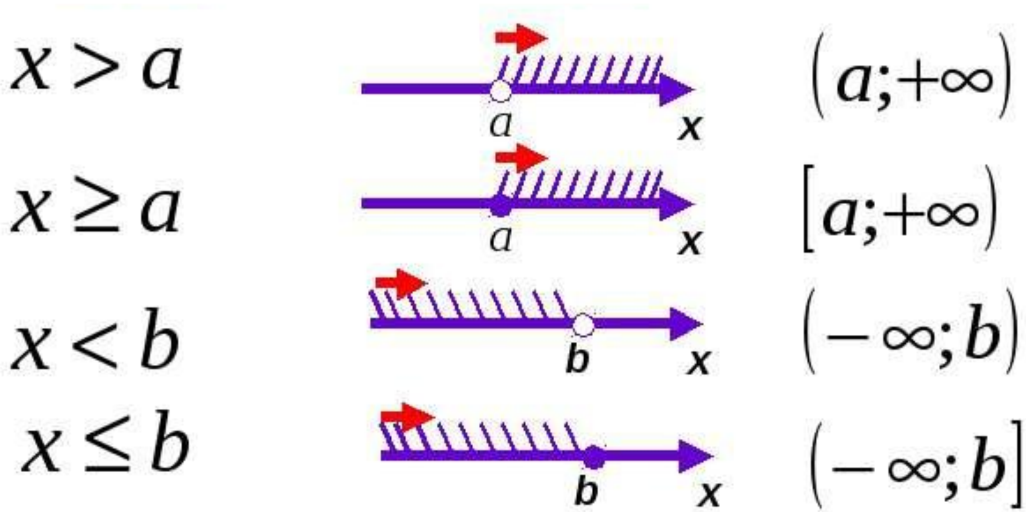
РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ВИДОВ НЕРАВЕНСТВ

ВИДЫ УРАВНЕНИЯ

- Линейные;
- Квадратные (метод параболы);
- Неравенства вида a*b или a/b (метод интервалов).

ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА НЕРАВЕНСТВ



ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

- Линейное неравенство решается как обычное уравнение (известные вправо, неизвестные влево), при этом знак на = не меняется!
- **<u>Но!!! </u>**Если мы разделим обе части на отрицательное число знак смениться на противоположный (> на <; < на >).

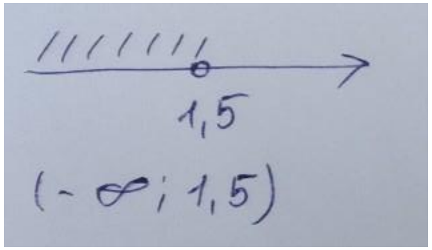
$5x+4 < 3x + 7$

$5x - 3x < 7 - 4$

$2x < 3 \quad | :2$

$x < 1{,}5$

<u>Т.к. мы разделили обе части на 2>0. то знак < не изменился!!!</u>



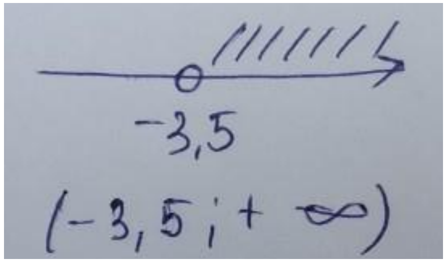
$3x-2 < 7x + 12$

$3x - 7x < 12 +2$

$-4x < 14 \quad : (-4)$

$x > -3.5$

<u>Т.к. мы разделили обе части на -4<0, то знак < изменился!!!</u>



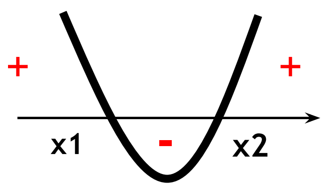
КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

$$\boxed{a}x^2 + bx + c > 0,$$

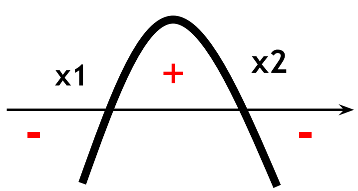
1) Приравнять к 0. Решить уравнение. Найти корни.
2) Отметить корни на оси (если корней нет, то все равно рисуем ось).
3) Нарисовать параболу (**смотрим на коэффициент а**) и расставить знаки (**если парабола выше оси, то +, если ниже, то -)!!!**
4) Если изначальный знак неравенства > 0, значит выбираем знаки «+», если изначальный знак <0, то выбираем знак «-».

D>0 (2 корня)

a>0

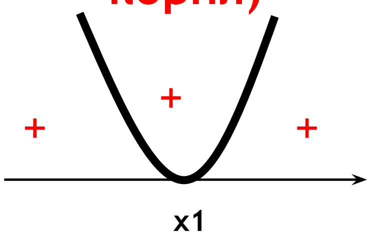


a<0

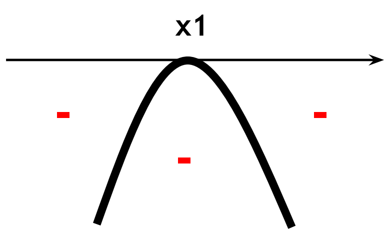


D=0 (2 одинаковых корня)

a>0

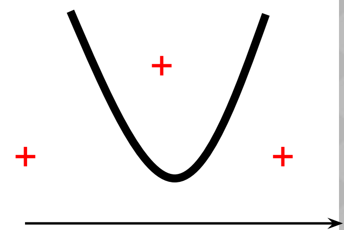


a<0

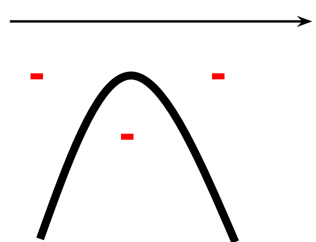


D<0 (нет корней)

a>0



a<0

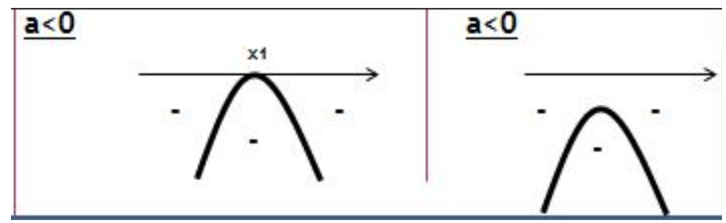


ОСОБЕННЫЙ СЛУЧАЙ!!!

- Если в изначальном неравенстве стоит знак >0, т. е. вам нужны «+», а парабола направлена вниз и стоят только одни «-», то в данном случае ответом будет «РЕШЕНИЙ НЕТ».

$$ax^2+bx+c>0$$

(+)



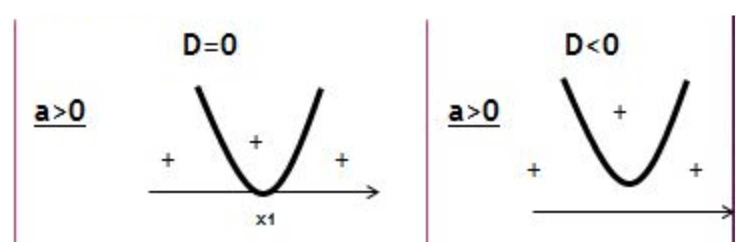
Ответ: решений нет

- Если в изначальном неравенстве стоит знак <0, т. е. вам нужны «-», а парабола направлена вверх и стоят только одни «0», то в данном случае ответом будет «ЛЮБОЕ ЧИСЛО» или (-∞;+∞)

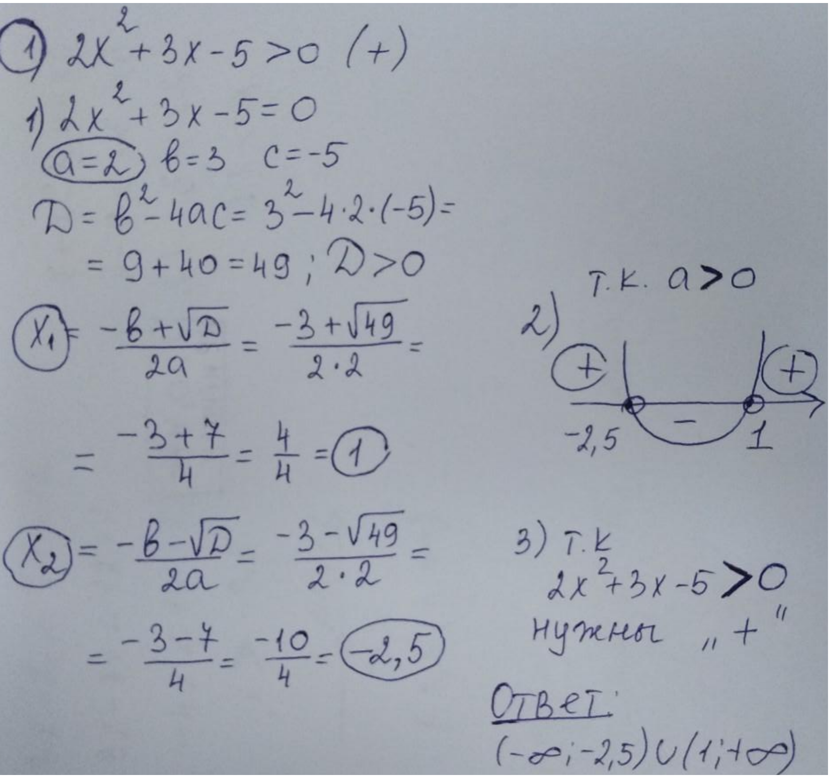
$$ax^2+bx+c>0$$

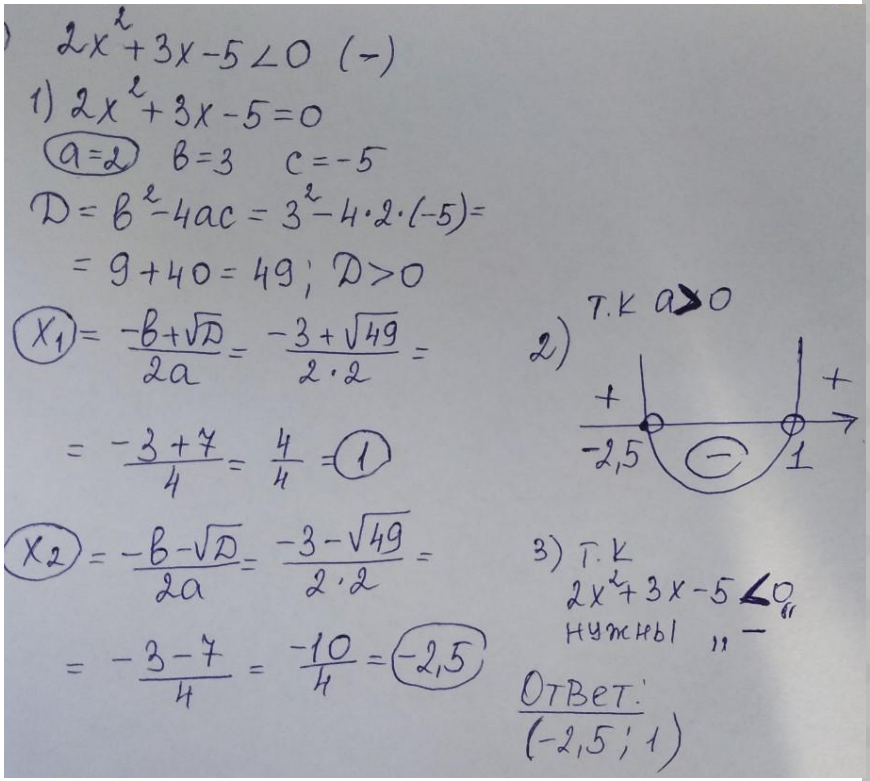
(+)

Ответ: (-∞;+∞)



Пример «Парабола лежит вверх и Д >0»





Обратите внимание, что точки «выколотые»и в ответе точки в круглых скобках,т.к. изначальный знак >;<.

ПРИМЕР «ПАРАБОЛА ЛЕЖИТ ВНИЗ И Д >0 »

② $-3x^2+5x-2 \geq 0$

1) $-3x^2+5x-2=0$

$a=-3$ $b=5$ $c=-2$

$D=b^2-4a\cdot c=5^2-4\cdot(-3)\cdot(-2)=$

$=25-24=1;\ D>0$

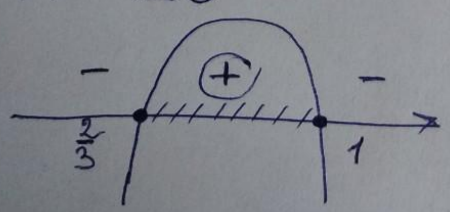
$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-5+\sqrt{1}}{2\cdot(-3)}=$

$=\frac{-5+1}{-6}=\frac{-4}{-6}=\frac{2}{3}$

$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-5-\sqrt{1}}{2\cdot(-3)}=$

$=\frac{-5-1}{-6}=\frac{-6}{-6}=1$

2) т.к $a<0$



3) т.к. $-3x^2+5x-2\geq 0\ (+)$

Ответ: $[\frac{2}{3};1]$

$-3x^2+5x-2\leq 0$

1) $-3x^2+5x-2=0$

$a=-3$ $b=5$ $c=-2$

$D=b^2-4ac=5^2-4\cdot(-3)\cdot(-2)=$

$=25-24=1;\ D>0$

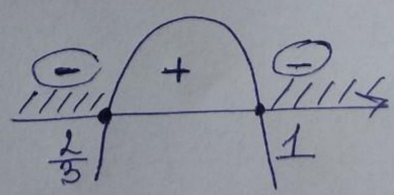
$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-5+\sqrt{1}}{2\cdot(-3)}=$

$=\frac{-5+1}{-6}=\frac{-4}{-6}=\frac{2}{3}$

$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-5-\sqrt{1}}{2\cdot(-3)}=$

$=\frac{-5-1}{-6}=\frac{-6}{-6}=1$

2) т.к. $a<0$



3) т.к. $-3x^2+5x-2\leq 0\ (-)$

Ответ: $(-\infty;\frac{2}{3}]\cup[1;+\infty)$

Обратите внимание, что точки «вколотые» и в ответе точки в квадратных скобках, т.к. изначальный знак ≥;≤.

ПРИМЕР «ПАРАБОЛА ЛЕЖИТ ВВЕРХ И Д = 0 »

3

$x^2+6x+9\geq 0$

1) $x^2+6x+9=0$

$a=1 \quad b=6 \quad c=9$

$D=b^2-4ac=6^2-4\cdot1\cdot9=$

$=36-36=0 \quad D=0$

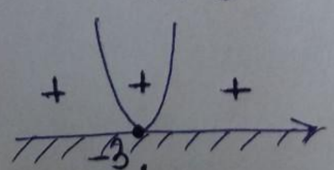
$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{-6+\sqrt{0}}{2\cdot1}=$

$=\dfrac{-6+0}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3$

$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{-6-\sqrt{0}}{2\cdot1}=$

$=\dfrac{-6-0}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3$

2) т.к. $a>0$



3) т.к. $x^2+6x+9\geq 0\ (+)$

Ответ: $(-\infty;+\infty)$

$x^2+6x+9\leq 0$

1) $x^2+6x+9=0$

$a=1 \quad b=6 \quad c=9$

$D=b^2-4ac=6^2-4\cdot1\cdot9=$

$=36-36=0 \quad D=0$

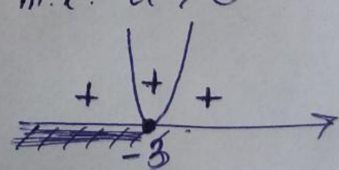
$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{-6+\sqrt{0}}{2\cdot1}=$

$=\dfrac{-6+0}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3$

$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{-6-\sqrt{0}}{2\cdot1}=$

$=\dfrac{-6-0}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3$

2) т.к. $a>0$



3) т.к. $x^2+6x+9\leq 0\ (-)$

минусов нет, но есть, где

$x^2+6x+9=0$

Ответ: $\{-3\}$

2019/1/26

Обратите внимание, что точки «вколотые» и в ответе точки в квадратных скобках, т.к. изначальный знак ≥;≤.

ПРИМЕР «ПАРАБОЛА ЛЕЖИТ ВНИЗ И Д = 0 »

4) $-x^2+6x-9>0$

1) $-x^2+6x-9=0$

$a=-1$ $b=6$ $c=-9$

$D=b^2-4ac=6^2-4\cdot(-1)\cdot(-9)=$

$=36-36=0;\ D=0$

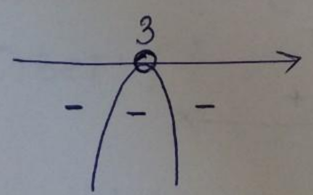
$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-6+\sqrt{0}}{2\cdot(-1)}=$

$=\frac{-6+0}{-2}=\frac{-6}{-2}=3$

$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-6-\sqrt{0}}{2\cdot(-1)}=$

$=\frac{-6+0}{-2}=\frac{-6}{-2}=3$

2) т.к. $a<0$



3) т.к. $-x^2+6x-9>0\ (+)$

плюсов нет, и нет точек, где $-x^2+6x-9=0$.

Ответ: решений нет

$-x^2+6x-9<0$

1) $-x^2+6x-9=0$

$a=-1$ $b=6$ $c=-9$

$D=b^2-4ac=6^2-4\cdot(-1)\cdot(-9)=$

$=36-36=0;\ D=0$

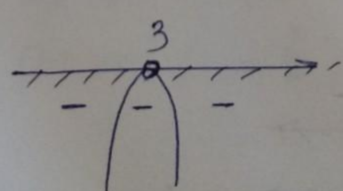
$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-6+\sqrt{0}}{2\cdot(-1)}=$

$=\frac{-6+0}{-2}=\frac{-6}{-2}=3$

$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-6-\sqrt{0}}{2\cdot(-1)}=$

$=\frac{-6-0}{-2}=\frac{-6}{-2}=3$

2) т.к. $a<0$



3) т.к. $-x^2+6x-9<0\ (-)$

минусы везде, но точка – 3 – выколотая, поэтому не входит в промежуток.

2019/1/26 15:

Ответ: $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$

Обратите внимание, что точки «выколотые»и в ответе точки в круглых скобках,т.к. изначальный знак >;<.

ПРИМЕР «ПАРАБОЛА ЛЕЖИТ ВВЕРХ И Д < 0 »

5) $2x^2 + 3x + 8 > 0$

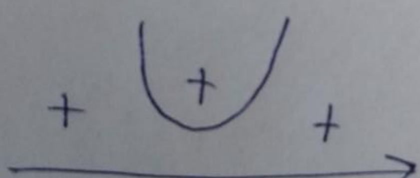
1) $2x^2+3x+8=0$

$a=2$ $b=3$ $c=8$

$D = b^2-4ac = 3^2-4\cdot2\cdot8 =$
$= 9-64=-55$; $D<0$

корней нет.
Значит нет точек пересечения с осью!

2) т.к. $a>0$



3) т.к. $2x^2+3x+8>0$ (+)
плюсы везде

Ответ: $(-\infty;+\infty)$

$2x^2+3x+8<0$

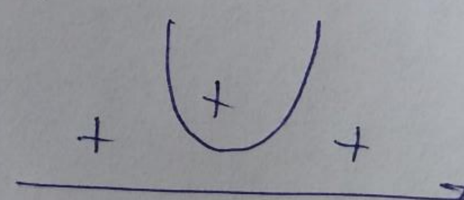
1) $2x^2+3x+8=0$

$a=2$ $b=3$ $c=8$

$D=b^2-4ac= 3^2-4\cdot2\cdot8=$
$=9-64=-55$; $D<0$

корней нет.
Значит нет точек пересечения с осью!

2) т.к. $a>0$



3) т.к. $2x^2+3x+8<0$ (−)
минусов нет.

Ответ: решений нет.

Обратите внимание, что точки «выколотые» и в ответе точки в круглых скобках,т.к. изначальный знак >;<.

Пример «парабола лежит вниз и Д < 0 »

6) $-2x^2+3x-8 \geq 0$

$-2x^2+3x-8=0$

$a=-2$ $b=3$ $c=-8$

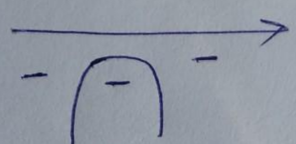
$D=b^2-4ac=3^2-4\cdot(-2)\cdot(-8)=$

$=9-64=-55$; $D<0$

корней нет.

Значит нет точек пересечения с осью.

2) т.к. $a<0$



3) т.к. $-2x^2+3x+8 \geq 0$ (+)

минусы везде.

плюсов нет.

Ответ: решений нет

$-2x^2+3x-8 \leq 0$

$-2x^2+3x-8=0$

$a=-2$ $b=3$ $c=-8$

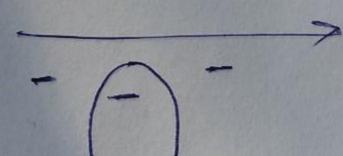
$D=b^2-4ac=3^2-4\cdot(-2)\cdot(-8)=$

$=9-64=-55$; $D<0$

корней нет

Значит нет точек пересечения с осью.

2) т.к. $a<0$



3) т.к. $-2x^2+3x-8 \leq 0$ (−)

везде минусы.

Ответ: $(-\infty;+\infty)$

Обратите внимание, что точки «вколотые»и в ответе точки в квадратных скобках, т.к. изначальный знак ≥;≤.

МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ

Метод интервалов применяется, когда перед нами неравенства вида:

1) a*b > 0
2) a*b < 0
3) a*b ≥ 0
4) a*b ≤ 0
5) $\frac{a}{b} > 0$
6) $\frac{a}{b} < 0$
7) $\frac{a}{b} \geq 0$
8) $\frac{a}{b} \leq 0$

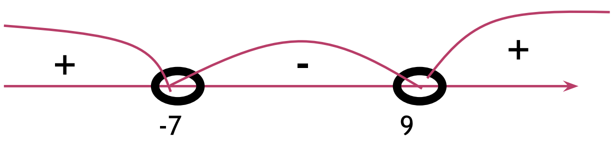
АЛГОРИТМ МЕТОДА ИНТЕРВАЛОВ

1) Приравниваем выражение к 0. Находим корни. Если перед нами выражение a*b = 0, то в данном случае каждый и множителей будет равен 0. Если же пере нами выражение $\frac{a}{b}$, то верх равен 0, а низ не равен 0 (*таким образом, в знаменателе всегда будет выколотая точка).
2) Обозначаем все точки (вколотые и выколотые) на оси.
3) Из каждого промежутка берется любое число и подставляется в изначальное выражение, ищется получившийся знак.
4) Выбираем нужный знак, исходя и изначального выражения.

НЕРАВЕНСТВА ВИДА A*B>0 И A*B<0

(x+7)(x-9) > 0 выколотые

1) (x+7)(x-9) = 0
x+7=0 или x-9=0
x=-7 или x=9

2) 

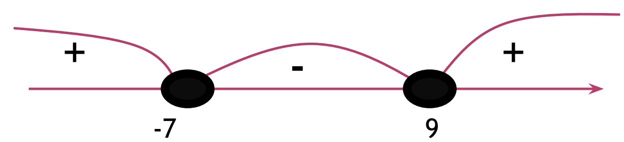
y(-10) = (-10+7)(-10-9) = 57 > 0 (+)
y(0) = (0+7)(0-9) = -63 < 0 (-)
y(10) = (10+7)(10-9) = 17 >0 (+)
Числа берутся любые, главное чтобы они принадлежали выбранному промежутку!

Т.к. в изначальном примере указан знак >0, следовательно нам нужны «+».

Ответ: (-∞; -7) U (9;+∞)

(x+7)(x-9) ≤ 0 вколотые

1) (x+7)(x-9) = 0
x+7=0 или x-9=0
x=-7 или x=9

2) 

y(-10) = (-10+7)(-10-9) = 57 > 0 (+)
y(0) = (0+7)(0-9) = -63 < 0 (-)
y(10) = (10+7)(10-9) = 17 >0 (+)
Числа берутся любые, главное чтобы они принадлежали выбранному промежутку!

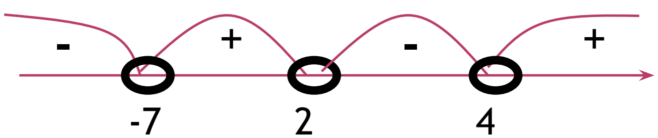
Т.к. в изначальном примере указан знак ≤ 0, следовательно нам нужны «-».

Ответ: [-7;9]

НЕРАВЕНСТВА ВИДА A/B>0 И A/B<0

$\frac{(x+7)(x-2)}{x-4} < 0$

x+7=0 или **x-2=0** или **x-4 ≠ 0**
x= -7 или **x=2** или **x ≠ 4**



y(-12) = (-12+7)(-12-2)/(-12-4) = -4.375 (-)
y(0) = (0+7)(0-2)/(0-4) = 3.5 (+)
y(3) = (3+7)(3-2)/(3-4) = -1 (-)
y(5) = (5+7)(5-2)/(5-4) = 36 (+)

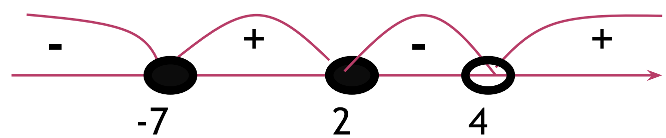
<u>Числа берутся любые, главное чтобы они принадлежали выбранному промежутку!</u>

Т.к. в изначальном примере указан знак < 0, следовательно нам нужны «-».
Нижние точки всегда будут **выколотые**! **А верхние в зависимости от знака!**
>< - выколотые; ≥≤ - вколотые!

<u>Ответ:</u> (-∞; -7) ∪(2;4)

$\frac{(x+7)(x-2)}{x-4} \geq 0$

x+7=0 или **x-2=0** или **x-4 ≠ 0**
x= -7 или **x=2** или **x ≠ 4**



y(-12) = (-12+7)(-12-2)/(-12-4) = -4.375 (-)
y(0) = (0+7)(0-2)/(0-4) = 3.5 (+)
y(3) = (3+7)(3-2)/(3-4) = -1 (-)
y(5) = (5+7)(5-2)/(5-4) = 36 (+)

<u>Числа берутся любые, главное чтобы они принадлежали выбранному промежутку!</u>

Т.к. в изначальном примере указан знак ≥ 0, следовательно нам нужны «+».
Нижние точки всегда будут выколотые!
Нижние точки всегда будут **выколотые**!
А верхние в зависимости от знака!
>< - выколотые; ≥≤ - вколотые!

<u>Ответ:</u> [-7; 2] ∪(4;+∞)