

Векторы и их применение при доказательстве теорем.



Выполнила: учитель математики
МБОУ «Дедиловская СОШ»
Соловьева Надежда Юрьевна



Цели и задачи презентации:

- познакомиться с историей возникновения векторов;
- повторить основные понятия и действия над векторами;
- рассмотреть доказательство теорем векторным методом.

The image features a parchment scroll with a torn, aged edge, set against a background of more parchment and a quill pen. The scroll is unrolled, revealing a piece of paper with text. The text is in a bold, black, sans-serif font. The scroll is held by two wooden rollers on the left and right. A quill pen and an inkwell are visible in the bottom left corner. Three blue arrows point from the bottom left towards the text on the scroll.

**Интерес к векторам и векторному
исчислению пробудился у математиков
в XIX. в. в связи с потребностями
механики и физики. Впервые вектора
были введены в работах У.
Гамильтона и Г. Гроссмана. Однако
исток и исчисления с направленными
отрезками возникли в далеком
прошлом.**

The image features a central scroll with a light-colored, aged paper surface, set against a background of dark brown, textured leather. The scroll is unrolled, showing its edges and the texture of the paper. In the bottom left corner, there is a small, dark inkwell and a quill pen with a reddish-brown feather. The text on the scroll is in a bold, black, serif font, arranged in six lines. The text discusses the discovery of irrational numbers by the Pythagoreans in ancient Greece and their reluctance to expand the definition of numbers.

**В Древней Греции
пифагорейцы, открыв
иррациональные числа,
которые нельзя выразить
дробями (например: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$
и др.), не решились ввести более
широкое толкование числа.**

**Математики того времени
попытались свести вопросы
арифметики и алгебры к решению
задач геометрическим путем.
Таким образом, было положено
начало геометрической теории
отношений Евдокса (408 – 355
гг. до н.э.), а позднее
«геометрической алгебре».**



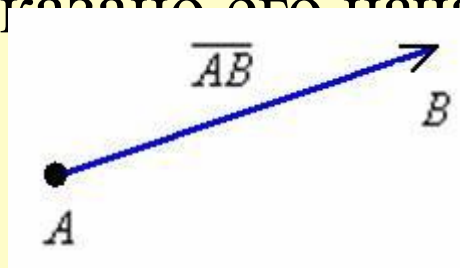
**В геометрическом исчислении,
изложенном в труде Евклида
«Начала», сложение и вычитание
сводились к сложению и вычитанию
отрезков, а умножение – к построению
прямоугольников на отрезках,
соответствующих по длине
множителям.**



**Фламандский ученый С. Стевин
в своем трактате «Начала
статики» рассматривая сложение
сил, приходит к выводу, что для
нахождения результата сложения
двух сил, действующих под углом
 90° , необходимо воспользоваться
«параллелограммом сил», при
этом для обозначения сил он ввел
стрелки.**

Продолжительное время вектор рассматривался только как направленный отрезок, один из концов которого называли началом, а второй – его концом. С разработкой теории преобразований вектор стали рассматривать не только как направленный отрезок, но и как параллельный перенос, заданный парой точек – точкой O и ее образом O' .

Вектором называется направленный отрезок, для которого указано его начало и конец:



В данном случае началом отрезка является точка **A**, концом отрезка – точка **B**. Сам вектор обозначен через $\overrightarrow{AB}$. **Направление** имеет существенное значение, если переставить стрелку в другой конец отрезка, то получится вектор $\overrightarrow{BA}$, и это уже **совершенно другой вектор**.

Отдельные точки плоскости, пространства удобно считать так называемым *нулевым вектором* . У такого вектора конец и начало совпадают.

1) Векторы можно записать двумя большими латинскими буквами: $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{EF}$ $\overrightarrow{GH}$ $\overrightarrow{IJ}$

и так далее. При этом первая буква **обязательно** обозначает точку - начало вектора, а вторая буква точку - конец вектора.

2) Векторы также записывают маленькими латинскими буквами: $\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$ $\vec{d}$ $\vec{e}$ $\vec{f}$ $\vec{g}$ $\vec{h}$ $\vec{i}$ $\vec{j}$

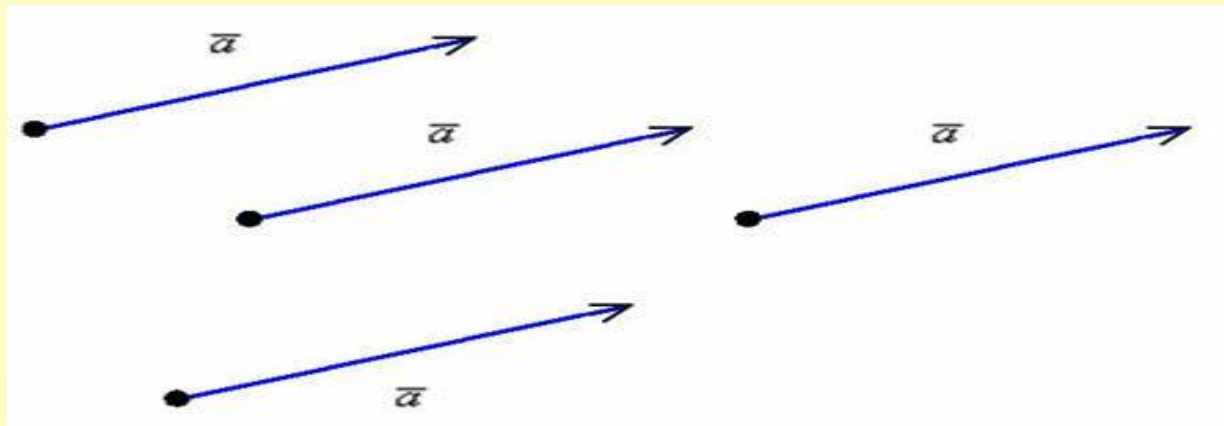
В частности, вектор $\overrightarrow{a}$ можно для краткости переобозначить маленькой латинской буквой $\vec{a}$.

Длиной или *модулем* ненулевого вектора $\vec{AB}$ называется длина отрезка АВ. Длина нулевого вектора $\vec{0}$ равна нулю.

Длина вектора обозначается знаком модуля: $|\vec{a}|$,

В аналитической геометрии рассматривается *свободный вектор*.

Это – вектор, который можно отложить от любой точки:



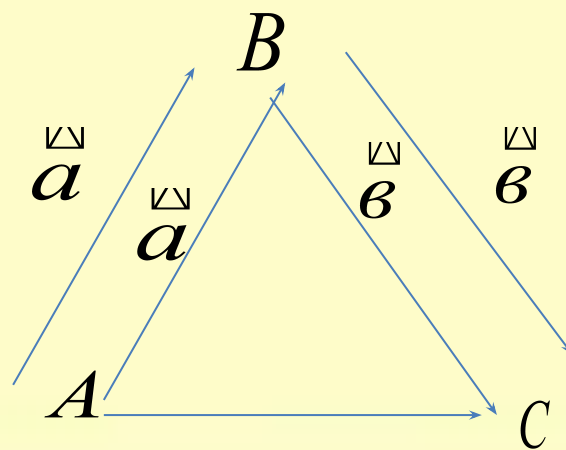
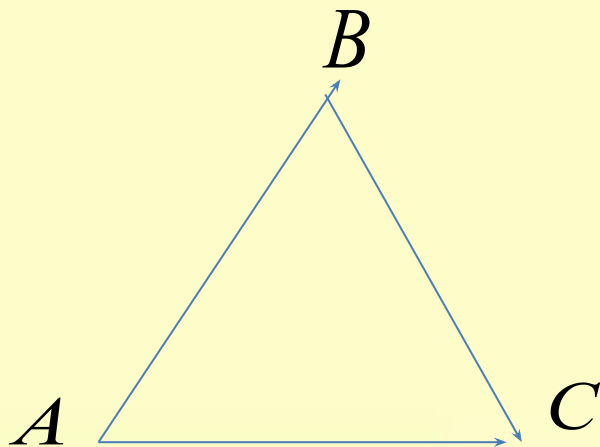
Два вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Если два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то они могут быть направлены либо одинаково, либо противоположно.

В первом случае векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **сонаправленными**, а во втором — **противоположно направленными**.

Сложение векторов по правилу треугольников

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - два вектора. Отметим произвольную точку A и отложим от этой точки вектор $\vec{AB}$, равный $\vec{a}$. Затем от точки B отложим вектор $\vec{BC}$, равный $\vec{b}$. Вектор $\vec{AC}$ называется суммой векторов $\vec{a} + \vec{b}$.



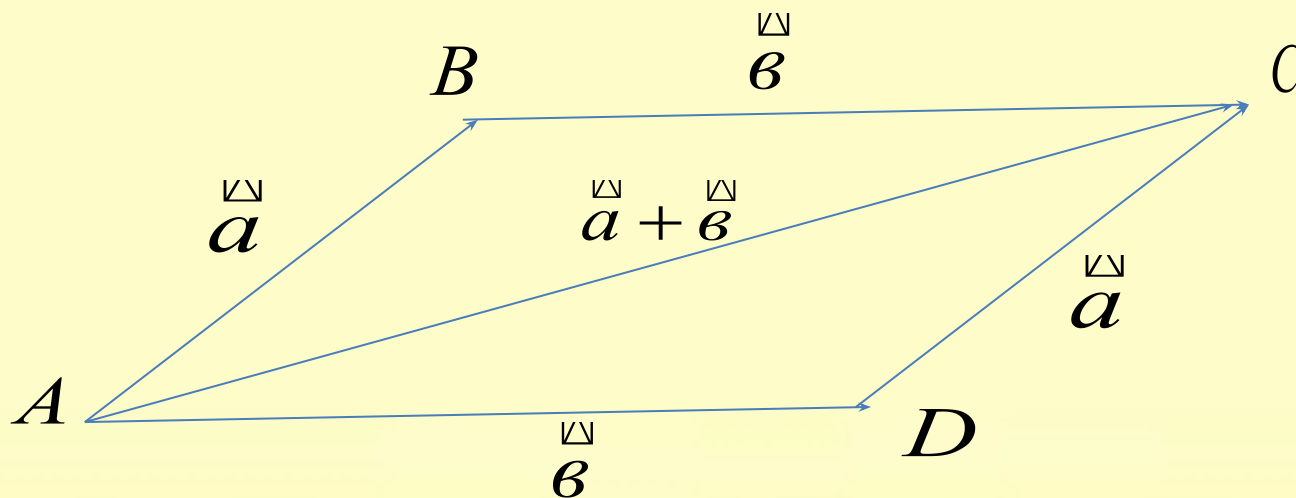
Сложение векторов по правилу параллелограмма.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны.

От произвольной точки A отложим векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ и на этих векторах построим параллелограмм $ABCD$

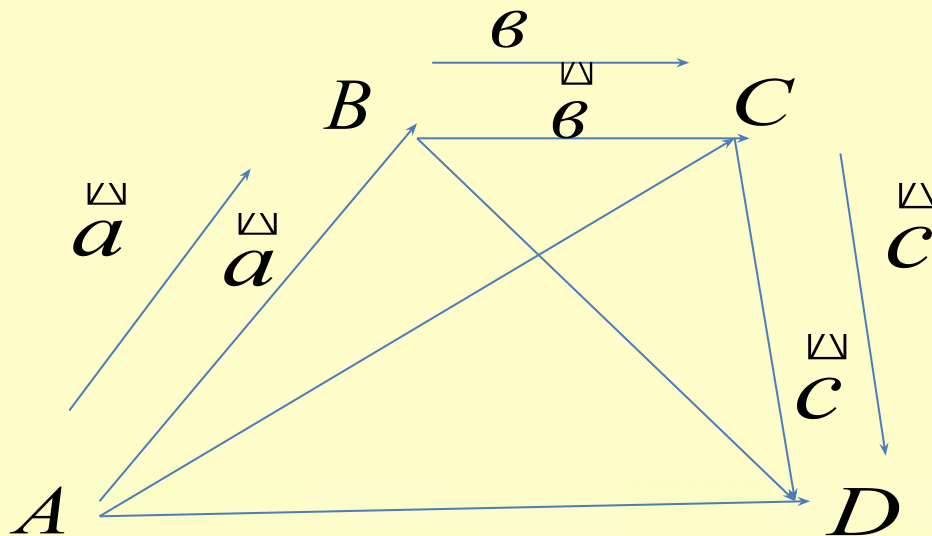
По правилу треугольника $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Аналогично $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{b} + \vec{a}$.



Сумма нескольких векторов.

Сложение нескольких векторов производится следующим образом: первый вектор складывается со вторым, затем их сумма складывается с третьим вектором и т.д. Из закона сложения векторов следует, что сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.



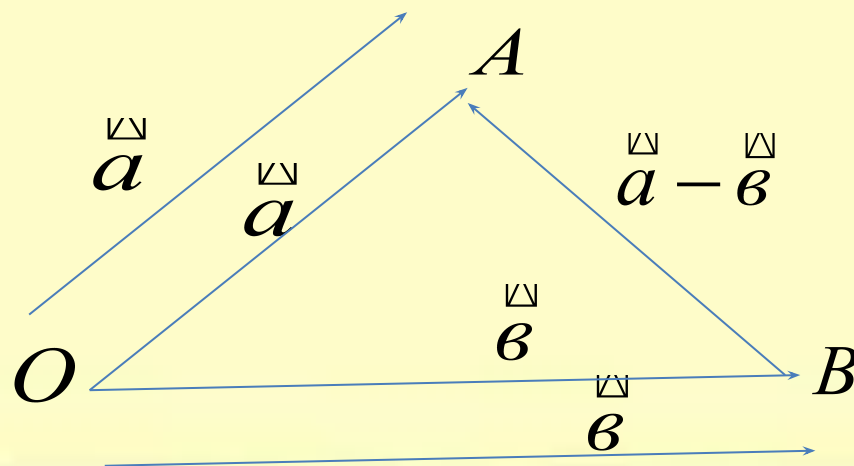
Вычитание векторов.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} - \vec{b}$.

Отметим на плоскости произвольную точку O и отложим от этой точки векторы $\vec{OA} = \vec{a}$ и $\vec{OB} = \vec{b}$.

По правилу треугольника $\vec{OB} + \vec{BA} = \vec{OA}$ или $\vec{b} + \vec{BA} = \vec{a}$.



Произведение вектора на число

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число λ является такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, причём векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $\lambda \geq 0$ и противоположно направлены при $\lambda < 0$.

Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов

называется произведение их длин на косинус угла между ними.

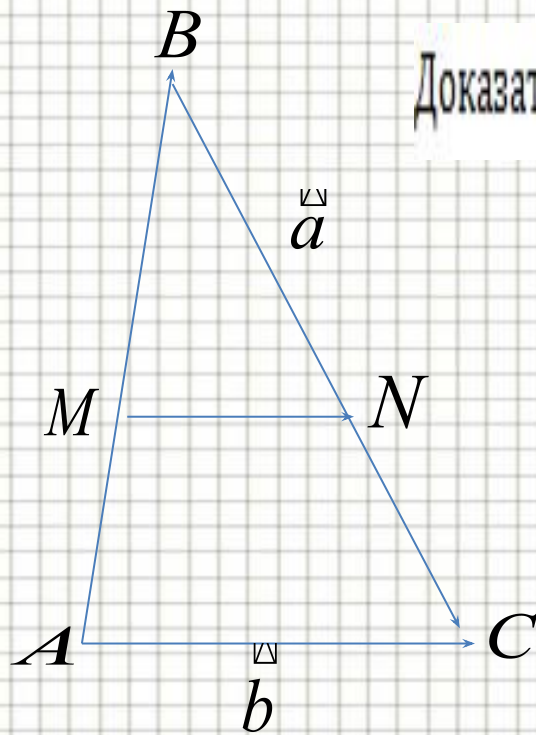
Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

По определению

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a} \hat{=} \vec{b}).$$

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

Теорема. Средняя линия треугольника параллельна его третьей стороне и равна половине ее.



Доказательство. Рассмотрим $\triangle ABC$. Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, и $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$,
тогда по определению суммы векторов: $\vec{c} + \vec{a} = \vec{b}$.

Пусть M и N – середины сторон AB и BC $\triangle ABC$, тогда

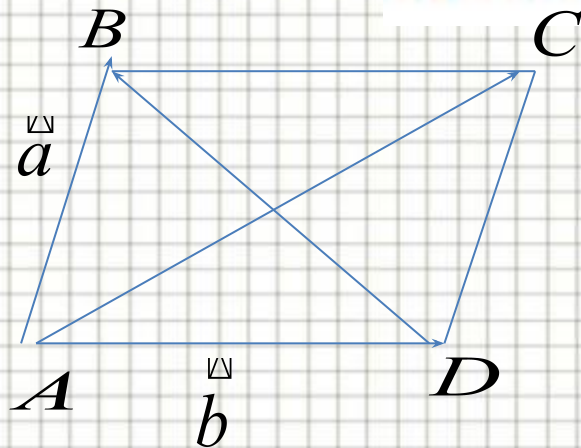
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{\vec{c}}{2} + \frac{\vec{a}}{2} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{b}.$$

Так как $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{b}$, то $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Таким образом, $MN \parallel AC$, следовательно, $[AC] \parallel [MN]$.

Так как $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, то $|MN| = \frac{1}{2}|AC|$.

Теорема. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна
сумме квадратов всех его сторон.



Доказательство. Пусть $ABCD$ – данный параллелограмм.

1. Положим $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ($|AB| = |CD| = a; |AD| = |BC| = b$).

2. По определению суммы и разности векторов $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$.

3. Используя свойство скалярного квадрата, получим:

$$AC^2 + DB^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 + \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2,$$

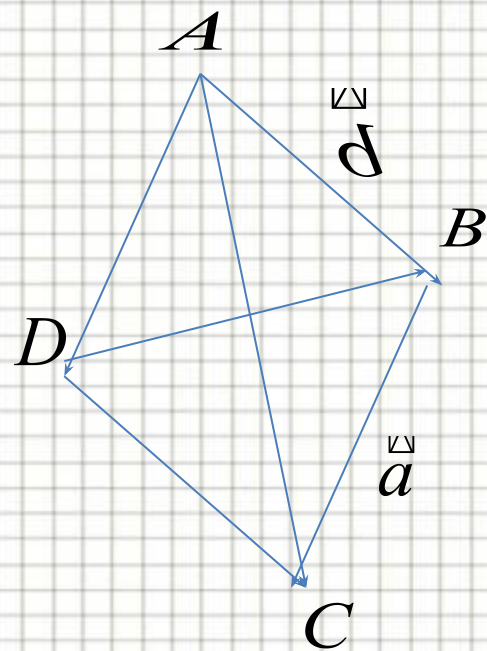
то есть $|AC|^2 + |DB|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |AD|^2,$

так как $\overrightarrow{AC}^2 = |AC|^2, \overrightarrow{DB}^2 = |DB|^2$

Теорема. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Доказательство. Пусть $ABCD$ – данный ромб.

Из определения ромба $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{b}$.



1. Введем обозначения: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

2. По определению суммы и разности векторов $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$.

3. Рассмотрим $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = a^2 - b^2$.

4. Так как стороны ромба равны, то $a = b$. Следовательно, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$.

Из последнего получаем: $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DB}$, то есть $[DB] \perp [AC]$.

Теорема. Диагонали прямоугольника равны между собой.

Доказательство. Пусть $ABCD$ – данный прямоугольник

1. Введя обозначения $AB = \vec{a}$ и $BC = \vec{b}$, получим $AC = \vec{a} + \vec{b}$; $DB = \vec{a} - \vec{b}$.

2. Найдем квадраты диагоналей, используя свойство скалярного произведения:

$$|\vec{AC}|^2 = |AC|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2,$$

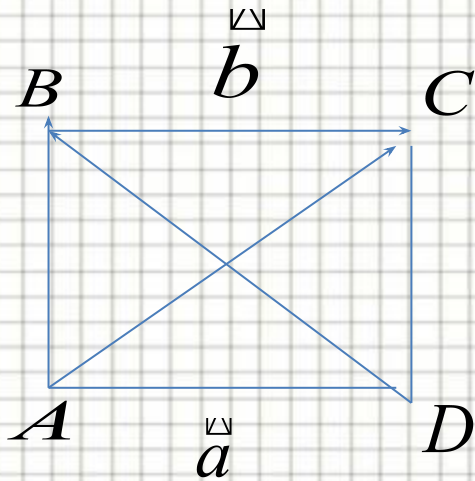
Итак, $|AC|^2 = a^2 + b^2$. Далее,

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, так как в прямоугольнике $\vec{a} \perp \vec{b}$.

$$|\vec{DB}|^2 = |DB|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = a^2 + b^2, \text{ так как } \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Следовательно, $|AC|^2 = |DB|^2 = a^2 + b^2$,

то есть $|AC| = |DB|$



Используемая литература и ССЫЛКИ

http://s_ob.mos.edu54.ru/p5aa1

<http://slalomum.ru/zakachay/ba...>

www.budiveline.info/logs » Шаблоны для школьных презентаций

<http://www.smarttehn.ru/port/...>



Геометрия: Учеб. Для 7 – 9 кл. общеобразоват. учреждений/ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 6-е изд. – М.: Просвещение, 1996.

Глейзер Г. И. История математики в школе в VII – IX кл.: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1981.

Энциклопедический словарь юного математика/
Сост. Э-68 А. П. Савин. - М.: Педагогика, 1989.