

Теория вероятностей

Определение: *Случайной величиной* называется величина, которая в результате опыта примет одно и только одно возможное значение, при этом заранее неизвестно, какое именно.

Определение: *Дискретной* называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные значения.

Определение: *Законом распределения* ДСВ называется соотношение между ее возможными значениями и их вероятностями (т. е. вероятностями, с которыми случайная величина принимает эти возможные значения).

Закон распределения может быть задан формулой (формулы Бернулли, Пуассона и др.), таблицей или графиком, а также функцией распределения.

x_i	x_1	x_2	\dots	x_n
P_i	p_1	p_2	\dots	p_n

Определение: *Математическое ожидание* ДСВ находится по формуле:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Определение: *Дисперсия* случайной величины X есть $D(X) = M(X)^2 - (M(X))^2$

Для более наглядной характеристики рассеивания удобнее пользоваться величиной, имеющей размерность самой случайной величины. Поэтому вводится понятие среднего квадратического отклонения: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

Пример. Построить ряд распределения случайной величины ξ числа выпадений орла при трех подбрасываниях монеты

Решение. Случайная величина ξ может принять четыре различных значения: 0, 1, 2, 3. Найдем вероятности этих значений по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

$$x_1 = 0 \quad P(X = x_1) = C_3^0 (1/2)^0 \cdot (1/2)^3 = 1/8$$

$$x_2 = 1 \quad P(X = x_2) = C_3^1 (1/2)^1 \cdot (1/2)^2 = 3/8$$

$$x_3 = 2 \quad P(X = x_3) = C_3^2 (1/2)^2 \cdot (1/2)^1 = 3/8$$

$$x_4 = 3 \quad P(X = x_4) = C_3^3 (1/2)^3 \cdot (1/2)^0 = 1/8$$

Следовательно, ряд распределения:

<i>X</i>	<i>0</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
<i>P</i>	<i>1/8</i>	<i>3/8</i>	<i>3/8</i>	<i>1/8</i>

Пример: Случайная величина X задана функцией распределения. Найти вероятность p_3 . Построить функцию распределения. Найти числовые характеристики СВ

x	1	2	3	4
$p(x)$	0,2	0,3	P_3	0,1

Решение:

Проверим тождество $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

$$0,2 + 0,3 + p_3 + 0,1 = 1.$$

$$p_3 = 0,4.$$

Построим функцию распределения этой случайной величины. Имеем:

$$\text{при } x \leq 1 \quad F(x) = P(X < x) = P(\emptyset) = 0;$$

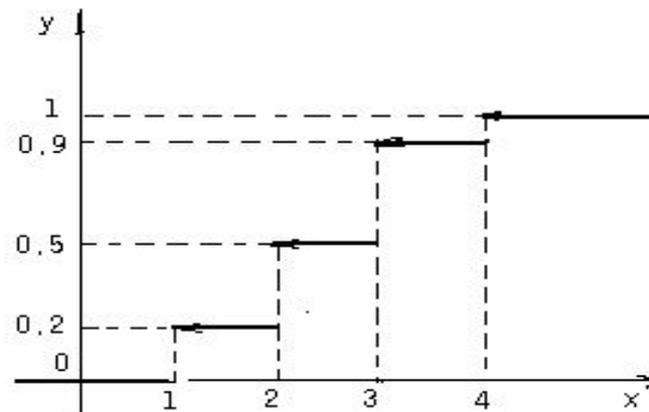
$$\text{при } 1 < x \leq 2 \quad F(x) = P(X < x) = P(X = 1) = 0,2;$$

$$\text{при } 2 < x \leq 3 \quad F(x) = P(X < x) = P(X = 1, X = 2) = 0,2 + 0,3 = 0,5;$$

$$\text{при } 3 < x \leq 4 \quad F(x) = P(X < x) = P(X = 1, X = 2, X = 3) = 0,2 + 0,3 + 0,4 = 0,9;$$

$$\text{при } x > 4 \quad F(x) = P(X < x) = P(X = 1, X = 2, X = 3, X = 4) = 0,2 + 0,3 + 0,4 + 0,1 = 1.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ 0.2, & 1 < x \leq 2; \\ 0.5, & 2 < x \leq 3; \\ 0.9, & 3 < x \leq 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$



Пример: Случайная величина X задана функцией распределения

x	1	2	3	4
$p(x)$	0,2	0,3	p_3	0,1

Найти вероятность p_3 . Найти числовые характеристики СВ

Решение:

Проверим тождество $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

$$0,2 + 0,3 + p_3 + 0,1 = 1.$$

$$p_3 = 0,4.$$

Найдем числовые характеристики случайной величины X :

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

$$M(X) = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,1 = 0,2 + 0,6 + 1,2 + 0,4 = 2,4.$$

Для вычисления дисперсии применим формулу: $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$

$$M(X^2) = 1^2 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,3 + 3^2 \cdot 0,4 + 4^2 \cdot 0,1 = 0,2 + 1,2 + 3,6 + 1,6 = 6,6.$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 6,6 - (2,4)^2 = 0,84$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,84} \approx 0,916.$$

Пример. Два стрелка стреляют по мишени, делая по два выстрела каждый. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго - 0,6. Построить ряд распределения случайной величины X – общего числа попаданий в мишень. Найти числовые характеристики этой случайной величины.

Решение: СВ X - общее число попаданий в мишень может быть: $x_1=0, x_2=1, x_3=2, x_4=3, x_5=4$.

$x_1=0$. когда произойдет событие C - ни один из стрелков не попал в мишень.

Событие C произойдет в том случае, если одновременно произойдут следующие четыре события:

A_1 - 1-й стрелок не попал в мишень при первом выстреле;

A_2 - 1-й стрелок не попал в мишень при втором выстреле;

B_1 - 2-й стрелок не попал в мишень при первом выстреле;

B_2 - 2-й стрелок не попал в мишень при втором выстреле.

$$C = A_1 \cdot A_2 \cdot B_1 \cdot B_2 \quad P(C) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(B_1) \cdot P(B_2)$$

$$P(A_1) = P(A_2) = 1 - 0,7 = 0,3; \quad P(B_1) = P(B_2) = 1 - 0,6 = 0,4$$

$$P(X=0) = P(C) = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,0144.$$

Аналогично подсчитываем и другие вероятности:

$$P(X=1)=0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,1104.$$

$$P(X=2)=0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,4 + 4 \cdot (0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,4) = 0,3124.$$

$$P(X=3)=0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,3864.$$

$$P(X=4)=0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,6 = 0,1764.$$

Составим ряд распределения случайной величины X .

x_i	0	1	2	3	4
P_i	0,0144	0,1104	0,3124	0,3864	0,1764

Проверим тождество $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

$$0,0114 + 0,1104 + 0,3124 + 0,3864 + 0,1764 = 1.$$

Пример. Закон распределения дискретной случайной величины X имеет вид:

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,2	0,1	0,2	p_4	p_5

Найти вероятности p_4 , p_5 и дисперсию $D(X)$, если математическое ожидание $M(X) = 0,1$

Решение: случайная величина X может принимать только пять значений, соответствующие события образуют полную группу, поэтому:

$$\begin{aligned}p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 &= 1 \\0,2 + 0,1 + 0,2 + p_4 + p_5 &= 1 \\p_4 + p_5 &= 0,5\end{aligned}$$

По определению математического ожидания:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5$$

$$0,1 = -2 \cdot 0,2 - 1 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,2 + p_4 + 2p_5$$

$$p_4 + 2p_5 = 0,6$$

Вероятности p_4 и p_5 найдем из решения системы:

$$\begin{cases} p_4 + p_5 = 0,5 \\ p_4 + 2p_5 = 0,6 \end{cases} \Rightarrow p_5 = 0,1$$

$$p_4 = 0,5 - p_5 = 0,5 - 0,1 = 0,4$$

Для нахождения дисперсии заполним вспомогательную расчетную таблицу:

x_i	-2	-1	0	1	2	Суммы:
p_i	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1	1
x_i^2	4	1	0	1	4	
$x_i^2 p_i$	0,8	0,1	0	0,4	0,4	1,7

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \sum x_i^2 p_i - (0,1)^2 = 1,7 - 0,01 = 1,69$$

Ответ: $p_4 = 0,4$, $p_5 = 0,1$, $D(X) = 1,69$

Пример Случайная величина X задана функцией распределения. Найти вероятность p_4 . Построить функцию распределения. Найти числовые характеристики СВ

x	2	4	10	6	8
p(x)	0,1	0,4	0,1	P_4	0,1

Решение:

Проверим тождество $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Пример. Случайная величина подчиняется закону распределения

x	1	2	3	4	5
p(x)	0,1	0,3	0,15	P_4	0,2

Найти вероятность p_4 . Найти числовые характеристики СВ X .