

Стационарні випадкові процеси

Підготував:
Студент групи ПМ-3
Куценко Олександр

Стаціонарні випадкові процеси

Означення. Випадковий процес називається **стаціонарним випадковим процесом**, якщо його характеристики не змінюються зі зміною його аргументу, тобто, однакові у всіх перетинах процесів $X(t)$ і $X(t + t_0)$, де t_0 – будь-яке фіксоване число.

Означення. Випадкова функція $X(t)$ називається **стаціонарною**, якщо всі її характеристики імовірності не залежать від часу t , тобто

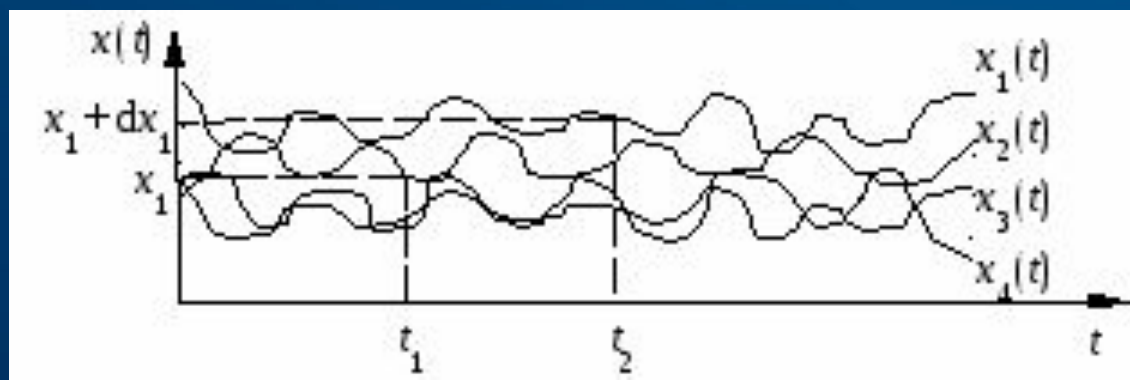
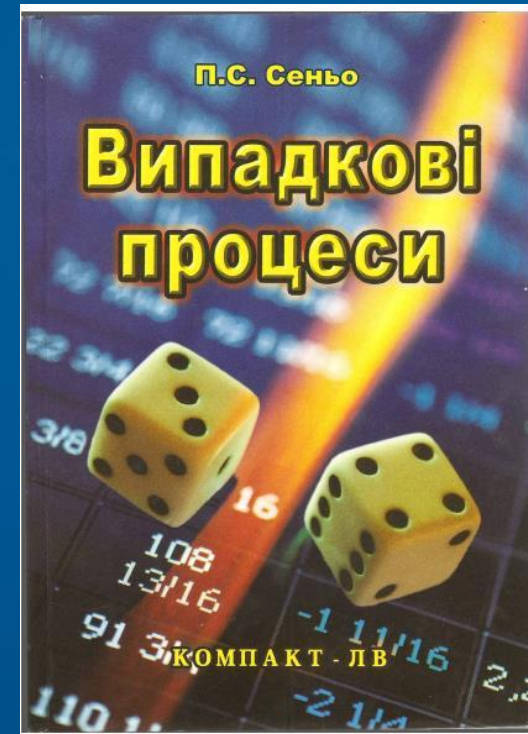
$$m_x(t) = m_x = \text{const}$$

$$D_x(t) = D_x = \text{const}$$

Отже, у стаціонарному процесі функції щільності ймовірностей не змінюються при заміні аргументу t на $t + t_0$, тобто:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + t_0, t_2 + t_0, \dots, t_n + t_0)$$

де $n=1, 2, \dots, -\infty < t_0 < +\infty$.



Стаціонарні випадкові процеси

Означення. Випадковий процес називається $X(t)$ **стаціонарним у вузькому розумінні**, якщо

$$F_X(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) = F_X(t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau, x_1, \dots, x_n), \\ \forall n, \tau, t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n$$

Для випадкових процесів, які є стаціонарними в вузькому сенсі:

$$F_X(t, x) \Big|_{\substack{n=1 \\ \tau=-t}} = F_X(0, x),$$

тобто функція $F_X(t, x)$ не залежить від параметру t ;

$$F_X(t_1, t_2, x_1, x_2) \Big|_{\substack{n=1 \\ \tau=-t_1}} = F_X(0, t_2 - t_1, x_1, x_2) =$$

$$= F_X(\tau, x_1, x_2),$$

тобто $F_X(\tau, x_1, x_2)$ залежить від трьох параметрів, де τ — різниця моментів часу розрізів.

Означення. Випадковий процес $X(t)$ називається **стаціонарним у широкому розумінні**, якщо виконуються наступні властивості (при цьому із стаціонарності в вузькому розумінні слідує стаціонарність в широкому розумінні):

1) $E_X(t) = E_X$;

2) $D_X(t) = D_X$;

3) $K_X(t_1, t_2) = K_X(\tau)$, де $\tau = t_2 - t_1$.

Зауваження. Кореляційна функція $K_X(\tau)$ стаціонарного процесу володіє наступними властивостями:

1) $K_X(\tau) = K_X(-\tau)$;

2) $D_X = K_X(0)$;

3) $|K_X(\tau)| \leq D_X$;

4) $\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N x_i x_k K_X(t_i - t_k) \geq 0$
 $\forall N, t_1, \dots, t_N, x_1, \dots, x_N$

Основні характеристики стаціонарних випадкових процесів

Означення. Строга математична модель безперервного випадкового процесу припускає, що він протікає у часі від мінус нескінченності до плюс нескінченності, тобто $t \in (-\infty, \infty)$. А ту його частину $x^*(t)$, яку вдалося у якийсь спосіб зафіксувати, називають **реалізацією** випадкового процесу $x(t)$.

Властивості функції $F(x)$ розподілу безперервної випадкової величини X :

- 1) якщо $x_2 \geq x_1$, то $F(x_2) \geq F(x_1)$;
- 2) якщо $x = -\infty$, то $F(-\infty) = 0$
- 3) якщо $x = +\infty$, то $F(+\infty) = 1$
- 4) якщо $x_1 \leq X < x_2$, то :
$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

Перша із цих властивостей означає, що графік функції розподілу безперервної випадкової величини X є безперервною зростаючою зі зростанням аргументу x кривою.

Друга властивість означає, що випадкова величина X не може мати значень, менших від мінус нескінченності.

Основні характеристики стаціонарних випадкових процесів

Третя властивість означає, що випадкова величина X не може мати значень, більших від плюс нескінченності.

А четверта властивість означає, що для знаходження ймовірності потрапляння випадкової величини X у проміжок значень $[x_1, x_2)$ достатньо взяти різницю значень її функції розподілу $F(x)$ на границях цього проміжку.

Всі ці властивості є справедливими і для дискретної випадкової величини, але слід пам'ятати, що графік її функції розподілу має східчасту форму(рис.1.).

Основні характеристики стаціонарних випадкових процесів

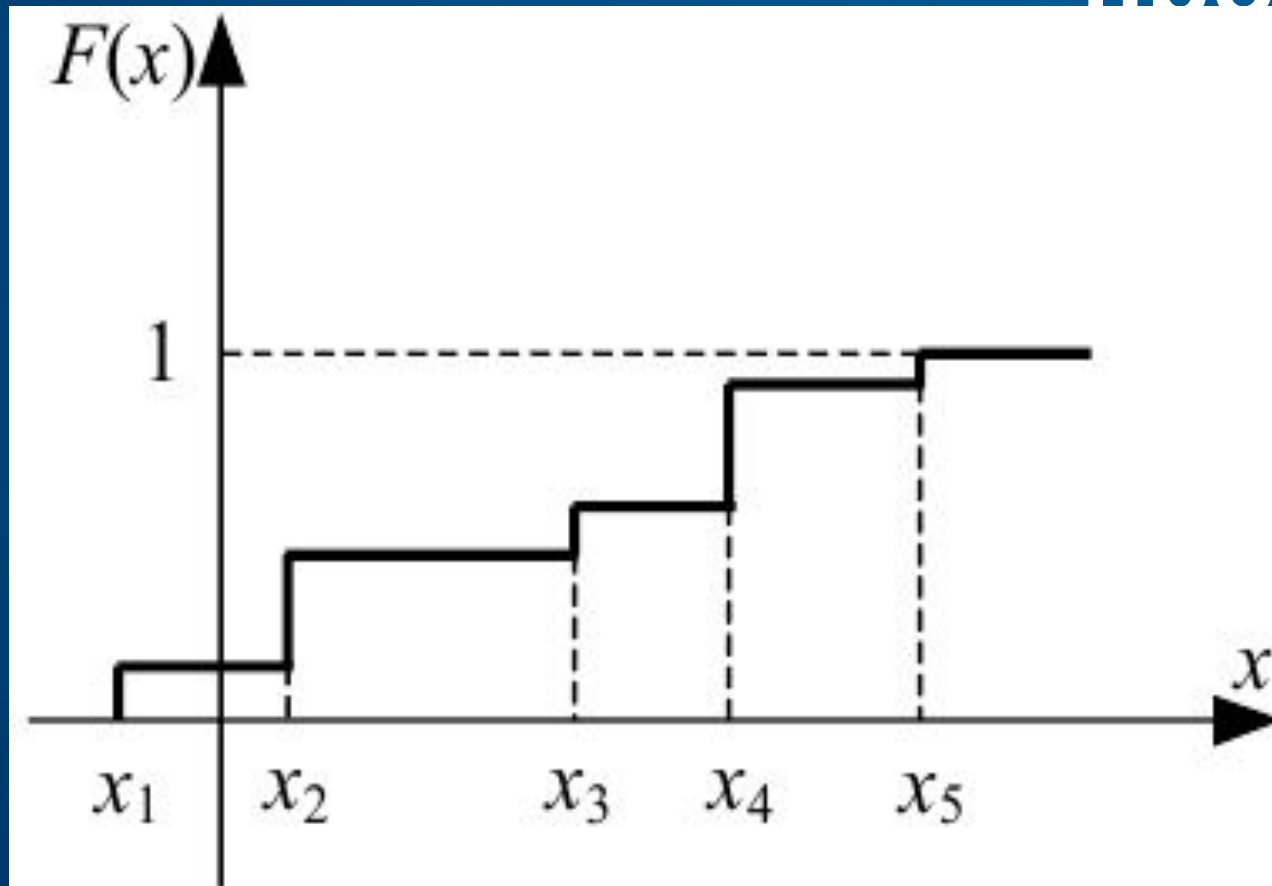


Рис.1. Графік функції $F(x)$ розподілу дискретної випадкової величини X за умови, що величина X здатна набувати лише одне із п'яти значень x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

Основні характеристики стаціонарних випадкових процесів

Для неперервної випадкової величини X :

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx,$$

а для дискретної:

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx,$$

$$m_x = \sum_{i=1}^N x_i p_i,$$

де p_i — імовірність того, що дискретна
випадкова величина X набуде значення x_i :

$$p_i = P(X = x_i)$$

Формули для неперервної ВВ $X(t)$ можна
записати так:

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) f(x, t) dx,$$

$$D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - m_x(t))^2 f(x, t) dx$$

Основні характеристики стаціонарних випадкових процесів

У класі стаціонарних випадкових процесів $X(t)$ виділяють підклас ергодичних, для яких усереднення на множині значень x дає той же результат, що й усереднення в часі t .

Це означає, що математичне очікування m_x та дисперсію D_x ергодичного випадкового процесу $X(t)$ можна отримати не лише за допомогою формул

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) f(x, t) dx,$$

$$D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - m_x(t))^2 f(x, t) dx,$$

але і за допомогою формул, набагато простіших за структурою обчислень:

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt,$$

$$D_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (x(t) - m_x)^2 dt.$$

Основні характеристики стаціонарних випадкових процесів

Але у практиці розрахунків
використовуються дещо інші формули:

за якими знаходяться статистична
оцінка m_x^* математичного очікування
 m_x ергодичного випадкового процесу
 $X(t)$ та статистична оцінка D_x^*
дисперсії D_x цього процесу з
використанням однієї, але достатньо
інформативної реалізації $x^*(t)$
випадкового процесу $X(t)$,
зафіксованої на відрізку часу T .

$$m_x^* = \frac{1}{T} \int_0^T x^*(t) dt,$$

$$D_x = \frac{1}{T} \int_0^T (x^*(t) - m_x)^2 dt, (\blacksquare)$$

Оцінки m_x^* та D_x^* теж є
випадковими величинами,
залежними від довжини T
реалізації $x^*(t)$, але, зрозуміло, що
дисперсія цих оцінок є набагато
меншою у порівнянні із
дисперсією процесу $X(t)$ і з ростом
 T наближається до нуля.

Основні характеристики стаціонарних випадкових процесів

До статистичних оцінок числових характеристик випадкових величин математична статистика висуває три вимоги: по-перше, вони повинні бути *незміщеними*, по-друге, *ефективними*, а по-третє, *переконливими*.

Вимога незміщеності означає, що з ростом T рано чи пізно значення оцінки точно збіжиться зі значенням відповідної числової характеристики

Вимога ефективності означає, що із множини різноманітних формул, які можуть бути запропоновані для отримання числового значення оцінки, необхідно вибирати ту, за допомогою якої оцінка визначається з найменшою власною дисперсією.

Вимога переконливості (російською мовою — «состоятельности») означає, що оцінка з ростом T повинна безперервно наблизитись до числової характеристики, що дає право зупиняти обчислення варіантів оцінки, як тільки вони перестають відрізнятися один від одного у заданих межах.

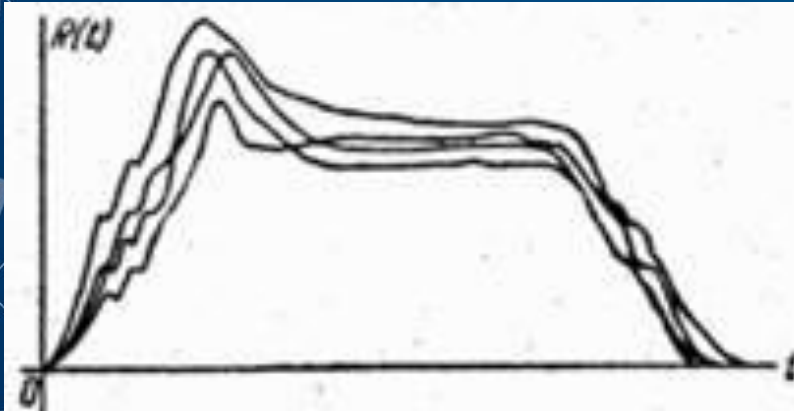
Стаціонарно зв'язані випадкові функції

Означення. Стаціонарно зв'язаними називають дві випадкові функції $X(t)$ і $Y(t)$, якщо їх взаємна кореляційна функція залежить тільки від різниці аргументів $\tau = t_2 - t_1$:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = r_{xy}(\tau).$$

Взаємна кореляційна функція стаціонарно зв'язаних випадкових функцій має наступну властивість:

$$r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau).$$



Диференціювання стаціонарного випадкового процесу

$l(t) = X'(t)$, X — стаціонарний
випадковий процес.

Теорема.
Перша
похідна від
стаціонарного
процесу, є
стаціонарним
випадковим
процесом.

Всі умови Хінчина
виконуються. Тобто
диференціювання
стаціонарного процесу
приводить до
стаціонарного процесу.

Інтегрування стаціонарного випадкового процесу

Нехай випадковий процес інтегруємо,

– ядро, при цьому процес – стаціонарний у широкому розумінні, тобто

тобто умови стаціонарності порушуються.

Якщо вважати, що – центрований, тобто, то $\Rightarrow$ Цей інтеграл у загальному виді не повинний залежати від

Звичайно існують умови, при виконанні яких інтегрування стаціонарного процесу приводить до стаціонарного процесу.

та характеристики випадкового процесу наступні:

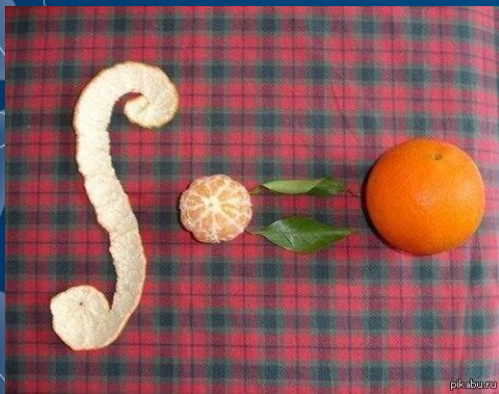
Інтегрування стаціонарного випадкового процесу

Доведення

$$\begin{aligned} K_{\eta}(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} A(t_1 - u) A(t_2 - v) K_X(u, v) du dv = \\ &= \int_{u=t_1-z}^{u=t_1-z} \int_{v=t_2-w}^{v=t_2-w} u - v = (t_1 - z) - (t_2 - w) = (t_1 - t_2) - (z - w) = \end{aligned}$$

$$E(\eta(t)) = \int_{-\infty}^t A(t, s) E(X(s)) ds = 0$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} (A(z) A(w) K_X(t_1 - t_2) - (z - w)) dz dw = \\ &= K_X(t_1 - t_2) = K_X(\tau) = K_X(-\tau) \end{aligned}$$



Що і треба було довести.

Кореляційні функції та спектральні густини стаціонарних випадкових процесів

Для оцінювання лінійного зв'язку між двома значеннями x_1, x_2 випадкового процесу $X(t)$ у момент часу t_1 та t_2 математики ввели таку характеристику, як кореляційна функція $K_x(t_1, t_2)$, яку визначають як

$$K_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x(t_1))(x_2 - m_x(t_2)) \cdot f(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2, (*)$$

де $f(x_1, x_2, t_1, t_2)$ — двовимірна густина ймовірностей випадкового процесу $X(t)$, котра визначається у моменти часу t_1, t_2 , відносно яких випадковий процес $X(t)$ можна розглядати як систему двох випадкових величин X_1 та X_2 , значеннями x_1 та x_2 яких є значення $x(t_1), x(t_2)$ реалізацій випадкового процесу, зафіксовані у моменти часу t_1, t_2 :

$$f(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Кореляційні функції та спектральні густини стаціонарних випадкових процесів

$F(x_1, x_2, t_1, t_2)$ — двовимірна функція розподілу ймовірностей випадкового процесу $X(t)$, яка задає значення ймовірності того, що у момент t_1 виконується нерівність $X_1 \leq x_1$, а у момент t_2 виконується нерівність $X_2 \leq x_2$, тобто

$$F(x_1, x_2, t_1, t_2) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2). (*)$$

Формула (*) грає не стільки практичну, скільки загальнотеоретичну роль, оскільки на практиці ніхто не проводить оцінювання функцій $f(x_1, x_2, t_1, t_2)$ та $F(x_1, x_2, t_1, t_2)$ за експериментальними даними.

Кореляційні функції та спектральні густини стаціонарних випадкових процесів

Формула (*) навіть у теоретичному плані спрощується для стаціонарного випадкового процесу $X(t)$, для якого двовимірною густиною f та функцією розподілу F ймовірностей залежать не від конкретних значень t_1, t_2 моментів часу t , а лише від їх різниці $\tau = t_1 - t_2$, тобто

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, t_1, t_2) = f(x_1, x_2, \tau) \\ F(x_1, x_2, t_1, t_2) = F(x_1, x_2, \tau) \end{cases} (**)$$

З урахуванням (**), формула для кореляційної функції стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ набуває вигляду:

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x)(x_2 - m_x) \cdot f(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 (\bullet)$$

кореляційні функції та спектральні густини стаціонарних випадкових процесів

Але і формулу (•) у практичних розрахунках теж не використовують, оскільки оцінку двовимірної густини ймовірностей $f(x_1, x_2, \tau)$ за експериментальними даними визначати непросто.

Набагато простішим є визначення кореляційної функції $K_x(\tau)$ стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ з використанням властивості ергодичності, згідно з якою оцінка кореляційної функції $K_x^*(\tau)$ може бути визначена як

$$K_x^*(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} (x^*(t) - m_x) \cdot (x^*(t + \tau) - m_x) dt, (\bullet\bullet)$$

де T — відрізок часу, протягом якого фіксується реалізація $x^*(t)$ випадкового процесу $X(t)$.

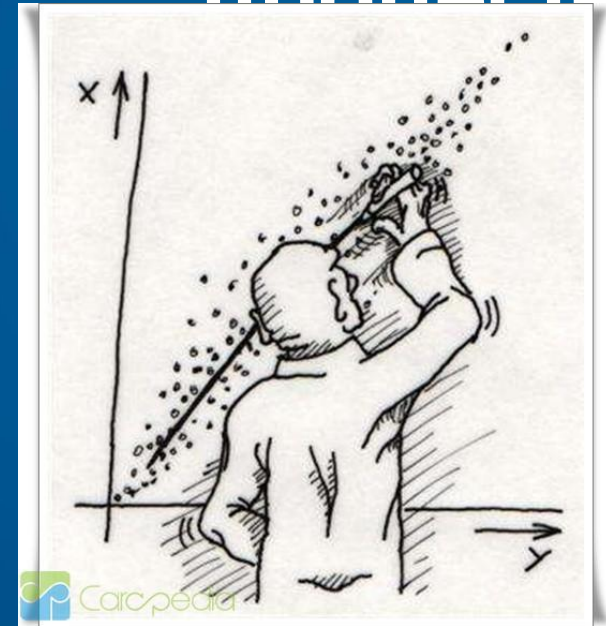
Очевидно, що чим більшим є значення T , тим точніше оцінка $K_x^*(\tau)$ відображає кореляційну функцію $K_x(\tau)$.

кореляційні функції та спектральні густини стаціонарних випадкових процесів

Доведено, що для ергодичного випадкового процесу:

$$K_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} K_x^*(\tau), (\diamond\diamond)$$

що дає право за оцінку $K_x^*(\tau)$ кореляційної функції $K_x(\tau)$ брати будь-яку функцію, отриману за допомогою формули (••).



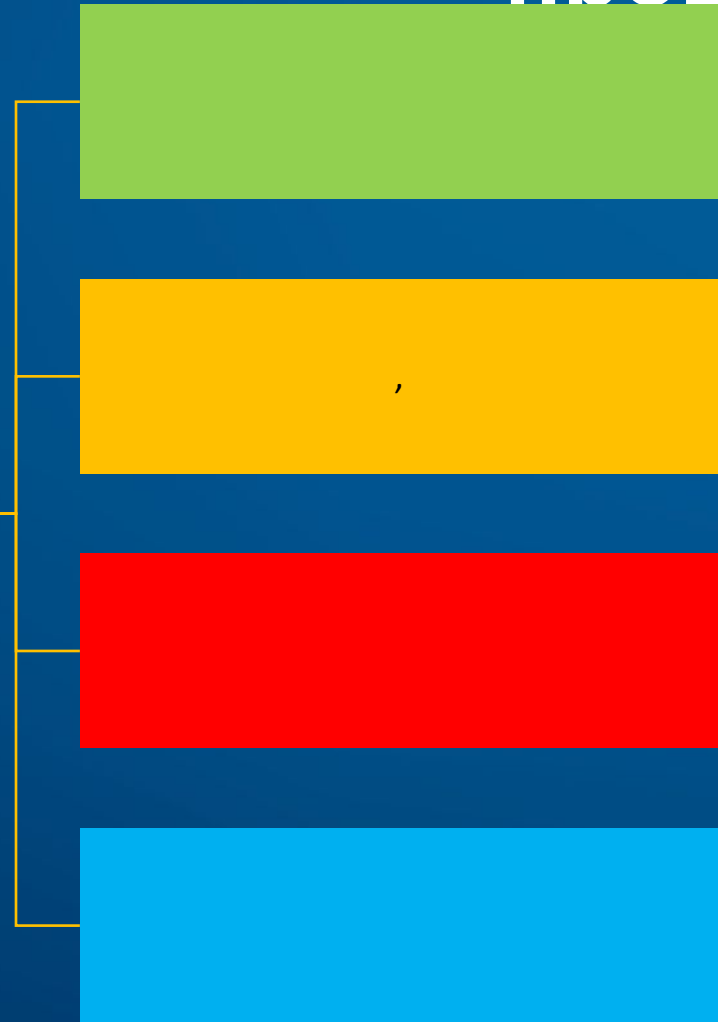
Оскільки результати інтегрування у формулі (••) не залежать від того, вправо чи вліво на τ «зсувається» реалізація $x^*(t)$, то справедливим є вираз

$$K_x(\tau) = K_x(-\tau),$$

який констатує той факт, що кореляційна функція випадкового процесу є симетричною відносно осі ординат.

Кореляційні функції та спектральні густини стаціонарних випадкових процесів

При виконанні практичного аналізу центрованих ергодичних випадкових процесів, які мають місце при розв'язанні інженерних задач, найбільше розповсюдження отримали чотири моделі кореляційних функцій цих процесів, а саме:



кореляційні функції та спектральні густини стаціонарних випадкових процесів

Приклади графіків кореляційних функцій, заданих моделями (Δ) та $(\Delta\Delta)$, показані на рис.2.

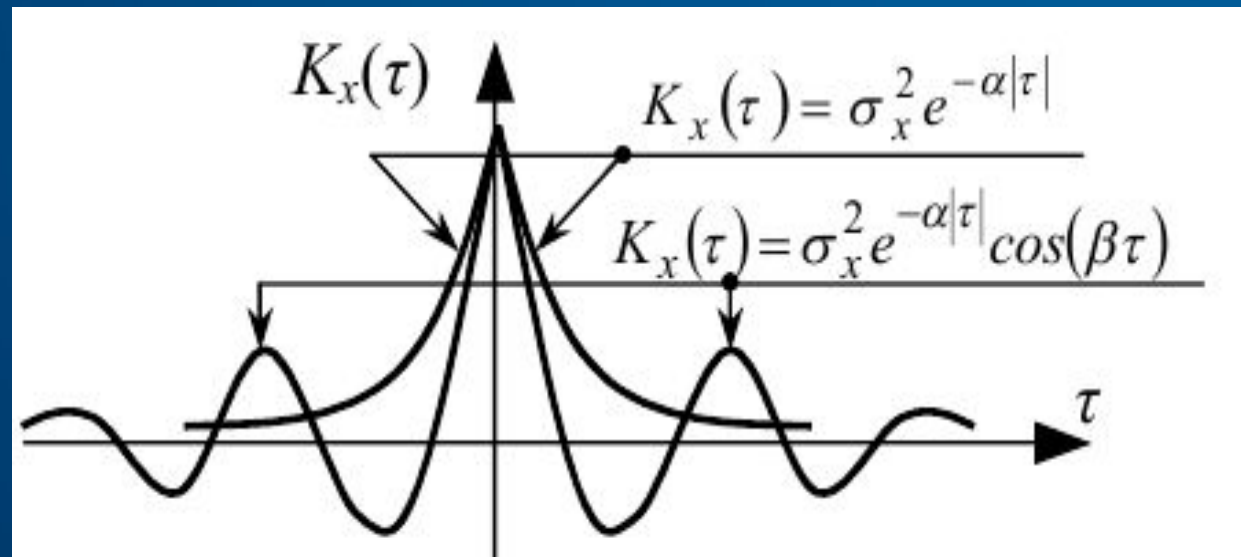


Рис.2. Приклади графіків кореляційних функцій
ергодичних випадкових процесів

кореляційні функції та спектральні густини стаціонарних випадкових процесів

Для характеристики усередненого лінійного зв'язку між значеннями випадкового процесу $X(t)$ у часовому перерізі t_1 та випадкового процесу $Y(t)$ у часовому перерізі t_2 (рис.3.) математики вводять таку характеристику, як взаємна кореляційна функція $K_{yx}(t_1, t_2)$, для якої справедливим є вираз

$$K_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x(t_1)) \cdot (y_2 - m_y(t_2)) \cdot f(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2,$$

Де

$$f(x_1, y, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, y_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial y_2}$$

$$F(x_1, y_2, t_1, t_2) = P(X(t_1) \leq x_1, Y(t_2) \leq y_2)$$

Відповідно, двовимірні взаємні густина f та функція розподілу F ймовірностей процесів $X(t)$ та $Y(t)$.



кореляційні функції та спектральні густини стаціонарних випадкових процесів

Для стаціонарних випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$ за аналогією з $(\diamond), (**), (\bullet)$ маємо:

$$\begin{cases} f(x_1, y_2, t_1, t_2) = f(x_1, y_2, \tau) \\ F(x_1, y_2, t_1, t_2) = F(x_1, y, \tau) \end{cases}$$
$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x) \cdot (y_2 - m_y) \cdot f(x_1, x_2, \tau) dx_1 dy_2,$$

а для ергодичних випадкових процесів за аналогією з $(\bullet\bullet), (\diamond\diamond)$:

$$K_{yx}^*(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} (y^*(t) - m_{yx}) \cdot (x^*(t + \tau) - m_x) dt,$$
$$K_{yx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} K_{yx}^*(\tau).$$

Кореляційні функції та спектральні густини стаціонарних випадкових процесів

τ^* можна використовувати як одну з характеристик інерційних властивостей системи, що продукує процес $Y(t)$ у відповідь на вхідний для неї процес $X(t)$. Якщо застосувати до кореляційної функції $K_x(\tau)$ перетворення Фур'є, тобто взяти інтеграл

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, (\blacksquare \blacksquare)$$

тоді отримаємо іншу характеристику стаціонарного випадкового процесу, яку називають його *спектральною густиною* $S_x(\omega)$, оскільки вона характеризує щільність спектра частот гармонічних складових з випадковими значеннями амплітуди і фази, сукупністю яких можна задати даний процес.

Для прикладу отримаємо спектральну густину стаціонарного випадкового процесу $X(t)$, який має кореляційну функцію (Δ) .

кореляційні функції та спектральні густини стаціонарних випадкових процесів

Підставивши (Δ) у (■ ■), отримаємо

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^0 \sigma_x^2 e^{\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} \sigma_x^2 e^{-\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \sigma_x^2 \int_{-\infty}^0 e^{\tau(\alpha-j\omega)} d\tau + \sigma_x^2 \int_0^{\infty} e^{-\tau(\alpha+j\omega)} d\tau = \\ &= \frac{\sigma_x^2}{\alpha-j\omega} e^{\tau(\alpha-j\omega)} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{\sigma_x^2}{-(\alpha+j\omega)} e^{-\tau(\alpha+j\omega)} \Big|_0^{\infty} = \frac{\sigma_x^2}{\alpha-j\omega} + \frac{\sigma_x^2}{(\alpha+j\omega)} = \\ &= \frac{2\sigma_x^2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

кореляційні функції та спектральні густини стаціонарних випадкових процесів

На рис.4. показані два графіки кореляційних функцій $K_x(\omega)$ при $\sigma_x^2 = 1$ та $\alpha = 1$ і $\alpha = 2$ (рис.4, а), а також два графіки спектральних густин $S_x(\omega)$ для цих же значень σ_x^2 і ω (рис.4., б).

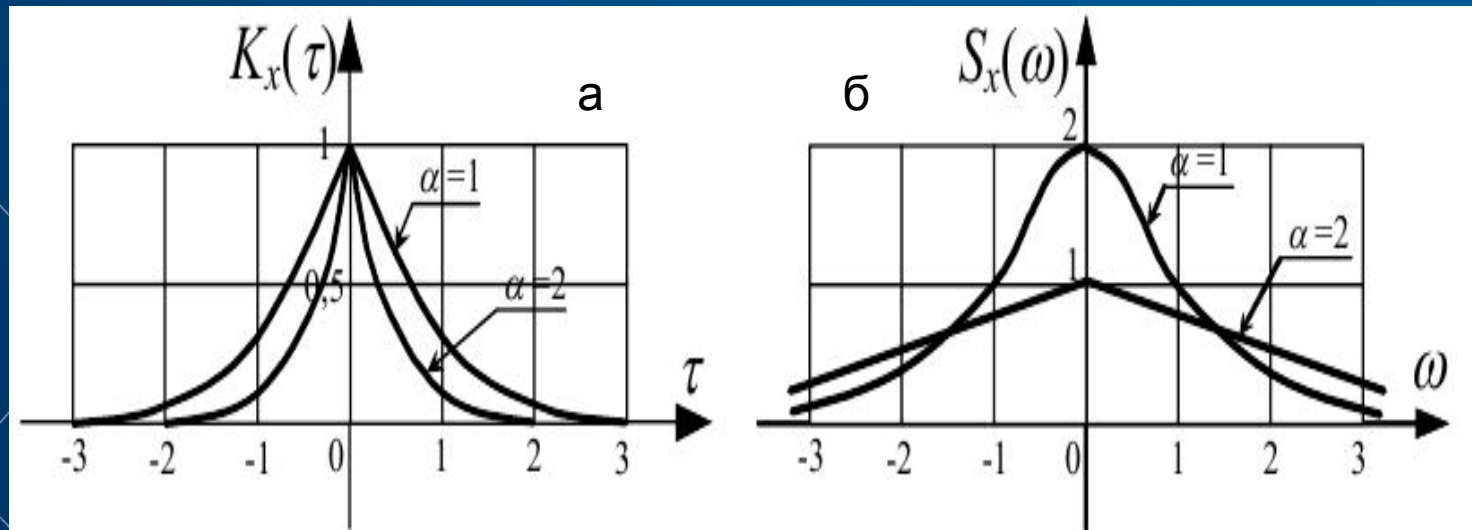
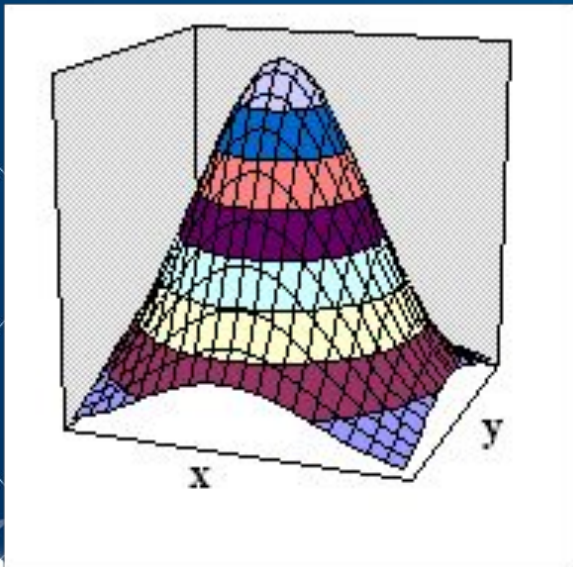


Рис.4. Приклади графіків кореляційних функцій $K_x(\tau)$ стаціонарних випадкових процесів та їх спектральних густин $S_x(\omega)$

Кореляційні функції та спектральні густини стаціонарних випадкових процесів

Перетворюючи за Фур'є взаємну кореляційну функцію $K_{xy}(\omega)$ стаціонарних випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$, отримаємо взаємну спектральну густину $S_{yx}(j\omega)$ цих процесів, тобто

$$S_{yx}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{yx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$



яка, на жаль, вже буде комплексною функцією, оскільки підінтегральна функція у $S_{yx}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{yx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$ $K_{yx}(\tau)$ не є симетричною відносно осі ординат

Кореляційні функції та спектральні густини стаціонарних випадкових процесів

Особливу роль під час аналізу випадкових процесів має стаціонарний процес $X(t)$ з нульовим середнім $m_x = 0$, жодна із гармонічних складових якого не корелюється ні з якою іншою складовою, крім самої себе.

Кореляційну функцію такого процесу можна задати у вигляді

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 \delta(\tau) (\because)$$

де $\delta(t)$ — дельта-функція Дірака, яка, нагадаємо для зручності, має такі властивості:

$$1) \delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{якщо } t = 0 \\ 0, & \text{якщо } t \neq 0 \end{cases}, \quad 2) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Кореляційні функції та спектральні густини стаціонарних випадкових процесів

Якщо підставити $(\because)$ у $(\blacksquare \blacksquare)$, то отримаємо:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x^2 \delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \sigma_x^2 e^{-j\omega \cdot 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = \sigma_x^2 (\because \because)$$

Із $(\because \because)$ випливає, що спектр цього процесу є рівномірним від $-\infty$ до $+\infty$, тобто у сигналі присутні всі частоти з амплітудами випадковими, але такими, які забезпечують дисперсію процесу в усіх часових перерізах на рівні σ_x^2 . Процес із визначеними у такий спосіб властивостями називають **білим шумом**.

Властивості кореляційної функції стаціонарної функції

Властивість 1

Кореляційна функція стаціонарної випадкової функції є парна функція:

$$k_x(\tau) = k_x(-\tau).$$

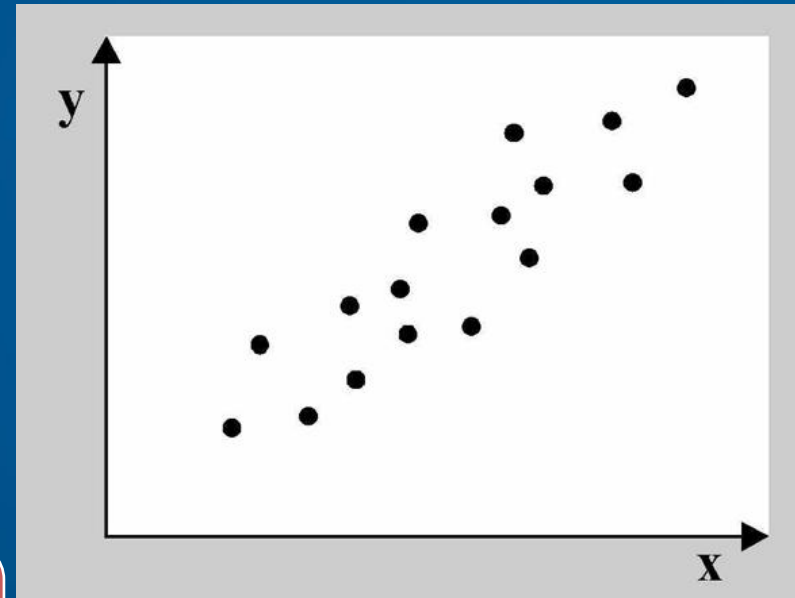
Властивість 2

Абсолютна величина кореляційного функції стаціонарної випадкової функції не перевищує її значення в початку координат:

$$|k_x(\tau)| \leq k_x(0)$$

Нормована кореляційна функція стаціонарної функції

Означення. Нормованою кореляційною функцією стаціонарної випадкової функції називають не випадкову функцію аргументу τ :



Абсолютна величина нормованої кореляційної функції стаціонарної випадкової функції не перевищує одиниці

Кореляційна функція похідної та інтеграла стаціонарної функції

Теорема 1

- Кореляційна функція похідної $X'(t)$ диференційованої стаціонарної випадкової функції $X(t)$ дорівнює другій похідній від її кореляційної функції, взятої зі знаком мінус:

Теорема 2

- Взаємна кореляційна функція диференційованої стаціонарної випадкової функції $X(t)$ і її похідної $X'(t)$ дорівнює першій похідній від кореляційної функції $k_X(\tau)$, взятої зі своїм (протилежним) знаком, якщо індекс стоїть на другому (першому) за порядком місці
- Передбачається, що $\tau = t_2 - t_1$.
- Оскільки взаємна кореляційна функція залежить тільки від τ , то стаціонарна випадкова функція і її похідна стаціонарно зв'язані.

Кореляційна функція похідної та інтеграла стаціонарної функції

Теорема

- Кореляційна функція інтеграла від стаціонарної випадкової функції дорівнює:
- **Наслідок** Дисперсія інтеграла від стаціонарної випадкової функції дорівнює:

