

Математическая обработка результатов измерений

1. Виды погрешностей.
2. Случайные погрешности измерений.
3. Оценка истинного значения измеряемой величины.
4. Оценка точности измерений.
5. Сравнительные исследования.



Расхождение между истинным значением определяемой величины и полученным результатом измерения носит название *погрешности измерения* (*ошибки измерения*).



1. Виды погрешностей



1. Систематические погрешности -

это погрешности, вызванные каким-либо постоянным воздействием, которое во время измерения нельзя устранить.

ПРИЧИНА

постоянно действующий фактор, не изменяющийся от измерения к измерению.



конфискованные гири

«В прошлом номере в статье "ПанеГИРИк базарной дешевизне" мы рассказали о весах и гирях на рынках нашего города. О том, что почти везде весы показывают неправильный вес, а большинство гирь весят меньше указанного на них номинала».

УСТРАНЕНИЕ:

сверка с эталонами, исправление прибора и, в целом, устранение известного мешающего фактора.

Главная палата
мер, весов и часов



2. Прوماхи -

это результаты, выпадающие из общего ряда измерений.

ПРИЧИНА

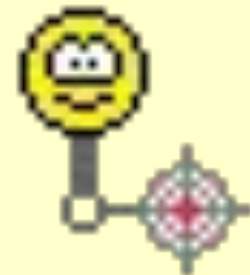
невнимание экспериментаторов,
нечеткая градуировка прибора
и т. д.



УСТРАНЕНИЕ:

при обработке обычно отбрасывают.

В экспертной практике принято правило «трех сигм»: для исключения возможного промаха необходимо, чтобы его значение отличалось от среднего арифметического остальной серии измерений больше, чем на утроенное значение σ .



3. Случайные погрешности -

это погрешности, вызванные влиянием различных случайных факторов, влияние которых и их значение во время измерения нельзя предусмотреть;

в виду этого при различных измерениях погрешности могут менять свой знак и величину, причем нельзя заранее указать ее значение.

ПРИЧИНЫ



вызываются причинами,
влияние которых
изменяется от измерения к
измерению, и эти причины
не могут быть учтены.

УСТРАНЕНИЕ:

с помощью математической обработки
результатов измерений.



2. Случайные погрешности измерений



Целью математической обработки результатов измерений

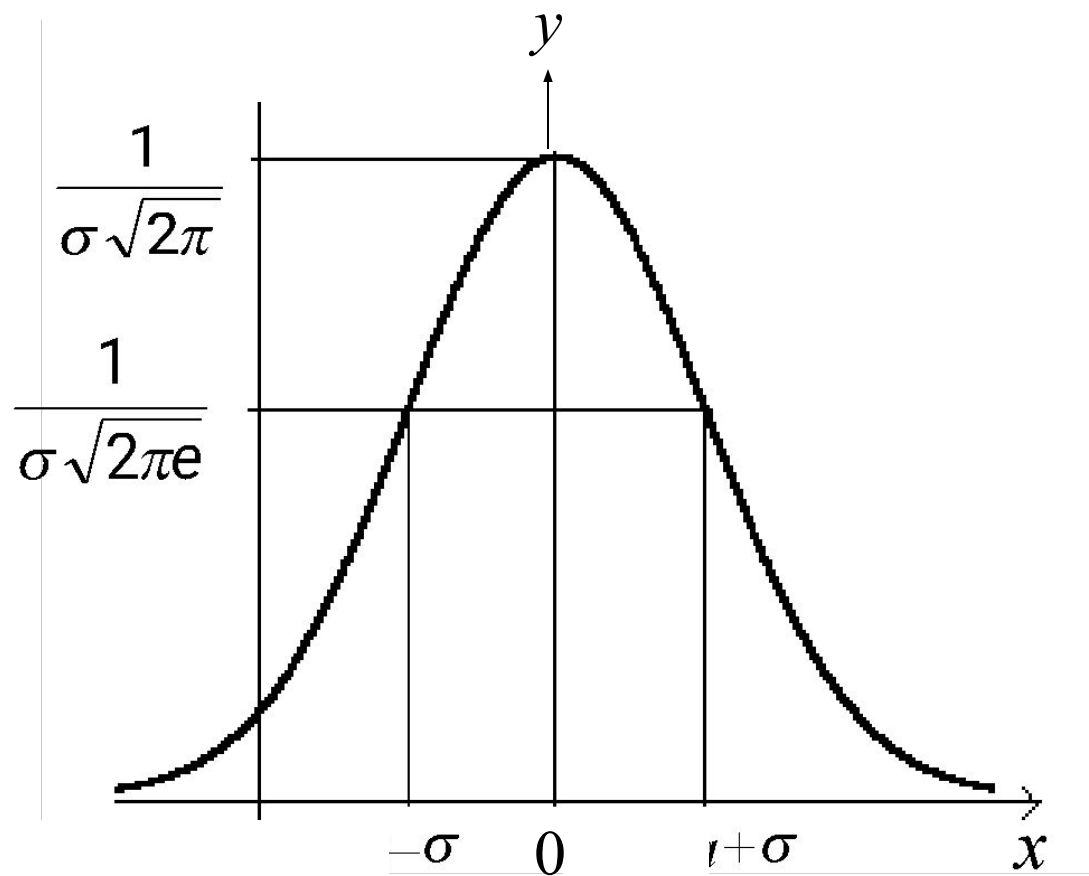
является оценка величины случайных погрешностей и определение интервалов, в которых с необходимой степенью надежности находится истинное значение измеряемого признака.

Свойства случайных погрешностей

- для данных условий измерений случайные ошибки не могут превосходить по модулю известного предела;
- при достаточно большом количестве измерений случайные ошибки, одинаковые по величине, но различные по знаку, встречаются одинаково часто;

Свойства случайных погрешностей

- большие по абсолютной величине ошибки встречаются намного реже, чем малые, то есть вероятность появления ошибки уменьшается с ростом величины ошибки;
- с увеличением числа измерений среднее арифметическое случайных ошибок одинаковой точности измерений одной и той же величины неограниченно стремится к нулю.



3. Оценка истинного значения измеряемой величины



Если все измерения некоторой величины произведены с одинаковой точностью, то они называются *равноточными*.

результаты отдельных измерений

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

*истинное значение
измеряемой величины*

$$\tilde{X}$$



3. 1 Точечная оценка

Точечной оценкой

**называют статистическую
оценку, которая определяется
одним числом**

$$\theta = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$n \rightarrow \infty \qquad \bar{x} \rightarrow \tilde{X}$$



3. 2 Интервальная оценка



Задача интервальной оценки:

по данным выборки построить такой числовой интервал (*доверительный*), внутри которого с заранее заданной вероятностью, близкой к единице, будет находиться оцениваемый параметр.

Пусть для неизвестного параметра $\tilde{X}$
найдена оценка $\bar{X}$
и задана вероятность p , близкая к
единице (доверительная вероятность).
Требуется найти такое значение δ , чтобы
интервал $(\bar{X} - \delta, \bar{X} + \delta)$
длины 2δ накрыл искомое значение
параметра $\tilde{X}$ с вероятностью p .

$$p = P(|\tilde{X} - \bar{x}| < \delta)$$

$$p = P(\bar{x} - \delta < \tilde{X} < \bar{x} + \delta)$$

**Ширина доверительного интервала
определяется по формуле:**

$$\delta = \frac{t(n, p) \cdot \sigma^*}{\sqrt{n}}$$

где, число $t(n, p)$ определяется по специальным таблицам критических точек распределения Стьюдента;

σ^* – исправленное среднее квадратическое отклонение.

4. Оценка точности измерений



Точность измерения в случае точечной оценки

Средней абсолютной ошибкой называется среднее арифметическое модулей всех ошибок:

$$\theta = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\Delta x_i|$$

Точность измерения в случае точечной оценки

Среднеквадратическая ошибка (стандарт):

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots \Delta x_n^2}{n - 1}}$$

	Диаметр пули	Толщина бумаги
$\bar{X}$	7,62 мм	0,1 мм
σ^*	0,1 мм	0,1 мм

Точность измерения в случае точечной оценки

*Коэффициент вариации (относительная
среднеквадратическая ошибка)*

$$V^* = \frac{\sigma^*}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

	Диаметр пули	Толщина бумаги
$\bar{X}$	7,62 мм	0,1 мм
σ^*	0,1 мм	0,1 мм
V_1^*	0,13%	10%

Точность измерения в случае интервальной оценки

*Ширина доверительного
интервала:*

$$\delta = \frac{t(n, p) \cdot s}{\sqrt{n}}$$

Точность измерения в случае интервальной оценки

Относительная погрешность:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\bar{X}} \cdot 100\%$$

Проведен химический анализ чистого образца $\text{BaCl} \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ на процентное содержание Ba. Получены следующие результаты:

56,10%, 56,05%, 56,00%,
55,95%, 56,30%, 55,83%.



Провести обработку результатов измерений при надежности $\alpha = 95\%$.



1. Определим среднее арифметическое ряда измерений

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{56,1 + 56,05 + 56,00 + 55,95 + 56,3 + 55,83}{6}$$

$$\bar{x} = 56,04(\%)$$



2. Рассчитаем абсолютную погрешность каждого отдельного измерения:

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x}$$

$$\Delta x_1 = 56,10 - 56,04 = 0,06 \text{ \%};$$

$$\Delta x_2 = 56,05 - 56,04 = 0,01 \text{ \%};$$

$$\Delta x_3 = 56,00 - 56,04 = -0,04 \text{ \%};$$

$$\Delta x_4 = 55,95 - 56,04 = -0,09 \text{ \%};$$

$$\Delta x_5 = 56,30 - 56,04 = 0,26 \text{ \%};$$

$$\Delta x_6 = 55,83 - 56,04 = -0,21.$$

3. Вычислим величину исправленного среднего квадратического отклонения:



$$\sigma^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n-1}}$$

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{(0,06)^2 + (0,01)^2 + (-0,04)^2 + (-0,09)^2 + (0,26)^2 + (-0,21)^2}{6-1}}$$

$$\sigma^* = 0,16(\%)$$



4. Определим значение ширины доверительного интервала:

$$\delta = \frac{t(n, p) \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\delta = \frac{2,57 \cdot 0,16}{\sqrt{6}} = 0,17\%$$



5. Найдем относительную ошибку:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\bar{X}} \cdot 100\%$$

$$\varepsilon = \frac{0,17}{56,04} \cdot 100\% = 0,3$$



Вывод:

После шести измерений установлено, что с надежностью 95% содержание Ва находится в интервале (55,87%; 56,21%).

Относительная ошибка измерений 0,3 %

5. Сравнительные исследования



УСЛОВИЕ 1

Сравниваемые серии измерений различаются в том случае, если выполняется неравенство:

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| > 4 \cdot \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}$$

$$\rho_i = 0,6745 \cdot \frac{\sigma_i^*}{\sqrt{n}}$$

Пример 1:

В таблице приведены результаты определения толщины двух кусков проволоки.

Различаются ли статистически устойчиво оценки результатов?

Пример 1:

Объект	Значение	Среднее	Δx_i^2	σ^*	$\sigma^* / \sqrt{n}$	ρ
1	1,45	1,45	0	0,026	0,012	0,008
	1,47		0,04			
	1,41		0,16			
	1,45		0			
	1,48		0,09			
2	1,52	1,54	0,04	0,22	0,01	0,006
	1,56		0,04			
	1,51		0,09			
	1,56		0,04			
	1,54		0			

Пример 1:

$$|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| = |1,54 - 1,45| = 0,09$$

$$4 \cdot \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2} = 4 \cdot 0,010 = 0,04$$

Пример 1:

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| > 4 \cdot \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}$$

Следовательно, сравниваемые комплексы измерений статистически устойчиво отличаются.

Пример 1:

Сравниваемые серии измерений различаются в том случае, если выполняется неравенство:

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| > 4 \cdot \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}$$

$$\rho_i = 0,6745 \cdot \frac{\sigma_i^*}{\sqrt{n}}$$

УСЛОВИЕ 2

Сравниваемые комплексы измерений статистически устойчиво различаются с данной степенью вероятности p^2 , если доверительные интервалы, определенные для каждой серии с доверительной вероятностью p не перекрываются.

Пример 2:

Для указанных в примере 1 данных установить различаются ли они статистически устойчиво.

Пример 2:

$$t(5; 0,95)=2,78; \delta_1=0,033; \delta_2=0,028$$

$$(1,417; 1,483)$$

$$(1,512; 1,568)$$

Поскольку доверительные интервалы не пересекаются, то с вероятностью $p=0,95^2=0,9025$ можно утверждать, что эти комплексы измерений устойчиво отличаются



Диалог на экзамене.

Преподаватель: - Что такое лошадиная сила?

Студент: - Это сила, какую развивает лошадь ростом в один метр и весом в один килограмм.

Преподаватель: - Где же вы такую лошадь видели?!

Студент: - А ее просто так не увидишь. Она хранится в Париже, в Палате мер и весов.