот эффект характеризуется разностью цен схемы до и после факторизации.

Можно показать, что для однократной факториза-ции ее эффект определяется выражением:

$$\Delta S_Q = S_Q^{\text{до}} - S_Q^{\text{после}} = m\,(k\text{-}1) + q - \Delta\,,$$

где m - количество букв, выносимых за скобки;

k - количество термов, из которых происходит вынесение;

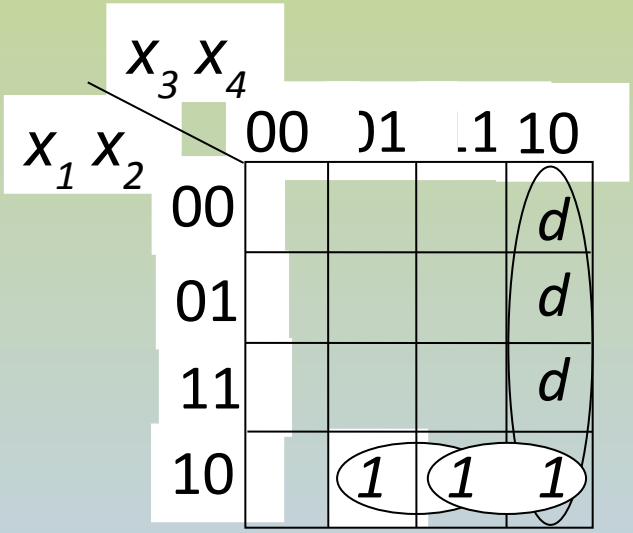
q - количество термов, в которых после вынесения осталась одна буква ($q \le k$);

Δ=1, если вынесение осуществляется из всех термов;

Замечание. Для эффективного решения задачи факторизации необходимо учитывать следующее:

1. При наличии у булевой функции нескольких мини-мальных форм целесообразно выбрать из них те, для которых факторизация даст выигрыш в цене схемы.
2. При минимизации не полностью определенной булевой функции может оказаться, что максимальный эффект за счет факторизации дает нормальная форма, не являющаяся минимальной.

Пример. Рассмотрим минимизацию функции $y=f^4(x)$, которая принимает значение, равное единице на наборах (9, 10, 11) и безразличное значение – на наборах (2, 6, 14) и выполним факторизацию.



$$C_{\min}(f)=\begin{Bmatrix}10X1\\XX10\end{Bmatrix} \qquad C(f)=\begin{Bmatrix}10X1\\101X\end{Bmatrix}$$

МДНФ $y=x_3\bar{x}_4\vee x_1\bar{x}_2x_4 \quad (S_Q=7).$

ДНФ $y=x_1\bar{x}_2x_3\vee x_1\bar{x}_2x_4=x_1\bar{x}_2(x_3\vee x_4) \quad (S_Q=5).$

Второе покрытие не минимальное, но эффект от факторизации больше.

3. В некоторых случаях максимального эффекта за счет факторизации можно достичь путем расширения термов МНФ с применением законов тавтологии.

Пример. Выполним факторизацию булевой функции, заданной в МДНФ

$y = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_4 \vee x_1x_3x_5x_6 \vee x_2x_4x_5x_6 =$ (S_Q=18),

вынесем из первых двух термов конъюнкцию переменных x_1x_2, а из остальных - x_5x_6:

$= x_1x_2(x_3 \vee x_4) \vee x_5x_6(x_1x_3 \vee x_2x_4) =$ (S_Q=16),

расширим дизъюнктивный терм $(x_3 \vee x_4)$ переменными x_1 и x_2:

$= x_1x_2(x_1x_3 \vee x_2x_4) \vee x_5x_6(x_1x_3 \vee x_2x_4) =$

(S_Q=20), вынесем общую дизъюнкцию за скобки:

$= (x_1x_3 \vee x_2x_4)(x_1x_2 \vee x_5x_6)$

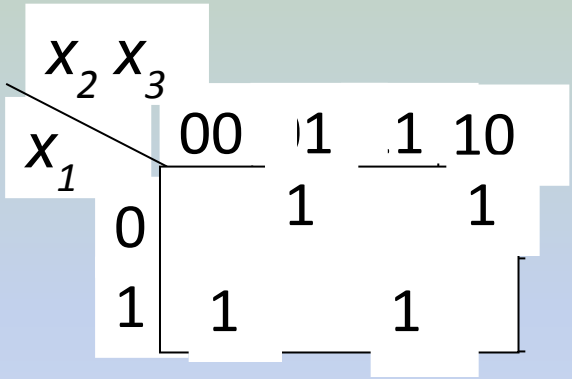
(S_Q=14).

Декомпозиция булевых функций

Задача декомпозиции булевой функции в общем случае состоит в таком разделении множества ее аргументов на ряд подмножеств, при котором можно выразить исходную функцию $f(x)$ через вспомогательную промежуточную функцию $\phi(z)$, где $z \subset x$.

В частном случае, имеет место так называемая простая разделительная декомпозиция, при которой множество аргументов x разделяется на два непересекающихся подмножества $(z,w \rightarrow (z \cap w = \varnothing;\ z \cup w = x))$ и приведение исходной функции к виду $f(x) = f(\phi\ (z,w))$.

Пример. Рассмотрим задачу декомпозиции функции от трех переменных: $f^3(x) = \bigvee_{f=1}(1,2,4,7)$. Заметим, что минимальные формы функции совпадают с каноническими.



$$f(x)=\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3 = \quad (S_Q=18)$$

$$=\bar{x}_1(\bar{x}_2x_3 \vee x_2\bar{x}_3) \vee x_1(\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_2x_3) \quad (S_Q=18).$$

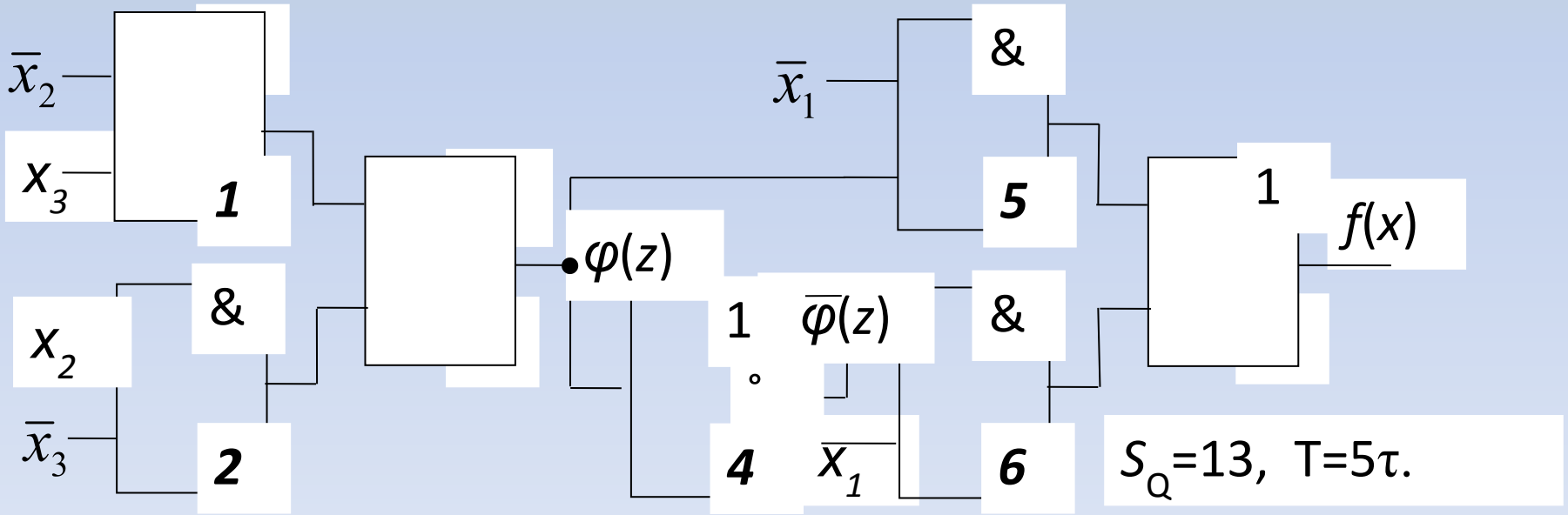
$x_2 \oplus x_3$ $\qquad$ $x_2 \sim x_3$

Видно, что эффект от факторизации нулевой, но факторизация позволила выделить две обратные булевы функции: неравнозначность и равнознач-ность. Используем это для декомпозиции.

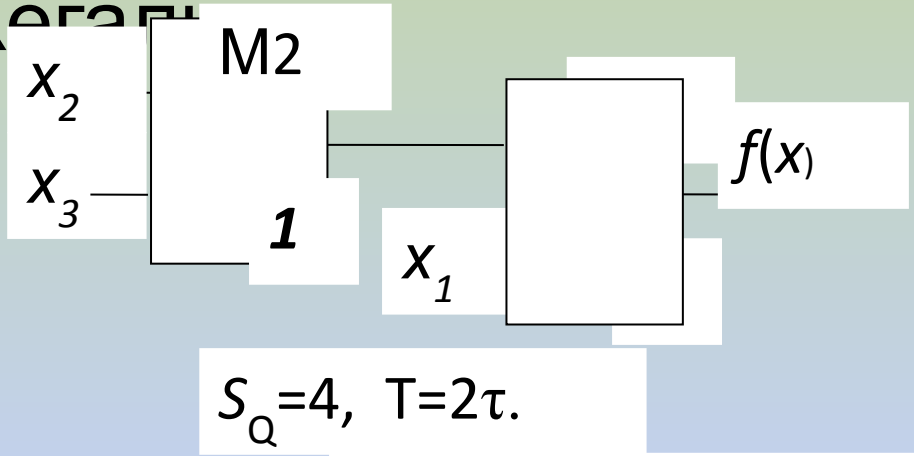
$$z=\{x_2,x_3\},\ w=\{x_1\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi(z)=\bar{x}_2x_3\vee x_2\bar{x}_3\\ f(z)=\bar{x}_1\varphi(z)\vee x_1\overline{\varphi}(z)\end{array}\right| \quad S_Q=13$$

Построим схему по полученной системе булевых функций

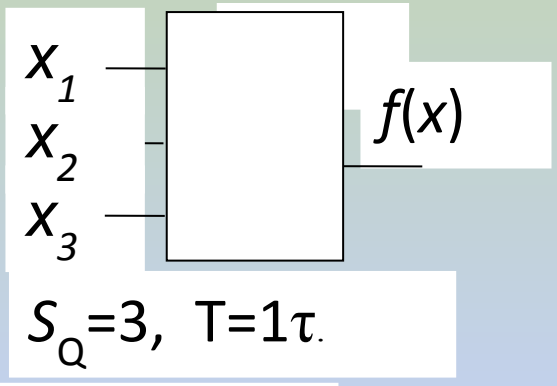


Эту схему с целью уменьшения цены и задержки удобно реализовать в базисе Жегал



S_Q=4, T=2τ.

а)



S_Q=3, T=1τ.

б)

Схемы в базисах Жегалкина: а) на двухвходовых элементах; б) на трехвходовом элементе

Применение декомпозиции там, где это уместно, во многих случаях позволяет уменьшить цену синтезируемой схемы.

Пример. Применить факторизацию и декомпозицию к функции

$$y = x_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee x_2\bar{x}_5 \vee \bar{x}_3\bar{x}_5 \vee x_4\bar{x}_5 \qquad S_{\text{Q}} = (14).$$

Вынесем из трех последних термов переменную $\bar{x}_5$

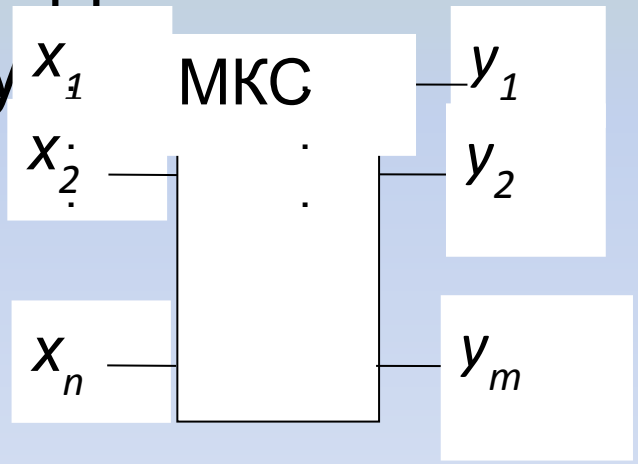
$$= \underbrace{x_1x_2x_3x_4}_{\overline{\varphi}(z)} \vee \bar{x}_5 \underbrace{(x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)}_{\varphi(z)} \qquad (S_{\text{Q}} = 11).$$

Применим к функции декомпозицию

$$\begin{cases} \varphi(z) = x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \\ f(x) = x_1\overline{\varphi}(z) \vee \bar{x}_5\varphi(z) \end{cases} \qquad (S_{\text{Q}} = 10).$$

Синтез многовыходных комбинационных схем

Многовыходная комбинационная схема (МКС) представляется в виде обобщенного «черного ящика», а закон функционирования МКС представляется в виде системы булевых фу



$$\begin{cases} y_1 = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ y_m = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}.$$

Обобщенное представление МКС

При решении задачи синтеза МКС применяются методы минимизации, факторизации и, возможно, декомпозиции, только не к одной булевой функции, а к системе булевых функций.

Минимизация системы булевых функций

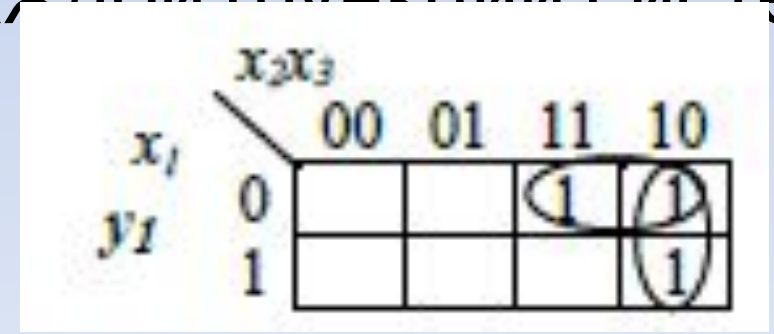
Задача минимизации применительно к системе булевых функций решается аналогично как для одной функции и сводится к получению минималь-ного покрытия. Для решения этой задачи система функций приводится к одной функции путем до-полнения множества аргументов подмножеством вспомогательных переменных, с помощью которых выделяются отдельные

Пример. Решим задачу минимизации системы булевых функций:

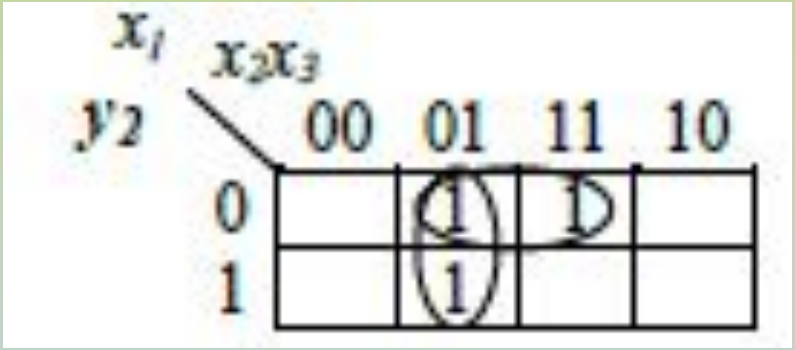
$$\begin{cases} y_1^3(x) = \vee(2,3,6) \\ y_2^3(x) = \vee(1,3,5). \end{cases}$$

Раздельная минимизация функций системы

Решим задачу минимизации раздельно для каждой функции системы на картах Карно



$$C_{\min}(y_1) = \begin{Bmatrix} 01X \\ X10 \end{Bmatrix}$$



$$C_{\min}(y_2) = \begin{Bmatrix} 0X1 \\ X01 \end{Bmatrix}$$

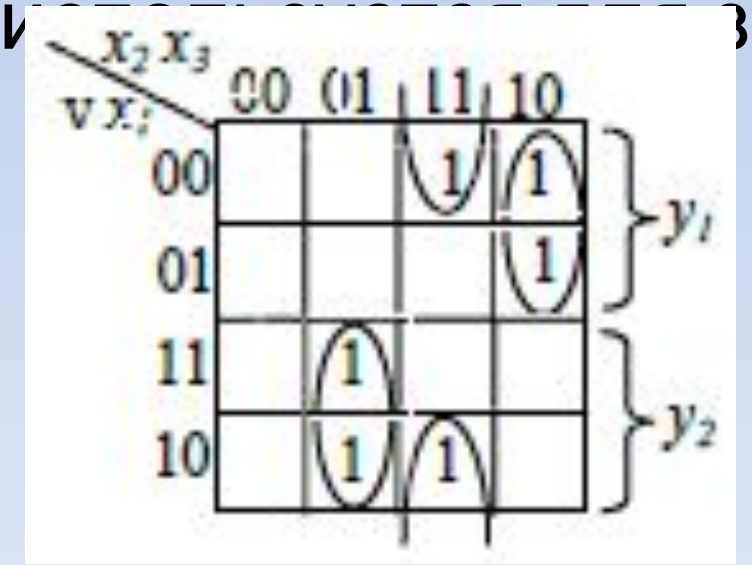
МДНФ :

$$\left.\begin{cases} y_1 = \bar{x}_1 x_2 \vee x_2 \bar{x}_3 & S_Q^{y_1} = 6 \\ y_2 = \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_3 & S_Q^{y_2} = 6 \end{cases}\right| \; S_Q^{\Sigma} = 12$$

При построении комбинационной схемы по МДНФ, она распадается на две независимые подсхемы, отдельные для реализаций каждой функции.

Совместная минимизация функций системы

Решим задачу минимизации совместно для обеих функций системы. Приведем систему булевых функций к одной функции от четырех переменных, введя вспомогательную переменную v. Значение переменной v=0 использовалось для задания y_1, а v=1 - для y_2.



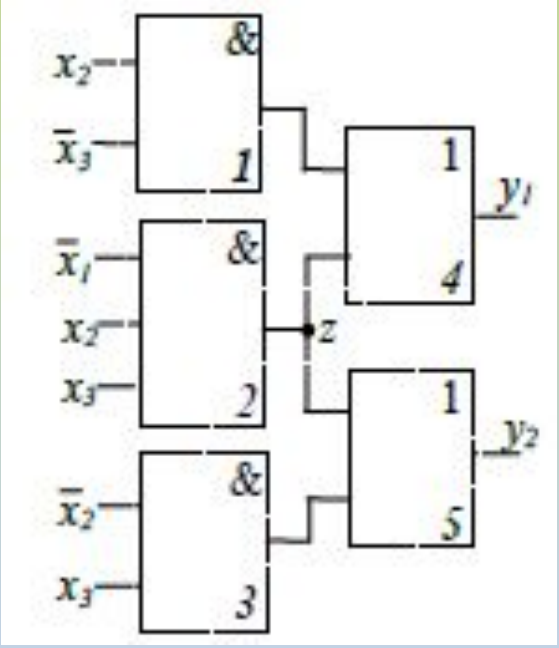
$$C_{\min}(Y)=\begin{cases}1X01\\0X10\end{cases}\begin{matrix}y_2\\y_1\end{matrix}\quad\begin{cases}X011\end{cases}\ y_1,y_2$$

Минимальное покрытие состоит из трех кубов, первый из которых принадлежит только функции y_2, второй – y_1, а третий обеим функциям. Справа от кубов покрытия отмечается их принадлежность функциям системы.

$$z = \bar{x}_1 x_2 x_3$$

Сначала выделяют общий терм для обеих функций . Составим минимальные ДНФ для функций системы с учетом общего терма.

$$\begin{cases} z = x_1 x_2 x_3 & S_Q = 3 \\ y_1 = x_2 \bar{x}_3 \vee z & S_Q^{y_1} = 4 \\ y_2 = \bar{x}_2 x_3 \vee z & S_Q^{y_2} = 4 \end{cases} \Bigg| \; S_Q^{\Sigma} = 11.$$



S_Q=11, T_1=T_2=2т.

Сравнение результатов раздельной и совместной минимизаций показывает, что цена после совместной минимизации меньше.

Пример. Выполнить минимизацию системы булевых функций:

$$\begin{cases} y_1 = \vee(3,5,6,7) \\ y_2 = \vee(0,1,6,7) \\ y_3 = \vee(0,2,7) \\ y_4 = \vee(0,2,4,5,6,7) \end{cases}$$

Введем вспомогательные переменные:

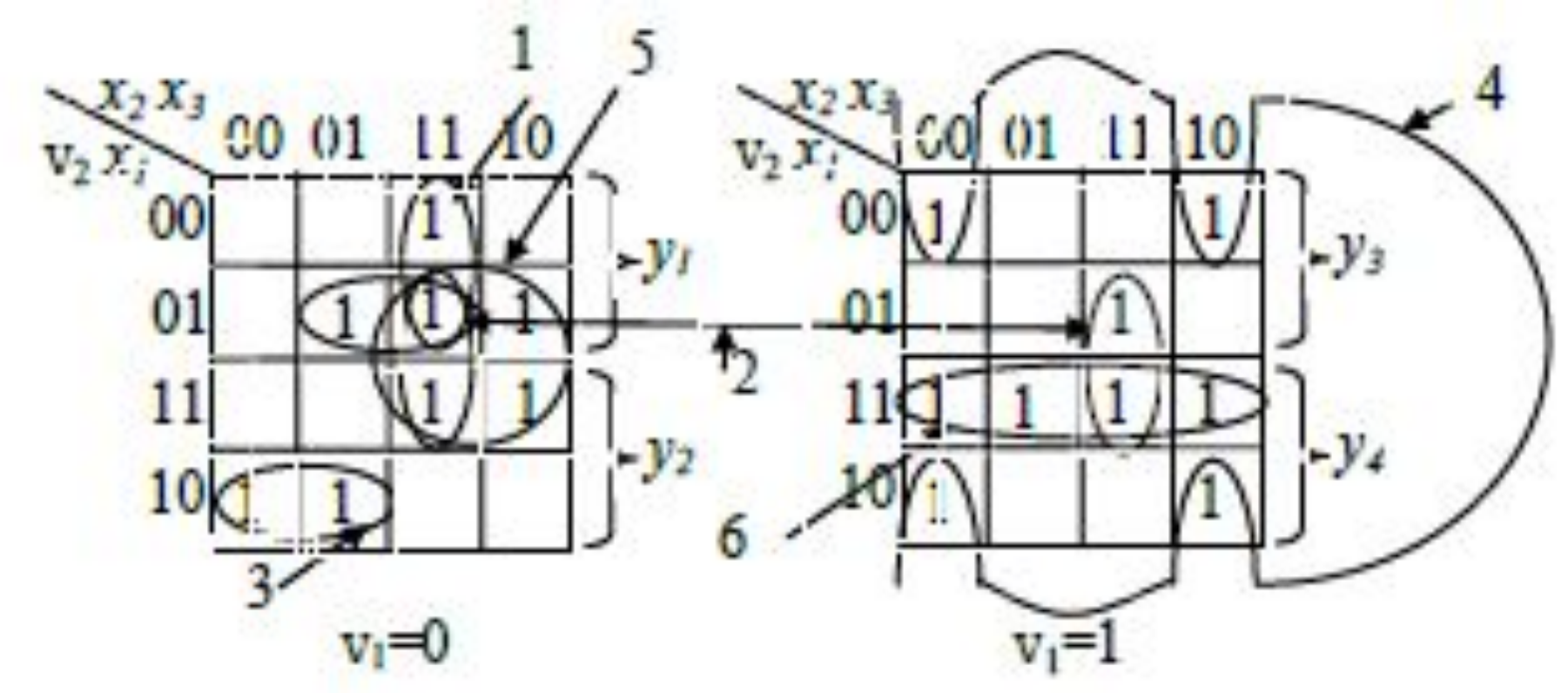
v_1v_2=00 y_1

v_1v_2=01 y_2

v_1v_2=10 y_3

v_1v_2=11 y_4

Выполним совместную минимизацию функций системы



После получения минимального покрытия, с целью удобства, рядом с каждым кубом покрытия рекомендуется проставить его принадлежность функциям системы.

$$Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

$$C_{\min}(Y) = \left(\begin{array}{c|cc|ccc|l}
 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & \mathrm{X} & 1 & 1 & y_1 \\
2 & \mathrm{X} & \mathrm{X} & 1 & 1 & 1 & y_1, y_2, y_3, y_4 \\
3 & 0 & 1 & 0 & 0 & \mathrm{X} & y_2 \\
4 & 1 & \mathrm{X} & 0 & \mathrm{X} & 0 & y_3, y_4 \\
5 & 0 & \mathrm{X} & 1 & 1 & \mathrm{X} & y_1, y_2 \\
6 & 1 & 1 & 1 & \mathrm{X} & \mathrm{X} & y_4
\end{array}\right)$$

При совместной минимизации булевых функций может оказаться, что некоторые кубы поглощаются другими, т.е. после получения минимальной фор-мы следует проверить необходимость использова-ния каждого общего куба для покрытия отдельных функций.

Заметим, что второй куб, покрывающий вершины всех функций системы, на самом деле, соответст-вует простой импликанте только для функции y_3, а вершины остальных функций покрыты другими кубами. Поэтому принадлежность кубов функциям можно записать следующим образом:

$$Y=(y_1,y_2,y_3,y_4)$$

$$C_{\min}(Y)=$$

	v_1	v_2	x_1	x_2	x_3	
1	0	0	X	1	1	y_1
2	X	X	1	1	1	y_3
3	0	1	0	0	X	y_2
4	1	X	0	X	0	y_3, y_4
5	0	X	1	1	X	y_1, y_2
6	1	1	1	X	X	y_4

Общие термы:

$$z_1=\bar{x}_1\bar{x}_3$$

$$z_2=x_1x_2$$

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
z_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_3 & S_Q^{z_1} = 2 \\
z_2 = x_1 x_2 & S_Q^{z_2} = 2 \\
y_1 = x_2 x_3 \vee z_2 & S_Q^{y_1} = 4 \\
y_2 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee z_2 & S_Q^{y_2} = 4 \\
y_3 = x_1 x_2 x_3 \vee z_1 & S_Q^{y_3} = 5 \\
y_4 = z_1 \vee x_1 & S_Q^{y_4} = 2
\end{array}
\right| \quad S_Q^{\Sigma} = 19
$$

При введении вспомогательных переменных следует учитывать, что кодирование функций системы влияет на результат минимизации. И для похожих функций следует использовать соседнее кодирование. Так, если функции системы обозначить: $v_1v_2=00$ y_3
$v_1v_2=01$ y_1
$v_1v_2=10$ y_2
$v_1v_2=11$ y_4,
то после совместной минимизации $S_Q^{\Sigma} = 24$

При записи минимальных форм сначала выделя-ются термы, общие для нескольких функций и обо-значаются вспомогательными функциями (z_1, z_2 и т.д.).

Далее выписываются минимальные формы для отдельных функций с учетом их собственных термов и общих термов, принадлежащих данной функции.
Если число функций не равно 2^k, где k=1, 2. …, то появляются незадействованные комбинации вспомогательных переменных и все наборы аргументов для них являются безразличными. Безразличные наборы аргументов используются для минимизации.

Пример. Рассмотрим систему булевых функций:

$$\begin{cases} y_1 = \vee(0,1,6,7) \\ y_2 = \vee(0,2,7) \\ y_3 = \vee(3,5,6,7) \end{cases}$$

Введем вспомогательные переменные:

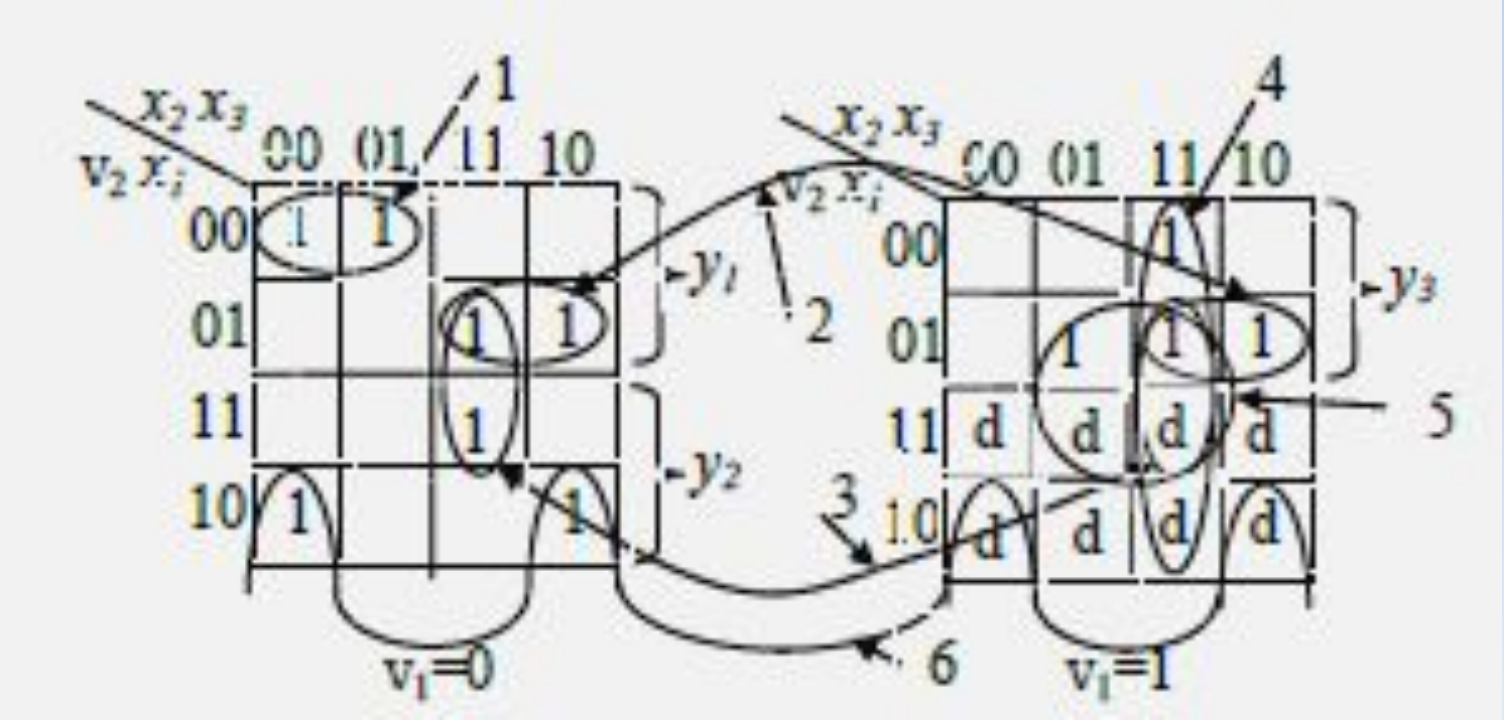
v_1v_2=00 y_1

v_1v_2=01 y_2

v_1v_2=10 y_3

v_1v_2=11 d

Выполним совместную минимизацию функций системы на картах Карно



$Y=(y_1,y_2,y_3)$

$C_{\min}(Y)=$

	v_1	v_2	x_1	x_2	x_3	
1	0	0	0	0	X	y_1
2	X	0	0	1	X	y_1, y_3
3	X	X	1	1	1	y_1, y_2, y_3
4	1	X	X	1	1	y_3
5	1	X	1	X	1	y_3
6	X	1	0	X	0	y_2

Общие термы: $z_1=\bar{x}_1x_2$

$z_2=x_1x_2x_3$

Заметим, что третий куб, на самом деле, соответствует простым импликантам только для функций y_1 и y_2, а вершины функции y_3 покрыты

$$\left\{\begin{array}{ll} z_1 = \bar{x}_1 x_2 & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{z_1} = 2 \\ z_2 = x_1 x_2 x_3 & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{z_2} = 3 \\ y_1 = z_1 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee z_2 & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{y_2} = 5 \\ y_2 = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee z_2 & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{y_3} = 4 \\ y_3 = z_1 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_3 & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{y_4} = 7 \end{array}\right| \quad \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{\Sigma} = 21$$

Замечание. Для большого числа функций от многих аргументов применение карт Карно для совместной минимизации выглядит затруднительным. В этом случае можно использовать следующие подходы:

1. применение машинных методов;
2. раздельная минимизация и использование карт Карно;
3. выделение подмножеств из функций системы для

Факторизация системы булевых функций

Применительно к системе булевых функций ***задача факторизации*** состоит в выделении общих термов или их частей для отдельных функций системы с целью уменьшения цены схемы, реализующей эту систему.

Сходная задача уже решается при совместной ми-нимизации функций системы при выделении об-щих термов для минимальных форм булевых функ-ций системы, когда некоторые кубы покрытия сис-темы являлись общими для нескольких функций, однако, совместная минимизация не исключает применения дальнейшей факторизации.

Особенно актуальной задача факторизации становится при раздельной минимизации функций системы. Совместная факторизация функций системы не исключает раздельной факторизации в рамках каждой функции.

Пример. Выполним факторизацию системы булевых функций:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_3 x_4 & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{y_1} = 8 \\ y_2 = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{y_2} = 8 \end{cases} \Bigg| \; \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{\Sigma} = 16$$

Введем общий терм *z*:

$$\left\{\begin{array}{ll} z = \bar{x}_3 x_4 & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{z} = 2 \\ y_1 = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 z & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{y_1} = 7 \\ y_2 = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_5 z & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{y_2} = 7 \end{array}\right| \; \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{\Sigma} = 16$$

Эффект факторизации системы булевых функций – нулевой. Проведем раздельную факторизацию:

$$\left\{\begin{array}{ll} z = \bar{x}_3 x_4 & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{z} = 2 \\ y_1 = x_1 (x_2 x_3 \vee z) & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{y_1} = 6 \\ y_2 = \bar{x}_5 (x_1 \bar{x}_2 \vee z) & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{y_2} = 6 \end{array}\right| \; \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{\Sigma} = 14$$

В результате раздельной факторизации цена схемы уменьшилась на два. Эффект возник в результате того, что в выражениях функций переменные выносились из всех термов и после вынесения появились однобуквенные термы. Заметим, что раздельная факторизация исходной системы эффекта бы не дала.

Пример. Для ранее рассмотренной системы функций $Y = (y_1, y_2, y_3)$ проведем факторизацию функции *y3*

$$S_Q^{\Sigma} = 19 \begin{cases} z_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_3 & S_Q^{z_1} = 2 \\ z_2 = x_1 x_2 & S_Q^{z_2} = 2 \\ y_1 = x_2 x_3 \vee z_2 & S_Q^{y_1} = 4 \\ y_2 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee z_2 & S_Q^{y_2} = 4 \\ y_3 = x_1 x_2 x_3 \vee z_1 & S_Q^{y_3} = 5 \\ y_4 = z_1 \vee x_1 & S_Q^{y_4} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_3 & S_Q^{z_1} = 2 \\ z_2 = x_1 x_2 & S_Q^{z_2} = 2 \\ y_1 = x_2 x_3 \vee z_2 & S_Q^{y_1} = 4 \\ y_2 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee z_2 & S_Q^{y_2} = 4 \\ y_3 = z_2 x_3 \vee z_1 & S_Q^{y_3} = 4 \\ y_4 = z_1 \vee x_1 & S_Q^{y_4} = 2 \end{cases} \quad S_Q^{\Sigma} = 18$$

Замечание. Порядок проведения двух видов факторизации совместной и раздельной в большинстве случаев безразличен.

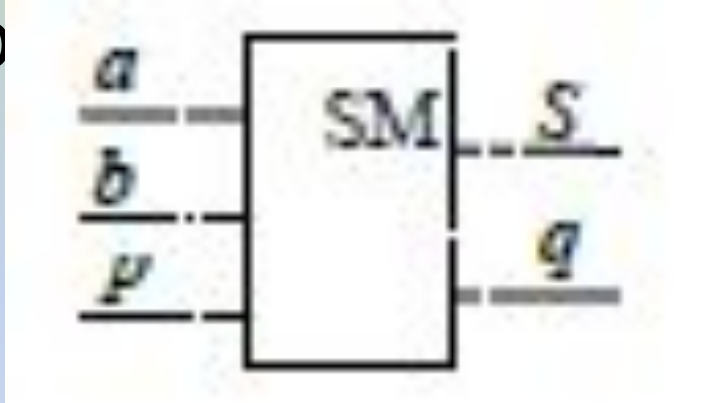
Декомпозиция системы булевых функций

Декомпозиция системы булевых функций – представляет собой выражение одних функций через другие. В некоторых случаях декомпозиция позволяет уменьшить цену комбинационной схемы дополнительно к решению задач минимизации и факторизации.

Пример. Синтезировать комбинационную схему одноразрядного сумматора с однофазными входами.

Одноразрядный комбинационный сумматор выполняет функцию сложения одноименных двоичных разрядов многоразрядных слагаемых.

Условно-графическое изобр
одноразрядного сумматора



Входными переменными сумматора являются:
a, b – слагаемые и *p* – перенос из предыдущего разряда.

Выходными переменными являются:
S – сумма и *q* – перенос в следующий разряд.

Закон функционирования одноразрядного сумма-тора представляется в виде следующей системы булевых функций:

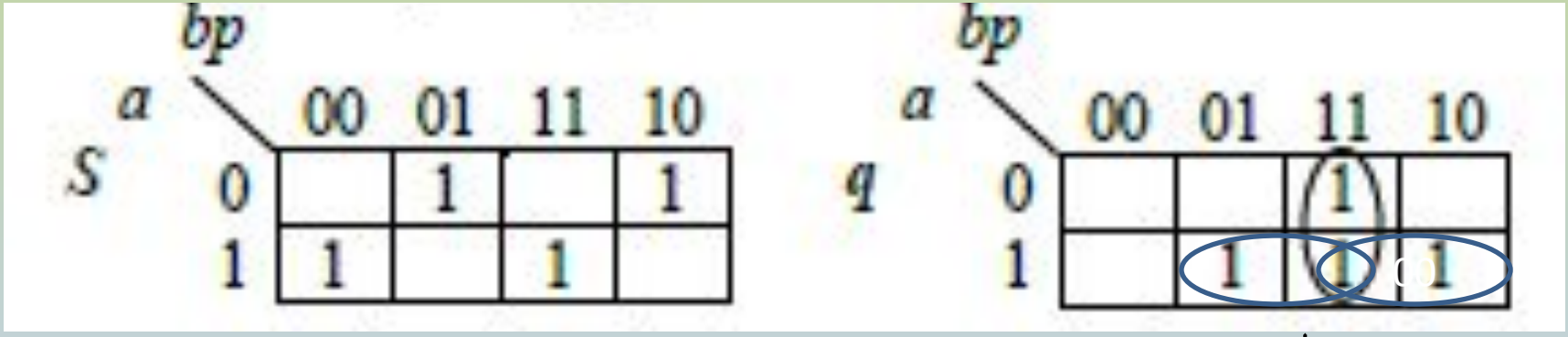
$$\begin{cases} S = S(a,b,p) \\ q = q(a,b,p) \end{cases}$$

В соответствии с принципами двоичного сложения составим таблицу истинности синтезируемой схемы.

Решим задачи минимизации и факторизации применительно

a	*b*	*p*	*S*	*q*
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Раздельная минимизация



$$\begin{cases} S = \bar{a}\bar{b}p \vee \bar{a}b\bar{p} \vee a\bar{b}\bar{p} \vee abp & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{S} = 16 \\ q = bp \vee ap \vee ab & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{q} = 9 \end{cases} \Bigg| \quad \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{\Sigma} = 25$$

Раздельная факторизация

Решим задачу факторизации применительно к функциям системы, вынося общие термы (в данном примере они однобуквенные) за скобки:

$$\left\{\begin{array}{ll} S = p(\bar{a}\bar{b} \vee ab) \vee \bar{p}(\bar{a}b \vee a\bar{b}) & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{S} = 18 \\ q = p(a \vee b) \vee ab & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{q} = 8 \end{array}\right| \; \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{\Sigma} = 26$$

За счет раздельной факторизации цена схемы, реализующей функцию переноса – *q*, уменьшилась на единицу, а цена схемы, реализующей функцию суммы – *S*, увеличилась на два, так что для системы функций {*S, q*} факторизация оказалась невыгодна.

Тем не менее, факторизованная функция *S* позволяет применить к ней декомпозицию, так как выражения в скобках взаимно инверсны.

Обозначим первую скобку в скобочной форме функции *S* вспомогательной переменной *z*. С учетом того, что вторая скобка представляет собой инверсию переменной *z*, выражение для системы функций {*S*, *q*} примет вид:

$$\left\{\begin{array}{ll} z = \bar{a}\bar{b} \vee ab, \quad (\bar{z} = \bar{a}b \vee a\bar{b}) & S_Q^{z_1, z_2} = 7 \\ S = pz \vee \bar{p}\bar{z} & \mathrm{S}_\mathrm{Q}^S = 6 \\ q = p(a \vee b) \vee ab & \mathrm{S}_\mathrm{Q}^q = 8 \end{array}\right| \; \mathrm{S}_\mathrm{Q}^\Sigma = 21$$

По сравнению с результатом раздельной факторизации функций системы {*S*, *q*} последняя декомпозиция функции *S* позволила существенно уменьшить цену схемы.

Нетрудно заметить, что в полученной системе функций имеются:

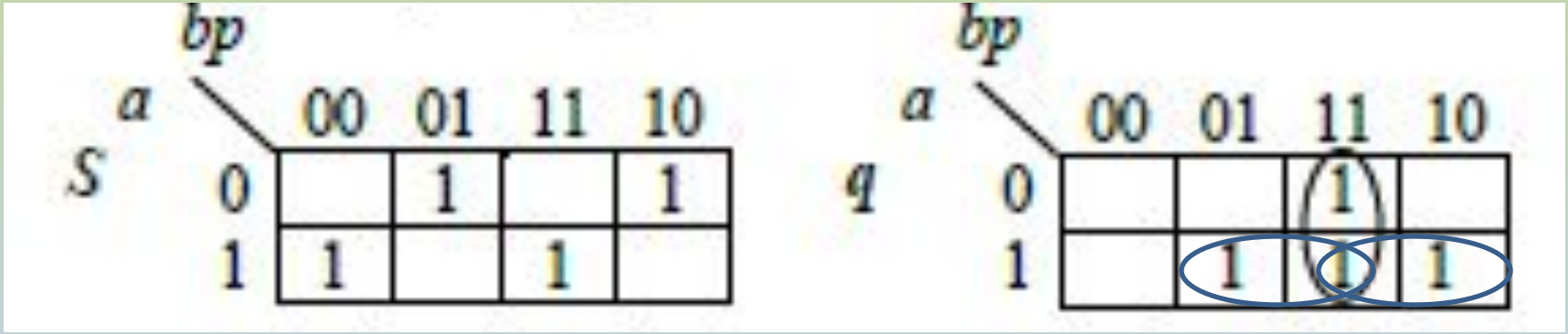
- во-первых, общий член ab для вспомогательной функции z и функции переноса – q;
- во-вторых, во вспомогательной функции z имеется конъюнктивный терм $a \vee b$, содержащийся также в функции q.

С учетом этого введем еще две вспомогательные функции: $z_1 = ab$ и $z_2 = \bar{a}\bar{b}$, переобозначив переменную z на $z3$.

В результате система функций приводится к следующему виду:

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
z_1 = ab & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{z_1} = 2 \\
z_2 = \bar{a}\bar{b} \quad \bar{z}_2 = a \vee b & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{z_2 \bar{z}_2} = 3 \\
z_3 = z_1 \vee z_2 \quad \bar{z}_3 = \bar{z}_1 \bar{z}_2 & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{z_3 \bar{z}_3} = 3 \\
S = pz_3 \vee \bar{p}\bar{z}_3 & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{S} = 6 \\
q = p\bar{z}_2 \vee z_1 & \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{q} = 4
\end{array}
\right\} \mathrm{S}_{\mathrm{Q}}^{\Sigma} = 18
$$

Декомпозиция системы булевых функций



Из таблицы истинности и карт Карно видно, что функции S и q принимают различные значения на всех наборах аргументов, кроме двух (000) и (111). Причем, на нулевом наборе они равны нулю, а на единичном наборе – единице.

Таким образом, для шести наборов аргументов справедливо:

$$S = \overline{q},$$

то есть можно выразить более сложную по схемной реализации функцию S через более простую по реализации функцию q.

Для того, чтобы учесть равенство нулю значений функций на нулевом наборе аргументов, необходимо сделать конъюнктивное дополнение функции S конституентой нуля для нулевого набора:

$$S = q(a \vee b \vee p)$$

За счет такого дополнения на нулевом наборе аргументов конституена нуля $a \vee b \vee p$ принимает значение, равное нулю, и значение функции S также будет равно нулю.

Для остальных наборов аргументов конституена $a \vee b \vee p$ будет равна единице и, $S = 1$, следовательно,

что справедливо для всех оставшихся наборов аргументов, кроме (111).

Для исправления значения функции *S* на единичном наборе необходимо в полученном выражении сделать дизъюнктивное дополнение функции конституентой единицы *abp* для единичного набора.

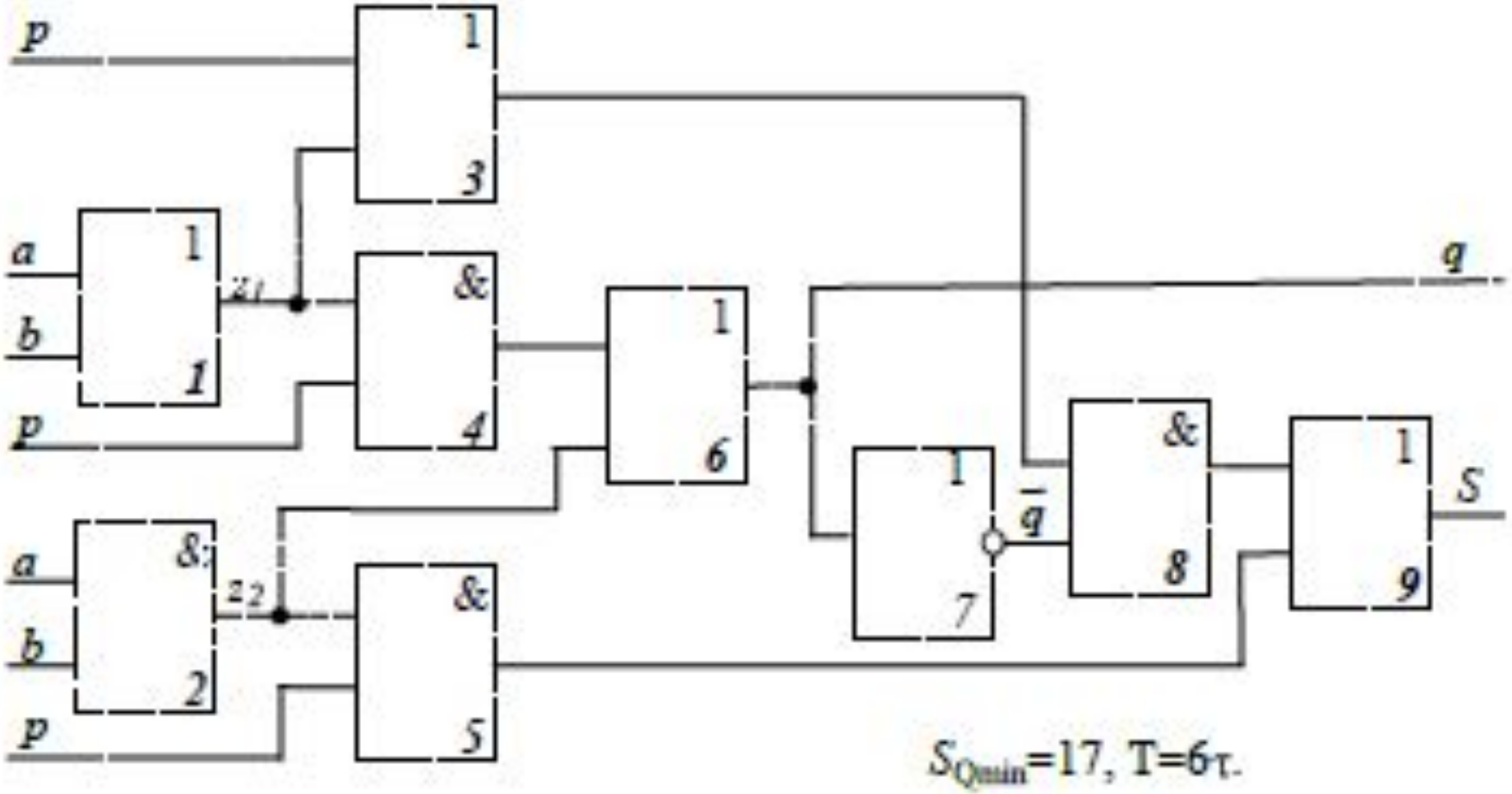
Таким образом применение декомпозиции позволяет представить систему функций (*S, q*) в следующем виде:

$$\left.\begin{cases} q = p(a \vee b) \vee ab & S_Q^q = 8 \\ S = \overline{q}(a \vee b \vee p) \vee abp & S_Q^S = 11 \end{cases}\right| \; S_Q^\Sigma = 19$$

Выполним совместную факторизацию функций системы:

$$\left.\begin{cases} z_1 = a \vee b & S_Q^{z_1} = 2 \\ z_2 = ab & S_Q^{z_2} = 2 \\ q = pz_1 \vee z_2 & S_Q^q = 4 \\ S = \overline{q}(z_1 \vee p) \vee z_2 p & S_Q^S = 9 \end{cases}\right| \; S_Q^\Sigma = 17$$

Построим схему одноразрядного сумматора на элементах булева базиса с однофазными входами



Сформулируем общие принципы декомпозиции применительно к двум функциям y_1 и y_2, входящим в некоторую систему функций.

1. Применение декомпозиции, которая сводится к выражению одной функции через другую, может оказаться целесообразным только в том случае, если функции y_1 и y_2 оказываются либо очень похожими (принимают одинаковые значения почти на всех наборах аргументов), либо практически противоположными (принимают одинаковые значения на небольшом множестве наборов аргументов).

2. За исходную функцию из двух следует выбирать ту, которая обладает меньшей ценой схемной реализации (в дальнейшем будем считать, что такой функцией является y_2).

3. Для похожих функций исходным является равенство $y_1 = y_2$, а для почти противоположных – равенство $y_1 = \overline{y_2}$

4. Для исправления исходного равенства на значение $y_1 = 0$ для наборов аргументов X_0 производится конъюнктивное дополнение правой части исходного равенства конституентами нуля для этих наборов.

5. Для исправления исходного равенства на значе-ние $y_1 = 1$ для наборов аргументов X_1 производится дизъюнктивное дополнение правой части исход-ного равенства конституентами единицы для этих наборов.

Пример. Функции y_1 и y_2 от четырех переменных принимают одинаковые значения на всех наборах аргументов, кроме (0011), (0101) и (1110), причем функция y_1 на первом из них равна единице, на двух других равна нулю. Выразить функцию y_1 через y_2 и функцию y_2 через y_1.

1. Дополним правую часть исходного равенства $y_1 = y_2$ конституентами нуля для наборов (0101) и (1110) и конституентой единицы для набора (0011). Получим:

$$y_1 = y_2(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4.$$

2. Дополним правую часть исходного равенства $y_2 = y_1$ конституентами нуля для набора (0011) и конституентами единицы для наборов (0101) и (1110). Получим:

$$y_2 = y_1(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_2x_3\bar{x}_4.$$