Тема
Булевы функции и алгебра логики

Логика

Логика – это наука о формах и законах человеческой мысли, о законах доказательных рассуждений, изучающая методы доказательств и опровержений, т.е. методы установления истинности или ложности одних высказываний (утверждений) на основе истинности или ложности других высказываний.

Алгебра логики

- Алгебра логики — это математический аппарат, с помощью которого записывают, вычисляют, упрощают и преобразовывают логические высказывания.

Создателем алгебры логики является живший в XIX веке английский математик Джордж Буль, в честь которого эта алгебра названа булевой алгеброй высказываний.

Булевы переменные и функции

Переменные, которые могут принимать значения только из множества ***B={0,1}***, называются ***логическими*** или ***булевыми переменными***. Сами значения 0 и 1 булевых переменных называются ***булевыми константами***.

Булевы переменные и функции

Функция вида $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$, аргументы и значения которой заданы на множестве ***B***, называется ***n-местной булевой функцией***. Такие функции также называют ***логическими*** или ***переключательными функциями***.

Основные определения

Кортеж $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ конкретных значений булевых переменных называется ***двоичным словом*** (***n-словом***) или ***булевым набором длины n***.

Для булевой функции $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ конкретное (индивидуальное) ***значение булевого набора*** $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ называется также ***интерпретацией булевой функции*** f.

Множество всех двоичных слов, обозначаемое через B^n, образует область определения булевой функций и называется ***n-мерным булевым кубом*** и содержит 2^n элементов-слов: $|B^n|=2^n$.

Каждому двоичному слову соответствует одно из двух возможных значений (0 или 1), таким образом, область значений представляет собой кортеж длиной 2^n, состоящий из 1 и 0.

Способы задания булевых функций

I. Таблицы истинности

Таблицы, в которых каждой интерпретации функции поставлено в соответствие ее значение, называются ***таблицами истинности булевой функции***.

В таблице истинности каждой переменной и значению самой функции соответствует по одному столбцу, а каждой интерпретации — по одной строке. Количество строк в таблице соответствует количеству различных интерпретаций функции.

Булевы функции одной переменной

x	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

1. $\phi_0 \equiv 0$ — функция константа 0,
2. $\phi_1 = x$ — функция повторения аргумента,
3. $\phi_2 = \bar{x}$ — функция инверсии или отрицания аргумента,
4. $\phi_3 \equiv 1$ — функция константа 1.

Таблица истинности

- Для формулы, которая содержит две переменные, таких наборов значений переменных всего четыре: (0,0), (0,1), (1,0), (1,1).
- Если формула содержит три переменные, то возможных наборов значений переменных восемь:
- (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1),
- (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1).
- Количество наборов для формулы с четырьмя переменными равно шестнадцати и т.д.

Булевы функции двух переменных

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Булевы функции двух переменных

Функ-ция	Обоз-начение	Название	Другие обоз-я	Прочтение
$f_0(x,y)$	0	константа 0		константа 0
$f_1(x,y)$	$x \wedge y$	конъюнкция (логическое «и»)	·, &, &&, *, *И*, ×, *AND*, *min*	x и y
$f_2(x,y)$	$\overline{x \rightarrow y}$	отрицание импликации	>	x и не y
$f_3(x,y)$	x	повторение первого аргумента		как x
$f_4(x,y)$	$\overline{x \leftarrow y}$	отрицание обратной импликации	<	не x и y
$f_5(x,y)$	Y	повторение второго аргумента		как y
$f_6(x,y)$	$x \oplus y$	исключающее «или» (сумма по модулю 2)	≠, < >, > <, *!=*, *XOR*	x не как y
$f_7(x,y)$	$x \vee y$	дизъюнкция (логическое «или»)	*OR*, *ИЛИ*, +, *max*	x или y

Булевы функции двух переменных

Функция	Обозначение	Название	Другие обоз-я	Прочтение
$f_8(x,y)$	$x\downarrow y$	отрицание дизъюнкции (стрелка Пирса)	$\overline{x \vee y}$	не x и не y
$f_9(x,y)$	$x\sim y$	эквивалентность	$\Leftrightarrow$, $\equiv$, Eqv, $=$	x как y
$f_{10}(x,y)$	$\overline{y}$	отрицание второго аргумента	$\neg y$	не y
$f_{11}(x,y)$	$x\leftarrow y$	обратная импликация	$\subset$	x, если y (x или не y)
$f_{12}(x,y)$	$\overline{x}$	отрицание первого аргумента	$\neg x$	не x
$f_{13}(x,y)$	$x\rightarrow y$	импликация	$\supset$, $\Rightarrow$, Imp	если x, то y (не x или y)
$f_{14}(x,y)$	$x \mid y$	отрицание конъюнкции (штрих Шеффера)	$\overline{x \wedge y}$	не x или не y
$f_{15}(x,y)$	1	константа 1		константа 1

Построение таблицы истинности

1. Подсчитать количество переменных в формуле n.
2. Определить количество строк в таблице – 2^n.
3. Подсчитать количество операций в формуле и определить количество столбцов m + n.
4. Записать названия столбцов с учетом последовательности выполнения операций.
5. Заполнить столбцы переменных наборами от 00...0 до 11...1 в лексикографическом порядке, используя метод «последовательного деления столбцов пополам»
6. Заполнить таблицу по столбцам.

Примеры

$$x \wedge \bar{y} \to (x \vee y) \wedge \bar{z}$$

n=3

m= 6

x	y	z	$x \vee y$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$x \wedge \bar{y}$	$(x \vee y) \wedge \bar{z}$	F
0	0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0	1

Выполнимая формула

$$\overline{x \vee \overline{y}} \vee \overline{x} \cdot z$$

Переменные			Промежуточные логические формулы					Формула
x	y	z	$\overline{y}$	$x \vee \overline{y}$	$\overline{x \vee \overline{y}}$	$\overline{x}$	$\overline{x} \cdot z$	$\overline{x \vee \overline{y}} \vee \overline{x} \cdot z$
0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0	0

Формула в некоторых случаях принимает значение 1, а в некоторых — 0, то есть является выполнимой.

II. Задание булевых функций с помощью формул

Формула – это выражение, задающее некоторую функцию в виде суперпозиции других функций.

Суперпозицией называется прием получения новых функций путем подстановки значений одних функций вместо значений аргументов других функций.

Пример

Рассмотрим формулу булевой алгебры, задающую некоторую функцию $f(x,y,z)$

$$f(x,y,z) = (x \wedge \overline{y}) \vee z$$

Эта формула содержит функции:

$g(x_1)$ – отрицание,

$s(x_1,x_2)$ – конъюнкция,

$l(x_1,x_2)$ – дизъюнкция.

Представим данную формулу в виде суперпозиции указанных функций следующим образом:

$$f(x,y,z) = l(s(x,g(y)),z)$$

Приоритет выполнения операций

Если в формуле отсутствуют скобки, то операции выполняются в следующей последовательности:

1. Отрицание.
2. Конъюнкция.
3. Дизъюнкция.
4. Импликация.
5. Эквивалентность

$\overline{}$
$\wedge$
$\vee$
$\rightarrow$
$\sim$

Пример

Убрать все возможные скобки

$$((x \wedge y) \wedge \bar{z}) \vee \overline{(x \vee y)} = x \wedge y \wedge \bar{z} \vee \overline{x \vee y}$$

Расставить скобки с учетом приоритета операций

$$((x \wedge y) \rightarrow (y \vee z)) \rightarrow (x \rightarrow y)$$

Эквивалентные формулы

Формулы, представляющие одну и ту же функцию, называются ***эквивалентными или равносильными.***