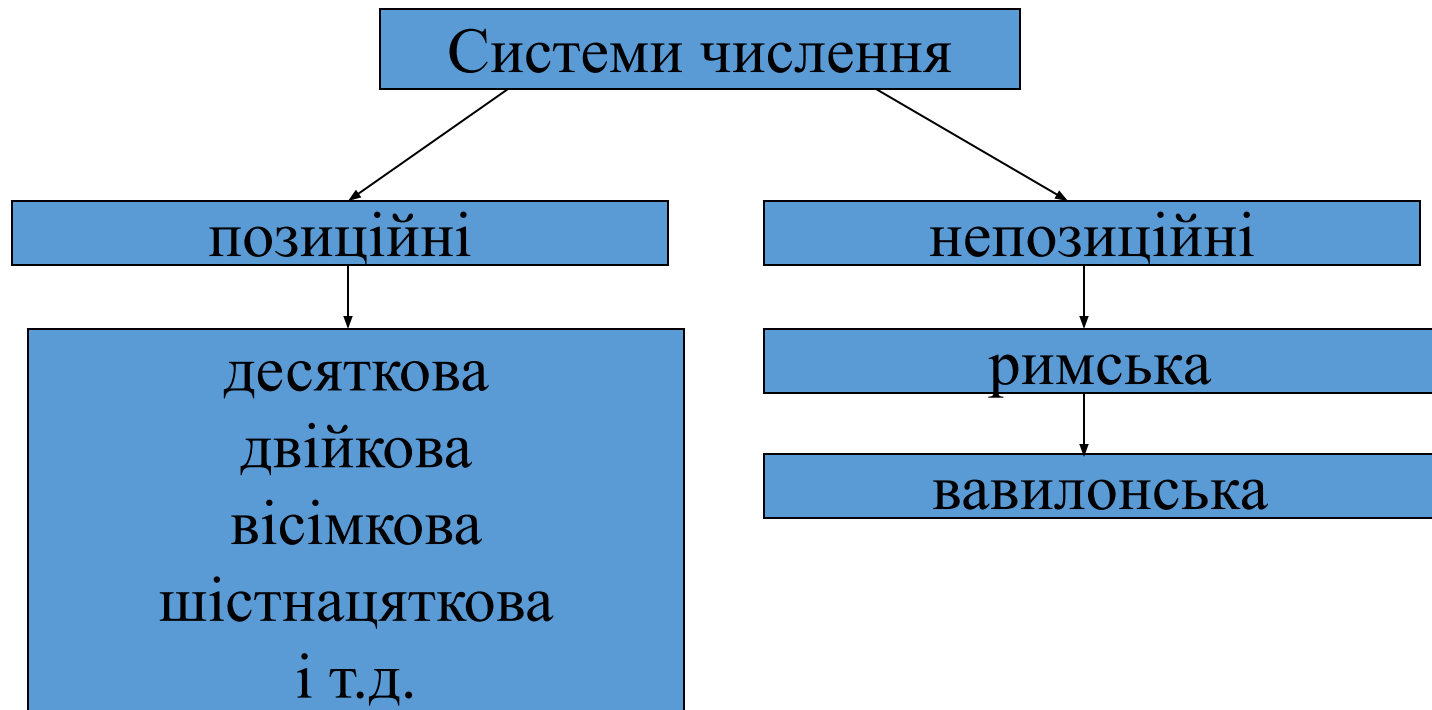


Системи числення

Савісько Антон
101-НЗ

Система числення – сукупність способів і засобів запису чисел для проведення підрахунків.



Непозиційні системи числення



Непозиційна система числення – система числення, в якій значення кожної цифри в довільному місці послідовності цифр, яка означає запис числа, не змінюється (вавилонська, римська).
У непозиційній системі кожен знак у запису незалежно від місця означає одне й те саме число.

Римська система числення – непозиційна система числення, кожний символ означає одне і те ж число не залежно від позиції.
Цифри позначаються латинськими буквами

I, V, X, L, C, D, M
(1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000)

Римська цифра	Десяткове значення
I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

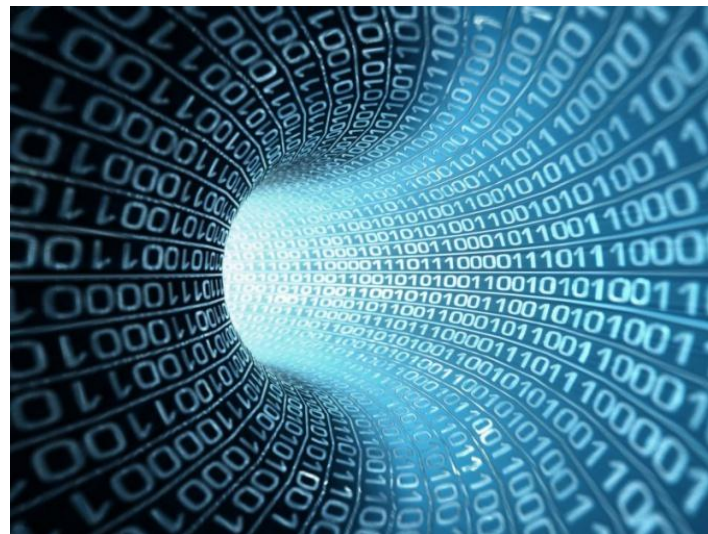
Позиційні системи числення

- Основою системи може бути довільне натуральне число, більше одиниці;
- Основа ПСЧ – це кількість цифр, що використовуються для представлення чисел;
- Значення цифри залежить від її позиції, тобто, одна і та ж цифра відповідає різним значенням в залежності від того на якій позиції числа вона стоїть;
- Наприклад: **888**: 800; 80; 8
- Довільне позиційне число можна представити у вигляді суми степеней основи системи.

Двійкова СЧ



- Основа системи – 2;
- Містить 2 цифри: 0; 1;
- Довільне двійкове число можна представити у вигляді суми степеней числа 2 – основи системи;
- Приклади двійкових чисел: 11100101; 10101;



Біт і Байт

Кожна цифра двійкового числа називається біт.

Група з 8 біт складає байт, який зберігає різні типи даних,
літери алфавіту, десяткові цифри або інші знаки.
Байт - основна одиниця виміру інформації.

Похідні від байта :

1 Кбайт (кілобайт) = 1024 байт = 2^{10} байт,
1 Мбайт (мегабайт) = 1024 Кбайт = 2^{20} байт,
1 Гбайт (гігабайт) = 1024 Мбайт = 2^{30} байт,
1 Тбайт (терабайт) = 1024 Гбайт = 2^{40} байт.

Вісімкова СЧ



- Основа системи – 8;
- Містить 8 цифр: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7;
- Довільне вісімкове число можна представити у вигляді суми степеней числа 8 – основи системи;
- Приклади вісімкових чисел: 2105; 73461;

Основу восьмеричної с/ч, тобто число 8, можна представити у вигляді 2^3 . Тому одній восьмеричній цифрі відповідає три двійкових розряди – тріада.

Правило переходу з двійкової системи числення у вісімкову

Розбити двійковий код на класи справа на ліво по три цифри у кожному. Замінити кожний клас відповідною вісімковою цифрою.

Двійкові тріади	000	001	010	011	100	101	110	111	001000	001001	001010
Вісімкові цифри	0	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12

$$1.110.101.100_2 = 1654_8$$

Правило переходу з вісімкової системи числення у двійкову

Кожну вісімкову цифру замінити двійковим кодом по три
цифри у кожному

$$2571_8 = 10.101.111.001_2$$

Шістнадцяткова СЧ



- Основа системи – 16;
- Містить 16 цифр: от 0 до 9; A; B; C; D; E; F;
- Довільне шістнадцяткове число можна представити у вигляді суми степеней числа 16 – основи системи;
- Приклади шістнадцяткових чисел: 21AF3; B09D;

Правило переходу з двійкової системи числення у шістнацяткову

Розбити двійковий код на класи справа наліво по чотири цифри у кожному. Замінити кожний клас відповідною шістнацятковою цифрою.

Двійкові тетради	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
Шістнадцяткові цифри	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
Десяткові цифри	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$$1.1011.1000.1101_2 = 1B8D_{16}$$

Правило переходу з шістнацяткової системи числення у двійкову

Кожну шістнацяткову цифру замінити двійковим кодом по чотири цифри у кожному

$$F54D0_{16} = 1111.0101.0100.1101.0000_2$$

Правило переходу з десяткової системи числення у шістнадцяткову

- Розділити десяткове число на 16. Отримаєте частку та остачу.
- Частку знову розділити на 16. Отримаєте частку та остачу.
- Виконуйте ділення до тих пір, поки остання частка не стане меншою 16.
- Записати останню частку та всі остачі у зворотньому порядку. Отримане число і буде шістнадцятковим кодом даного десяткового числа.

Приклад:

$$\begin{array}{r|l} 335 & 16 \\ \hline 15 & 20 \\ & \hline & 4 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} & 16 \\ & \hline & 1 \end{array}$$

$$335_{10} = 14F_{16}$$

Правило переходу з шістнадцяткової системи числення у десяткову.

Для переходу з шістнадцяткової системи числення у десяткову необхідно дане число представити у вигляді суми степеней шістнацятки та обчислити її десяткові значення.

$$\begin{aligned} A14_{16} &= 10 \cdot 16^2 + 1 \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^0 = \\ &= 10 \cdot 256 + 16 + 4 = 2580_{10} \end{aligned}$$

Десяткова СЧ



- Основа системи - число 10;
- Містить 10 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
- Довільне число можна представити у вигляді суми степеней числа 10 – основи системи;

$$2345_{10} = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

Правила переходу

1. З десятикової СЧ у двійкову СЧ:

- Розділити десятикове число на 2. Отримаєте частку та остачу.
- Частку знову поділити на 2. Отримаєте частку та остачу.
- Виконувати ділення до тих пір, поки остання частка не стане меншим 2.
- Записати останню частку і всі остачі у зворотньому порядку. Отримане число і буде двійковим кодом даного десятикового числа.

Приклад:

$$\begin{array}{r|l} 27 & 2 \\ \hline 1 & 13 \\ & 2 \\ & 6 \\ & 2 \\ & 3 \\ & 2 \\ & 1 \end{array}$$

$$27_{10} = 11011_2$$

2. Правило переходу з двійкової системи числення у десяткову.

Для переходу з двійкової системи числення у десяткову необхідно двійкове число представити у вигляді суми степеней двійки та порахувати її десяткове значення.

Приклад:

$$\begin{aligned} 11101_2 &= 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \\ &= 16 + 8 + 4 + 0 + 1 = 29_{10} \end{aligned}$$

Правило переходу з десятикової системи числення у вісімкову

- Розділити десятикове число на 8. Отримаєте частку та остачу.
- Частку знову розділити на 8. Отримаєте частку та остачу.
- Виконуйте ділення до тих пір, поки остання частка не стане меншим 8.
- Записати останню частку та всі остачі у зворотньому порядку. Отримане число і буде вісімковим записом даного десятикового числа.

Приклад:

$$\begin{array}{r|l} 132 & 8 \\ \hline 4 & 16 \\ \hline & 0 \end{array} \begin{array}{r|l} & 8 \\ \hline & 2 \end{array}$$

$$132_{10} = 204_8$$

Правило переходу з вісімкової системи числення у десяткову.

- Для переходу з вісімкової системи числення у десяткову необхідно вісімкове число представити у вигляді суми степеней 8 та знайти її десяткове значення.

$$\begin{aligned} 215_8 &= 2 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = \\ &= 2 \cdot 64 + 8 + 5 = 141_{10} \end{aligned}$$

Переведення дробової частини десяткового числа в різні системи числення із заданою точністю

Переведення дробової частини числа представленого в десятковій с/ч у двійкову, восьмеричну або шістнадцятеричну системи числення виконується шляхом множення дробової частини вхідного числа на основу нової с/ч.

Процес послідовного множення може тривати нескінченно, переведення виконується або до одержання необхідної кількості розрядів у дробовій частині числа в новій с/ч або до досягнення заданої точності.

Послідовність дій

- Помножити дробову частину вхідного числа на основу нової с/ч. Ціла частина отриманого добутку дає першу цифру дробової частини числа в новій с/ч.
2. Дробову частину отриманого добутку помножити на основу нової с/ч. Ціла частина отриманого добутку дає наступну цифру дробової частини числа в новій с/ч.
 3. Якщо досягнуто задану точність або отримано необхідну кількість цифр у дробовій частині числа в новій с/ч те перейти до п. 4, інакше повторити п. 2.
 4. Отримані в результаті множення цілі частини добутків, записати в порядку їхнього обчислення. Це й буде дробова частина вхідного числа в новій с/ч.

Приклад

$$0,74_{10} \rightarrow (?)_2$$

$$\begin{array}{r} 0,74 \\ \underline{2} \\ \underline{1,48} \\ 2 \\ \underline{2} \\ \underline{0,96} \\ 2 \\ \underline{2} \\ \underline{1,92} \end{array}$$

$$0,74_{10} \rightarrow 0,101_2$$

$$0,23_{10} \rightarrow (?)_8$$

$$\begin{array}{r} 0,23 \\ \underline{8} \\ \underline{1,84} \\ 8 \\ \underline{8} \\ \underline{6,72} \\ 8 \\ \underline{8} \\ \underline{5,76} \end{array}$$

$$0,23_{10} \rightarrow 0,165_8$$

$$0,12_{10} \rightarrow (?)_{16}$$

$$\begin{array}{r} 0,12 \\ \underline{16} \\ \underline{1,92} \\ 16 \\ \underline{16} \\ \underline{14,72} \\ 16 \\ \underline{16} \\ \underline{11,52} \end{array}$$

$$0,12_{10} \rightarrow 0,1EB_{16}$$

Погрішність

Переведемо отримані значення назад в десяткову систему числення й визначимо Δ_A погрішність даного способу переведення.

$$0,101_2 \rightarrow 0^0, 1^{-1} 0^{-2} 1^{-3} = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 0,625_{10}$$

Погрішність для двійкової с/ч складе $\Delta_2 = 0.74 - 0.625 = 0.115$.

$$0.165_8 \rightarrow 0^0, 1^{-1} 6^{-2} 5^{-3} = 0 \cdot 8^0 + 1 \cdot 8^{-1} + 6 \cdot 8^{-2} + 5 \cdot 8^{-3} \approx 0.229_{10}$$

Погрішність для восьмеричної с/ч складе $\Delta_8 = 0.23 - 0.229 = 0.001$.

$$0.1EB_{16} \rightarrow 0^0, 1^{-1} E^{-2} B^{-3} = 0 \cdot 16^0 + 1 \cdot 16^{-1} + 14 \cdot 16^{-2} + 11 \cdot 16^{-3} \approx 0.1199_{10}$$

Погрішність для шістнадцятиричної с/ч складе $\Delta_{16} = 0.12 - 0.1199 = 0.0001$

Для десяткової с/ч точність представлення числа визначається в такий спосіб: $(0, b_{-1} b_{-2} \dots b_{-k})_{10} \rightarrow b_{-1} \cdot 10^{-1} + b_{-2} \cdot 10^{-2} + \dots + b_{-k} \cdot 10^{-k}$

Точність, що дає цифра з ваговим коефіцієнтом -1 дорівнює $10^{-1} = 0.1$;

Точність, що дає цифра з ваговим коефіцієнтом -2 дорівнює $10^{-2} = 0.01$

Точність, що дає цифра з ваговим коефіцієнтом -k дорівнює 10^{-k}

У загальному випаді
позиційній системі чи

$$t_A = \frac{1}{A^R},$$

гся число, у будь-якій
виразу

де A – основа системи числення; R – кількість цифр у дробовій

Точність переведення задається в десятковій системі числення. Для виконання переведення із заданою точністю необхідно одержати таку кількість цифр у дробовій частині числа в новій системі числення A , щоб $t_{10} > t$.

$$0,74_{10} \rightarrow 0,1^{-1} 0^{-2} 1^{-3} 1^{-4} 1^{-5} 1^{-6} 0^{-7} = 0,1011110_2$$

$\begin{array}{r} 0,74 \\ \underline{2} \\ 1,48 \\ \underline{2} \\ 0,96 \\ \underline{2} \\ 1,92 \\ \underline{2} \\ 1,84 \\ \underline{2} \\ 1,68 \\ \underline{2} \\ 1,36 \\ \underline{2} \\ \downarrow 0,72 \end{array}$	точність, що дає ця цифра $t_2 = 2^{-1} = 0,5 > t = 0,01$; точність, що дає ця цифра $t_2 = 2^{-2} = 0,25 > t = 0,01$; точність, що дає ця цифра $t_2 = 2^{-3} = 0,125 > t = 0,01$; точність, що дає ця цифра $t_2 = 2^{-4} = 0,0625 > t = 0,01$; точність, що дає ця цифра $t_2 = 2^{-5} = 0,03125 > t = 0,01$; точність, що дає ця цифра $t_2 = 2^{-6} \approx 0,01563 > t = 0,01$; точність, що дає ця цифра $t_2 = 2^{-7} \approx 0,00781 < t = 0,01$;
---	---

Отримана точність представлення числа у двійковій с/ч t_2 менше заданої точності t_{10} , отже, процес переведення можна завершити. Визначимо погрішність переведення, попередньо виконавши зворотне переведення:

$$\begin{aligned} 0,1011110_2 &\rightarrow 0^0, 1^{-1} 0^{-2} 1^{-3} 1^{-4} 1^{-5} 1^{-6} 0^{-7} = \\ &= 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + 1 \cdot 2^{-6} + 0 \cdot 2^{-7} \approx 0,734_{10} \end{aligned}$$

Погрішність склала $\Delta_2 = 0,74 - 0,734 = 0,006$ і не перевищує t_{10} .