

Тематический модуль 1: «ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ»

Тема 2:

Распределения молекул.

Распределения молекул.

1. Распределение Максвелла. Средняя, средняя квадратичная и наиболее вероятная скорости молекул.
2. Распределение молекул в поле внешних сил (распределение Больцмана). Барометрическая формула.
3. Распределение Максвелла-Больцмана.
4. Средняя длина свободного пробега молекулы.

1. Распределение Максвелла. Средняя, средняя квадратичная и наиболее вероятная скорости молекул.

Согласно молекулярно-кинетической теории, как бы ни изменялись скорости молекул при столкновениях, средняя квадратичная скорость молекул массой m_0 в газе, находящемся в состоянии равновесия при $T = \text{const}$, остается постоянной и равной:

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$$

Это означает, что в газе, находящемся в состоянии равновесия, устанавливается некоторое стационарное, не меняющееся со временем распределение молекул по скоростям, которое подчиняется вполне определенному статистическому закону.

Исходные положения Максвелла при выводе распределения:

- Газ состоит из большого числа N одинаковых молекул.
- Температура газа постоянна.
- Молекулы газа совершают тепловое хаотическое движение.
- Из-за хаотического движения молекул все направления движения равновероятны, т. е. в любом направлении в среднем движется одинаковое число молекул.
- На газ не действуют силовые поля.

Если разбить диапазон скоростей молекул на малые интервалы dv , то на каждый интервал скорости будет приходиться некоторое число молекул, имеющих скорость, заключенную в этом интервале. Функция $f(v)$ определяет относительное число молекул скорости которых лежат в интервале от v до $v+dv$, т. е.:

$$\frac{dN(v)}{N} = f(v) dv$$

$$f(v) = \frac{dN(v)}{N dv}$$

$f(v) dv$ — вероятность того, что скорости молекулы заключены в интервале от v до $v+dv$.

Условие нормировки для функции $f(v)$:

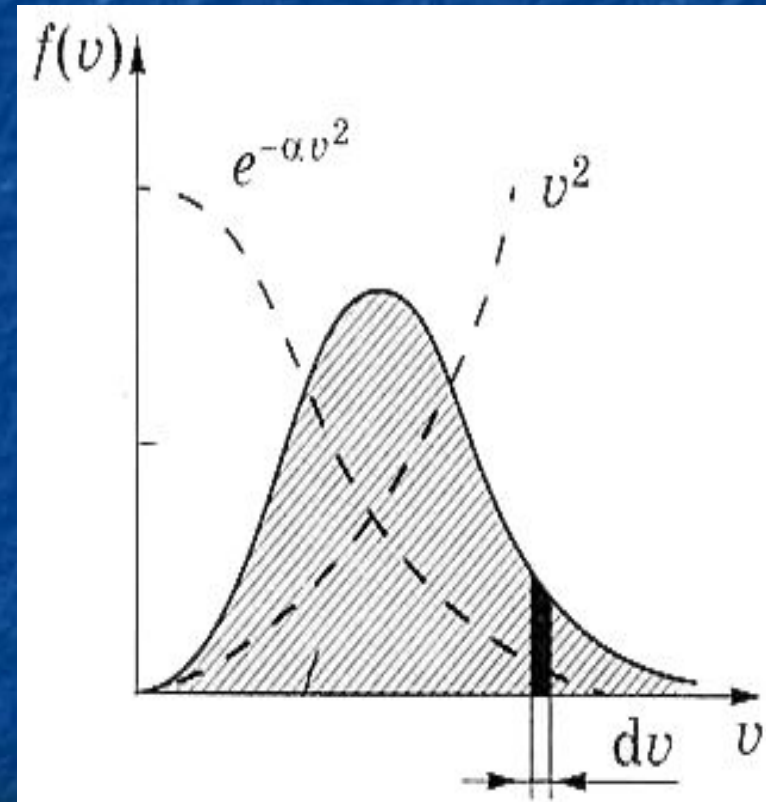
$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1$$

Функция распределения:

$$f(v) = Av^2 e^{-m_0 v^2 / (2kT)}$$

особенности зависимости $f(v)$ от v :

- В показателе экспоненциальной функции имеем взятое с минусом отношение кинетической энергии молекулы к kT (средняя энергия молекулы).
- График функции $f(v)$, начинаясь в нуле, достигает максимума, а затем асимптотически стремится к нулю; она несимметрична относительно v .
- Относительное число молекул dNv/N , скорости которых лежат в интервале от v до $v+dv$, находится как площадь закрашенной полоски.



Из условия нормировки:

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1$$

находим:

$$A = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2}$$

Закон Максвелла о распределении молекул по скоростям:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-m_0 v^2 / (2kT)}$$

Наиболее вероятная скорость - скорость, при которой функция распределения молекул идеального газа по скоростям максимальна.

Продифференцируем $f(v)$ по v , результат приравняем 0:

$$\frac{d}{dv} \left(v^2 e^{-m_0 v^2 / (2kT)} \right) = 2v \left(1 - \frac{m_0 v^2}{2kT} \right) e^{-m_0 v^2 / (2kT)} = 0$$

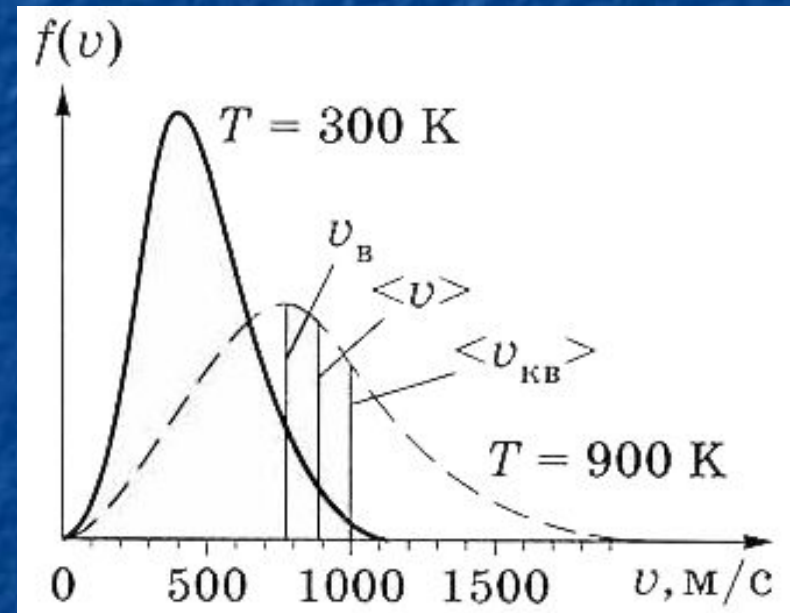
Это равенство выполняется при значении скорости:

$$v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

Зависимость распределения Максвелла от температуры:

С повышением температуры максимум функции $f(v)$ смещается вправо (значение наиболее вероятной скорости становится больше).

Площадь, ограниченная кривой, остается неизменной, поэтому с повышением температуры кривая $f(v)$ растягивается и понижается.



$$v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

Средняя скорость:

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv$$

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^3 e^{-m_0 v^2 / (2kT)} dv$$

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} a^{-2}$$

$$\langle v \rangle = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{-2} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

Средняя квадратичная скорость молекулы:

$$\langle v_{\text{KB}} \rangle = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$$

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv$$

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^4 e^{-m_0 v^2 / (2kT)} dv$$

$$\int_0^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8} \sqrt{\pi} a^{-5/2}$$

$$\langle v^2 \rangle = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \frac{3}{8} \sqrt{\pi} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{-5/2} = \frac{3kT}{m_0}$$

$$\langle v_{\text{KB}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

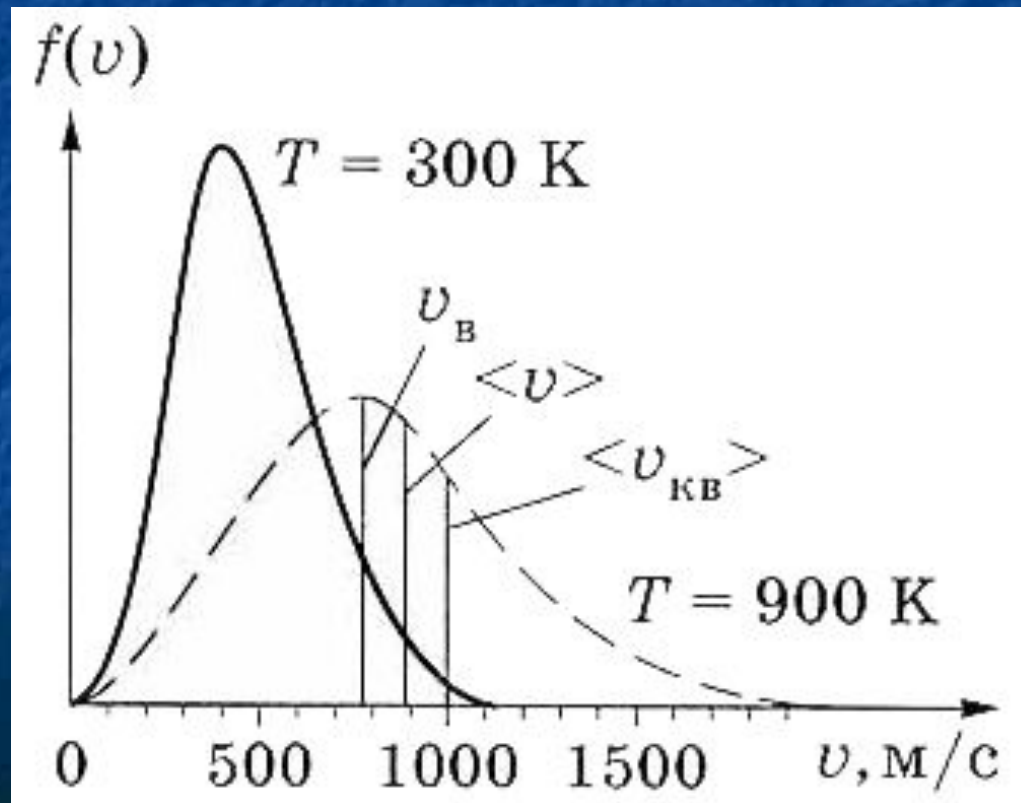
Скорости, характеризующие состояние газа:

- наиболее вероятная
- средняя
- средняя квадратичная

$$v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = 1,13v_B$$

$$\langle v_{KB} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 1,22v_B$$



Функция распределения молекул по энергиям теплового движения:

$$f(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{N d\varepsilon}$$

Вероятность того, что энергии молекул заключены в интервале от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$:

$$f(\varepsilon) d\varepsilon$$

Закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по энергиям теплового движения:

$$dN(v) = N \cdot 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-m_0 v^2 / (2kT)} dv$$

Число молекул, имеющих кинетическую энергию поступательного движения, заключенную в интервале от ε до $d\varepsilon$:

$$dN(\varepsilon) = \frac{2N}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/(kT)} d\varepsilon = Nf(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{m_0 v^2}{2}$$

Функция распределения молекул по энергиям теплового движения:

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/(kT)}$$

Средняя кинетическая энергия молекулы идеального газа:

$$\varepsilon_{\text{в}} = \frac{1}{2} kT$$

Наиболее вероятное значение энергии молекул идеального газа:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} kT$$

2. Распределение молекул в поле внешних сил (распределение Больцмана). Барометрическая формула.

Барометрическая формула - зависимость атмосферного давления p от высоты h .

Исходные положения при выводе формулы:

- Поле тяготения однородно.
- Температура постоянна.
- Масса всех молекул одинакова.
- Ускорение свободного падения постоянно

Если атмосферное давление на высоте h равно p , то на высоте $h+dh$ оно равно $p+dp$

Разность давлений p и $p+dp$ равна весу газа, заключенного в объеме цилиндра высотой dh , площадь основания которого равна единице площади:

$$p - (p + dp) = \rho g dh$$

$$dp = -\rho g dh$$

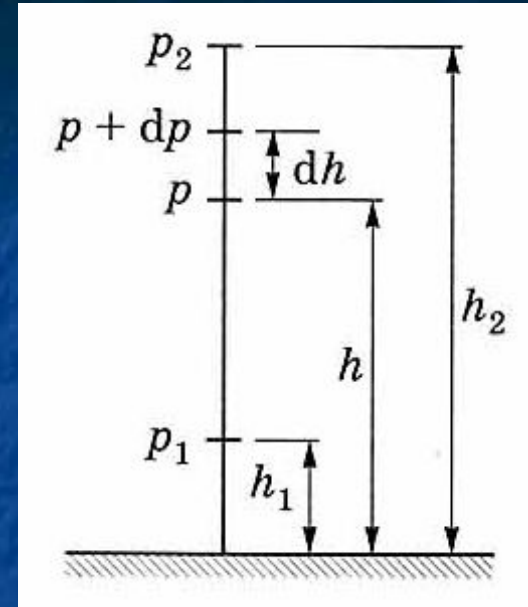
$$\rho = \frac{m}{V}, \quad pV = \frac{m}{M} RT$$

$$dp = -\frac{Mg}{RT} p dh$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dh$$

С изменением высоты от h_1 до h_2 давление изменяется от p_1 до p_2 :

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} \int_{h_1}^{h_2} dh$$



Барометрическая формула:

$$p_2 = p_1 e^{-Mg(h_2 - h_1)/(RT)}$$

$$p = p_0 e^{-Mgh/(RT)}$$

Распределение Больцмана:

$$n = n_0 e^{-m_0gh/(kT)} = n_0 e^{-\Pi/(kT)}$$

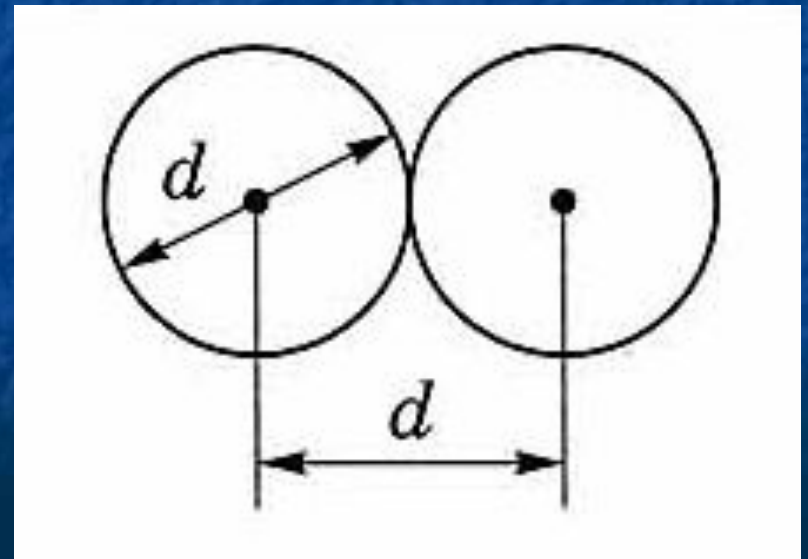
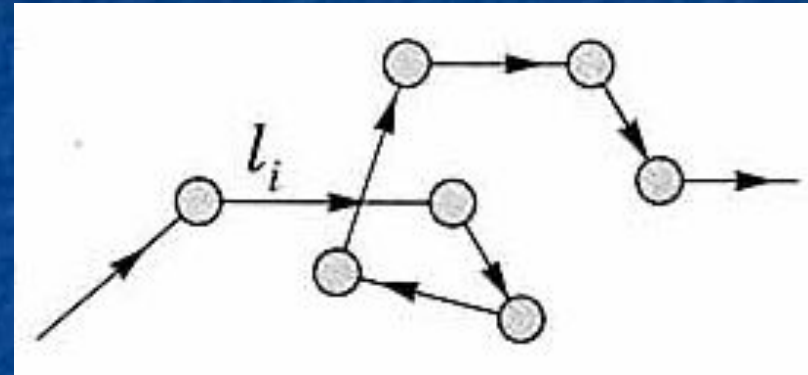
При постоянной температуре плотность газа больше там, где меньше потенциальная энергия его молекул. Если частицы имеют одинаковую массу и находятся в состоянии хаотического теплового движения, то распределение Больцмана справедливо в любом внешнем потенциальном поле, а не только в поле сил тяжести.

4. Средняя длина свободного пробега молекулы.

Длина свободного пробега - путь, проходимый молекулой между двумя последовательными столкновениями.

$$\langle l \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N l_i$$

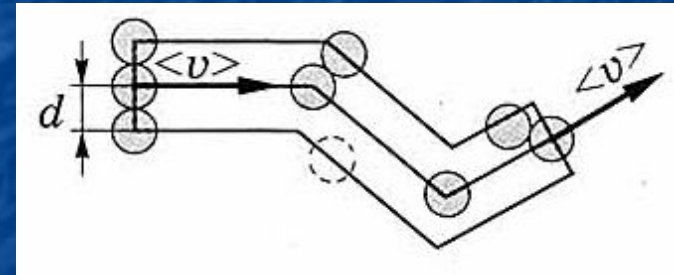
Эффективный диаметр молекулы d - минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул.



Среднее число столкновений молекулы за 1 с:

$$\langle z \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle l \rangle}$$

Модель: молекула в виде шарика диаметром d движется среди «застывших» молекул. Среднее число столкновений $\langle z \rangle$ равно числу молекул в объеме «ломаного» цилиндра:



$$\langle z \rangle = nV; V = \pi d^2 \langle v \rangle; \langle z \rangle = n\pi d^2 \langle v \rangle$$

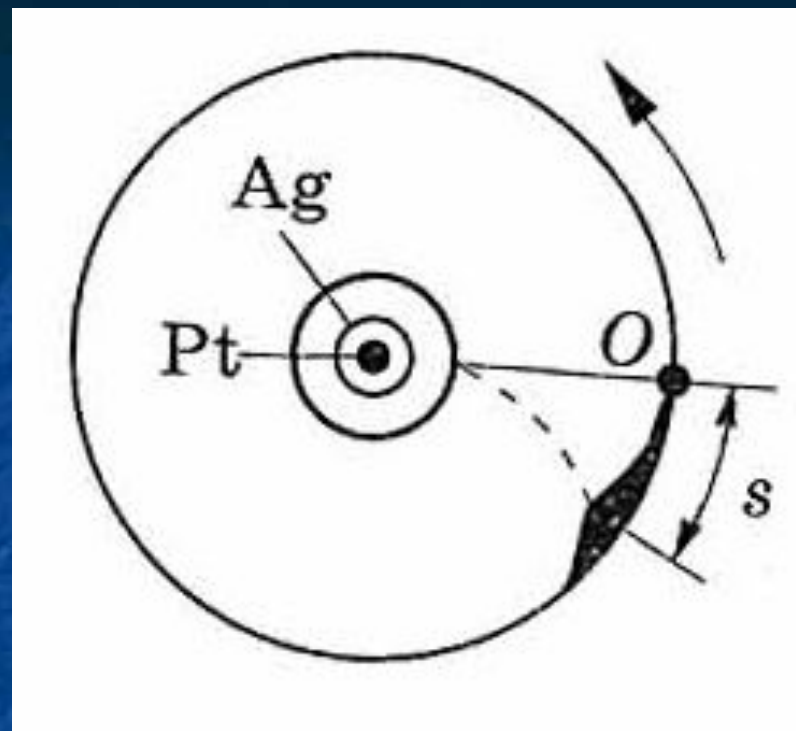
при учете движения других молекул:

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle v \rangle$$

$$\frac{\langle l_1 \rangle}{\langle l_2 \rangle} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{p_2}{p_1}$$

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$$

Опыт Штерна:



Опыт Ламмерта:

