ГБОУ лицей-интернат
Центр одаренных детей

Программа элективного курса по алгебре « Геометрические места точек»

для 9 класса в рамках предпрофильной подготовки

Каткова Галина Геннадьевна- учитель математики

Образование – высшее, педагогический стаж-29лет,

Квалификационная категория -высшая

Пояснительная записка

Ведущее место математического образования определяется:

-практической значимостью математики,

- ее возможностями в развитии и формировании мышления человека,
- -развитием творческих способностей.

Актуальным остается вопрос дифференциации обучения математике

-позволяющий обеспечить базовую подготовку,

–удовлетворить потребности каждого, кто проявляет интерес и способности к предмету,

- ориентировать на выбор профессии, связанной с математикой.

Данный курс направлен:

- на расширение знаний,
- повышение уровня математической подготовки через решение большого класса задач.

Модуль и его свойства

таят в себе большую содержательность, глубину, умелое обыгрывание которых позволяет рационально и остроумно решать спектр задач, побуждает учащихся к самостоятельности и творчеству .

Курс предназначен для учащихся 9 класса общеобразовательных учреждений, реализующих предпрофильную подготовку.

Цели курса

Помочь повысить уровень понимания и практической подготовки в таких вопросах, как :

- построение графиков функций, удовлетворяющих заданному условию
- преобразование выражений, содержащих модуль
- решение уравнений, неравенств и систем графическим методом

Развивать математические способности учащихся

Продолжить формирование умений логически мыслить и отыскивать математические закономерности

Помочь осознать степень своего интереса к предмету и оценить возможности овладения им с точки зрения дальнейшей перспективы

Задачи курса

- Научить учащихся навыкам построения графиков с модулем и проведению преобразований с помощью изученных методов
- Научить строить геометрические места точек, координаты которых удовлетворяют условию $F(x)=0$, $F(x)\leq 0$, $F(x)\geq 0$
- Вовлечь учащихся в проектировочную деятельность
- Помочь ученику оценить свой потенциал с точки зрения образовательной перспективы

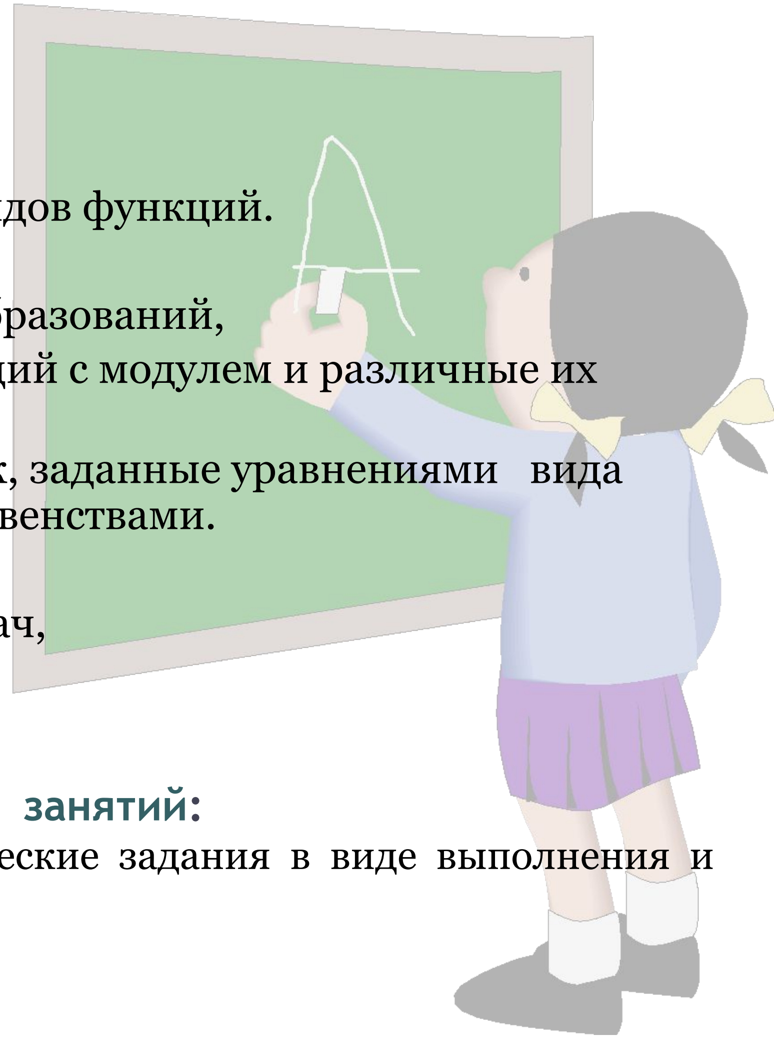
Тематическое планирование

№	Наименование тем курса	Всего часов	Лекция	Практика	Семинар
1	ГМТ. Определение, общие понятия	1	0,5	0,5	
2	Геометрические преобразования графиков функций, содержащих модуль.	2	1	1	
3	Построение ГМТ, заданных уравнениями	2	1	1	
4	Построение ГМТ, заданных системами неравенств.	2		1	1
5	Задачи на нахождение площадей фигур.	1		1	
6	Модуль в заданиях единого государственного экзамена	1			1
7	Заключительное занятие: представление своих работ учащимися.	2			2

В результате изучения курса учащиеся

Должны знать:

- -правило раскрытия модуля,
- -план построения графиков основных видов функций.
- ***Должны уметь***:
- -применять метод геометрических преобразований,
- -строить графики основных видов функций с модулем и различные их комбинации,
- -изображать геометрические места точек, заданные уравнениями вида $|x|+|y|=n$, $|x+a| = c$, $|y-b| = c$ и неравенствами.
- ***Оценивать свои результаты:***
- проверка самостоятельно решенных задач,
- *защита проектов.*



Основные формы организации учебных занятий:
лекция , практическая работа, семинар, творческие задания в виде выполнения и защиты проектов.

Методы обучения:
проблемный, метод проектов.

Содержание курса .

Тема 1. Геометрические места точек. Определение. Общие понятия. ГМТ, заданные неравенствами(1 ч)

Цели: Постановка задач курса, проверка владения базовыми умениями. Научить изображать ГМТ, заданные неравенствами.

Методы обучения: лекция, объяснение, выполнение тренировочных упражнений

Геометрическим местом точек (ГМТ) называют множество, в которое входят все те и только те точки, которые обладают этим свойством.

Все графики функций $y = f(x)$, которые изучались до сих пор можно рассматривать как ГМТ, координаты которых удовлетворяют заданному уравнению. Таким образом построение геометрических мест точек, координаты которых удовлетворяют какому – либо соотношению, является задачей более общей, чем построение графиков функций.

Графический способ – один из самых удобных и наглядных способов представления и анализа информации.

Упражнение 1. Построить ГМТ, координаты которых удовлетворяют неравенствам :

а) $x<3$; б) $y \geq -4$; в) $x < -5$; г) $0<x<1$; д) $-2<y<3$.

Упражнение 2. Построить ГМТ , координаты которых удовлетворяют соотношениям :

а) $x + y > 0$; б) $y - x > 1$; в) $y \geq x^2$; г) $y < x^2$; д) $x^2 + y^2 < 1$; е) $x^2+y^2 \geq 1$.

Графики

Тема 2. Обобщение методов построения графиков функций, содержащих знак модуля.

Цели :- напомнить методы построения графиков функций , содержащих знак модуля;

-способствовать развитию навыков построения графиков функций с опорой на преобразования симметрии;

-закрепить полученные знания.

Методы обучения : лекция, объяснение, выполнение тренировочных заданий.

Когда в стандартные функции , которые задают прямые, гиперболы, параболы , включают знак модуля, их графики становятся необычными. Чтобы научиться строить такие графики, надо владеть приемами построения графиков элементарными функциями , а также твердо знать и понимать определение модуля.

Построение графиков функций вида : $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, $|y| = f(x)$,. $y = |x + a| + |x + в| + |x + c| + \ldots$,

частично содержащих знак модуля.

[Открытый урок]

Тема 3. Построение ГМТ , заданных уравнениями.

Цель: продолжить решение задач по изучаемой теме, рассмотреть построение Г М Т, заданных уравнениями с двумя неизвестными.

Задание. Решить графически:

1. $|x-y|=3$
2. $|x|-|y|=3$
3. $|x|=|y|$
4. $y=|x|/x$
5. $x=|y-1|+3$
6. $|x+1|=2$
7. $|y-2|=1$
8. $|x-y+1|+|x-y|=1$
9. $|y-1|+y-1=|x-2|+x-2$
10. $|x-y|+|x+y|$
11. $(x+|x|)^2+(y-|y|)^2=0$
12. $(x+|x|)^2+(y+|y|)^2=9$
13. $x^2+y^2=2|x+y|+2$
14. $x^2+y^2=1-2|xy|$
15. $x=|x^3+xy^2|$
16. $(x-1)^2=(x-2)/|x-2|$
17. $(x+y-1)/(x^2-y^2-1)=1$
18. $x^2+y^2=2|x|+|y|$

Графики

Тема 4. Построение ГМТ, заданных неравенствами и системами неравенств.

Цель: научить изображать на плоскости фигуры , задаваемые неравенствами с модулем; использовать рассматриваемый материал для развития интереса к предмету ,для более глубокого освоения базовых умений.

Задание. Изобразить ГМТ, заданные неравенствами и системами неравенств.

1) $|x+y| \le 1$
2) $|x+2| > 1$
3) $|x+3| < 1$
4) $|x-2| \ge 2$
5) $|x| + |y| \le 3$
6) $|x| - |y| > 3$
7) $|x| + |y| > 3$
8) $y \le |x|$
9) $x > |y|$
10) $x^2+y^2-2x-2y<7$
11) $\begin{cases} y > |x| \\ x^2+y^2 \le 9/4 \end{cases}$
12) $x+y<3$
13) $x^2+y^2-2x-2y \ge 7$
14) $\begin{cases} x^2+y^2-4x+6y+g>0 \\ x^2+y^2 \le 9 \end{cases}$
15) $\begin{cases} |x| + 2|y| \le 4 \\ x^2+y^2 \ge 1 \end{cases}$
16) $x \ge |x^3+xy^2|$
17) $x^2+y^2 \le 2x+2y \le 4y$
18) $x-y-1/x^2+y^2-1<1$
19) $x^2+y^2 \le 2|x| - 2|y|$

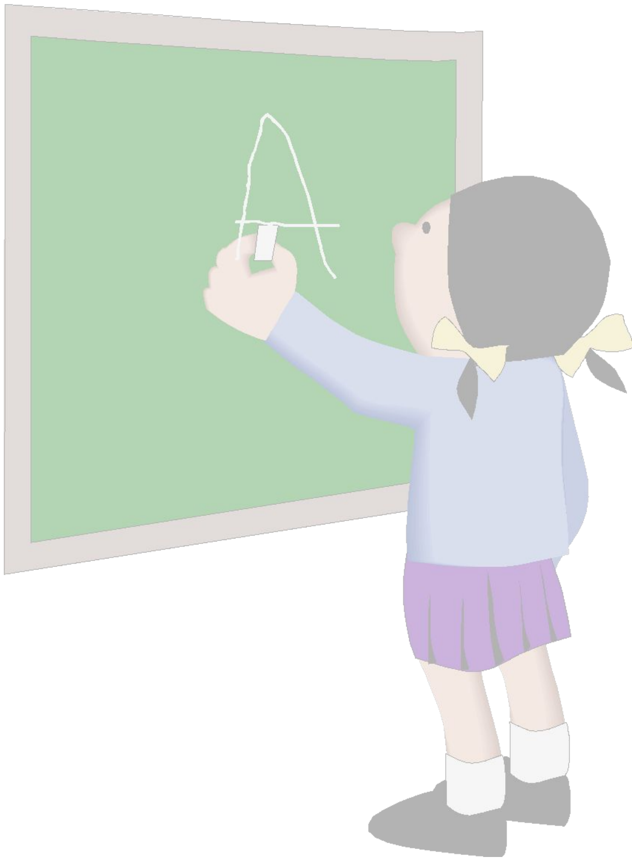
Графики

Тема 5. Задачи на нахождение площадей.

Цель: расширить представление учащихся о взаимосвязи между алгебраическими соотношениями и их геометрическими образами на координатной плоскости.

Задание: Найти площадь фигуры, заданной следующим условием:

1. $|x^2+y^2-2| \le 2x+2y$
2. $4 \le x^2+y^2 \le 2|x|+2|y|$
3. $|x|+|y|+|x-y| \le 2$
4. $x^2 + y^2 \le 2x+2y \le 4y$
5. $(x-y-1)/(x^2 -y^2-1) < 1$
6. $x^2+y^2 \le 2|x|-2|y|$
7. $\begin{cases} x^2+y^2-8x-6y-11 \le 0 \\ x^2+y^2 -2x+2y+1 \ge 0 \end{cases}$
8. $\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ |x|+|y| > 2 \end{cases}$
9. $\begin{cases} x^2+y^2 \ge 144 \\ 3|x|+4|y| \ge 60 \end{cases}$
10. $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 3 \\ 3y \le 3|x| \end{cases}$
11. $(y-1)^2 < (x+2)/(|x+2|)$
12. $\begin{cases} |y-1|-x > 8 \\ (x+y-1)/(x^2 +y^2-1) > 1 \\ (-y) < x < 1 \end{cases}$



ОТВЕТЫ

1. $2\pi+4$	5. $(\pi/2)+1$	9. $600-144\pi$
2. 8	6. $2\pi-4$	10. $5\pi/2$
3. 3	7. $3{,}5\pi$	11. 5
4. π	8. $2\pi-4$	12. $1-\pi/8$

Тема 6. Модуль в заданиях ЕГЭ.

Цели: познакомить учащихся с решением некоторых типов заданий, содержащих модуль; предоставить учащимся шанс оценить свои возможности.

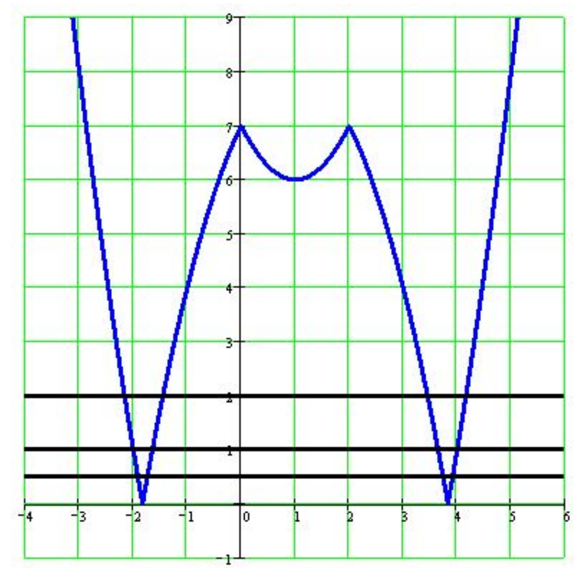
Задание 1. При каких значениях параметра а число корней уравнения $||x^2-2x|-7|=a$ в четыре раза больше а ?

Решение. Построим график функции $y=||x^2-2x|-7|$. Проводим горизонтали $y = a$ при различных а, получаем информацию о числе пересечений этой горизонтали с графиком.

Значение а	а<0	0	0< а<6	6	6< а<7	7	а>7
Число корней	0	2	4	5	6	4	2

0<а <6 и при этом 4а=4.

Ответ: а=1.



Задание 2.

При каких значениях x функция y =|2x +3| +3|x-1|-|x+2| имеет наименьшее значение?

Задание 3.

При каких значениях x функция y = |x+1|+|x-1|-2|x-2| достигает максимума?

Задание 4.

При каком значении a уравнение $|x^2-|x|-6|=a$ имеет более двух корней?

Задание 5.

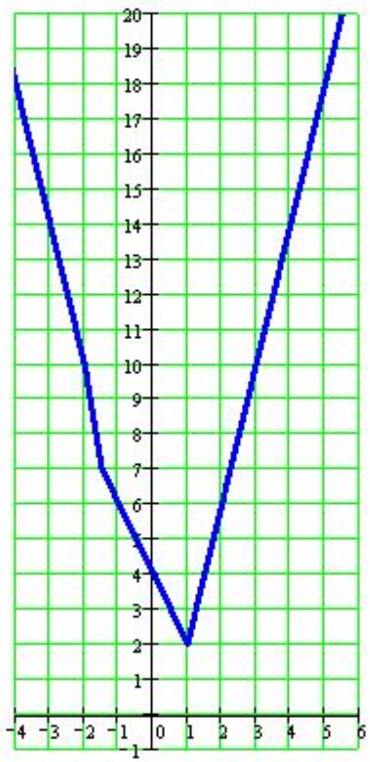
При каком значении x функция

достигает минимума?

$$y = x^2 + 2x - \sqrt{4x^2 + 16x + 16}$$

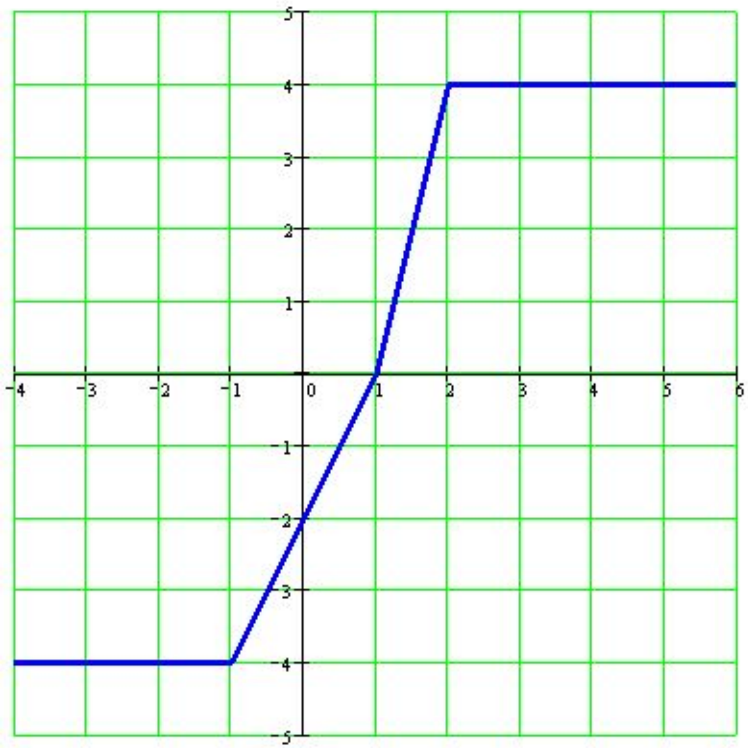
Решение

$$y = |2x+3| + 3|x-1| - |x+2|$$



Ответ: при x=1.

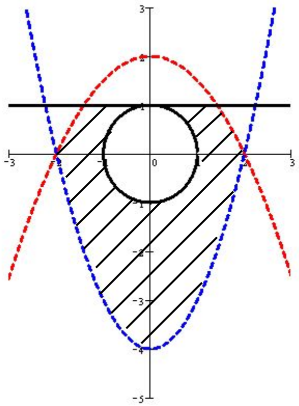
$$y = |x+1| + |x-1| - 2|x-2|$$



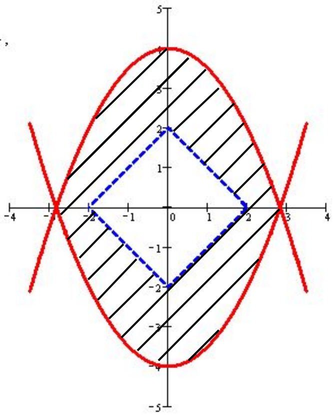
Ответ: при x≥2

Представление своих работ учащимися.

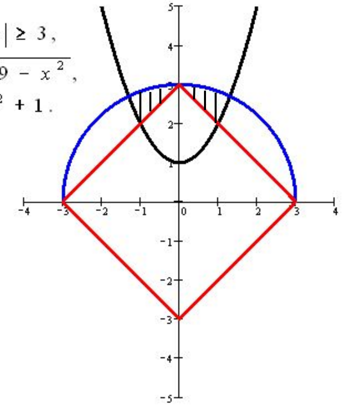
1. $\begin{cases} y \le 1, \\ y < 2 - \frac{1}{2}x^2, \\ y < x^2 - 4, \\ x^2 + y^2 \ge 1. \end{cases}$



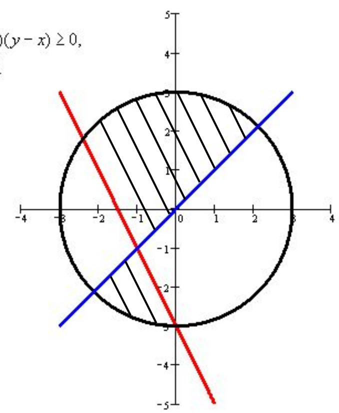
2. $\begin{cases} |y| \le 4 - \frac{x^2}{2}, \\ |x| + |y| > 2. \end{cases}$



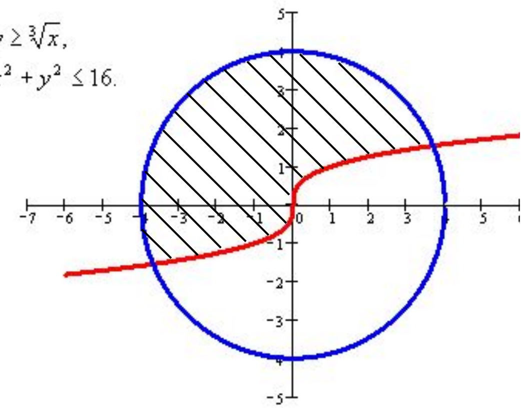
3. $\begin{cases} |x| + |y| \ge 3, \\ y \le \sqrt{9 - x^2}, \\ y \ge x^2 + 1. \end{cases}$



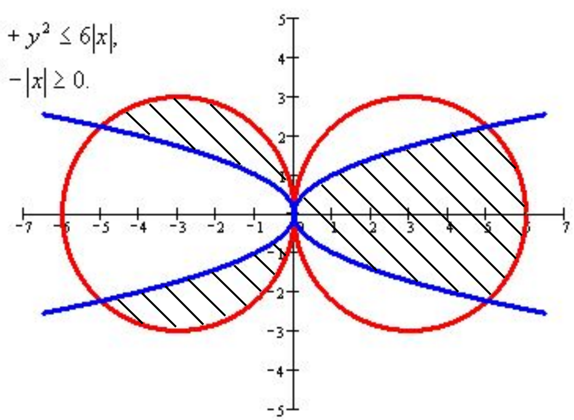
4. $\begin{cases} (y + 2x + 3)(y - x) \ge 0, \\ x^2 + y^2 \le 9. \end{cases}$



5. $\begin{cases} y \ge \sqrt[3]{x}, \\ x^2 + y^2 \le 16. \end{cases}$

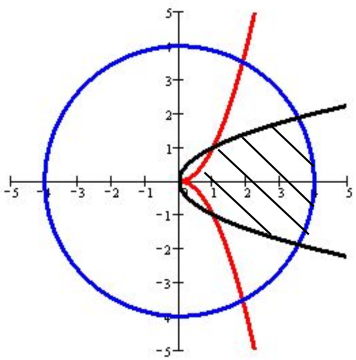


6. $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 6|x|, \\ y^2 - |x| \ge 0. \end{cases}$

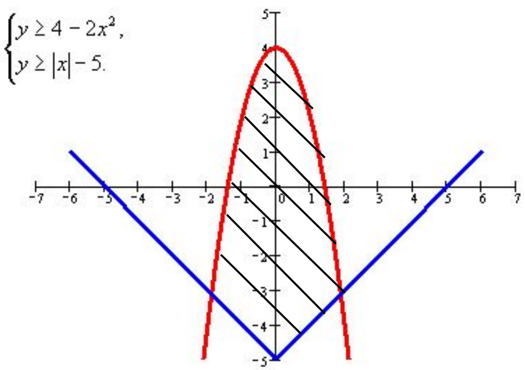


Задачи, составленные учащимися .

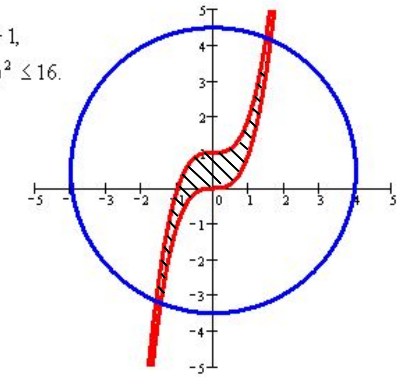
7. $\begin{cases} |y| \le x|x|, \\ x^2 + y^2 \le 16, \\ y^2 \le x. \end{cases}$



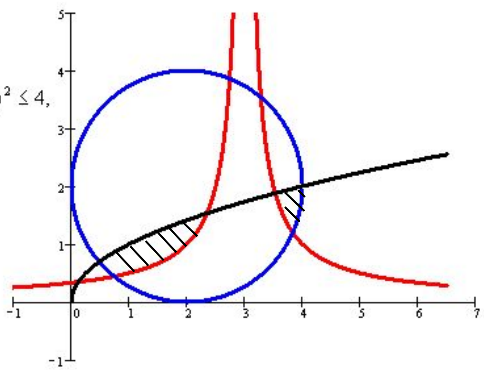
8. $\begin{cases} y \ge 4 - 2x^2, \\ y \ge |x| - 5. \end{cases}$



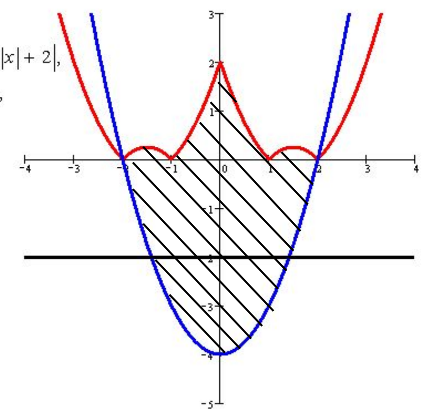
9. $\begin{cases} x^3 \le y \le x^3 + 1, \\ x^2 + (y - 0{,}5)^2 \le 16. \end{cases}$



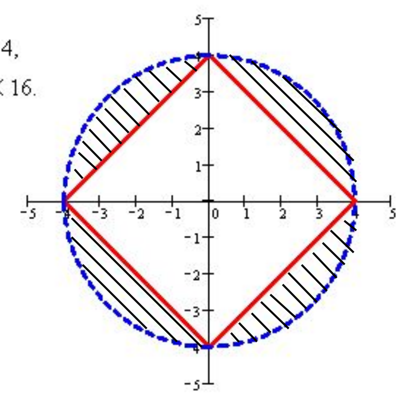
10. $\begin{cases} y \ge \dfrac{1}{|x-3|}, \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 \le 4, \\ y \le \sqrt{x}. \end{cases}$



11. $\begin{cases} y \le |x^2 - 3|x| + 2|, \\ y \ge x^2 - 4, \\ y \ge -2. \end{cases}$

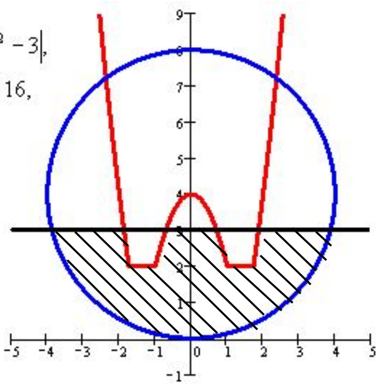


12. $\begin{cases} |x| + |y| \ge 4, \\ x^2 + y^2 < 16. \end{cases}$

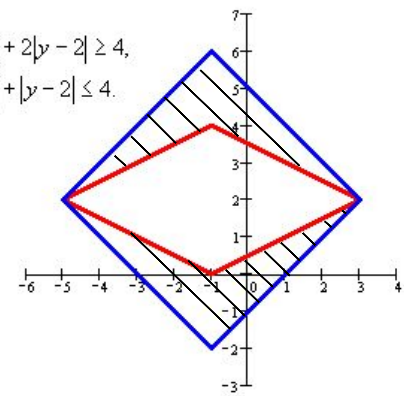


Задачи, составленные учащимися.

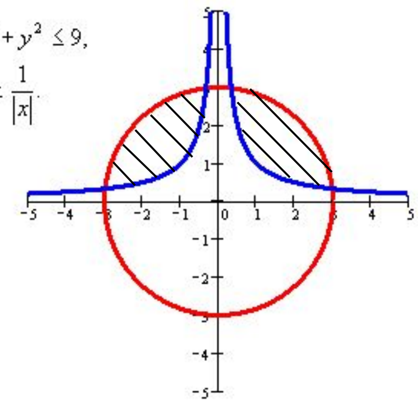
13. $\begin{cases} y \le |x^2-1| + |x^2-3|, \\ x^2 + (y-4)^2 \le 16, \\ y \le 3. \end{cases}$



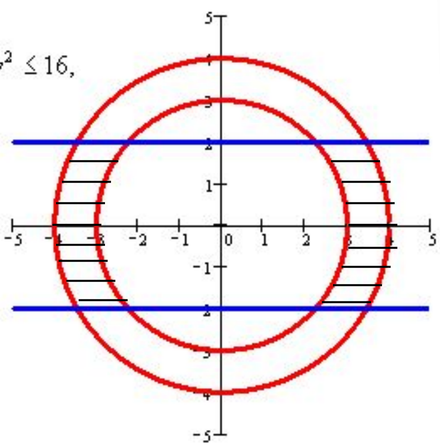
14. $\begin{cases} |x+1| + 2|y-2| \ge 4, \\ |x+1| + |y-2| \le 4. \end{cases}$



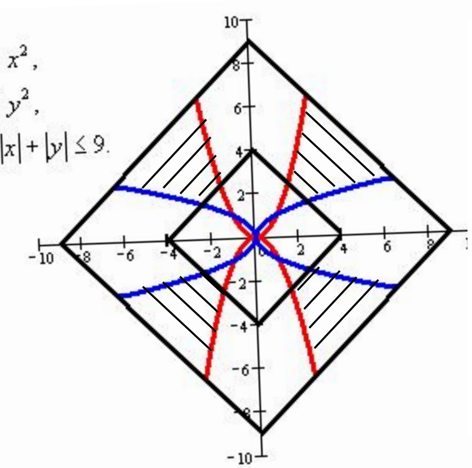
15. $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9, \\ y \ge \dfrac{1}{|x|}. \end{cases}$



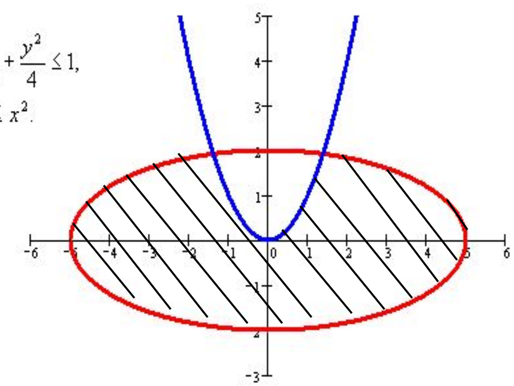
16. $\begin{cases} 9 \le x^2 + y^2 \le 16, \\ |y| \le 2. \end{cases}$



17. $\begin{cases} |y| \le x^2, \\ |x| \le y^2, \\ 4 \le |x| + |y| \le 9. \end{cases}$



18. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} \le 1, \\ y \le x^2. \end{cases}$



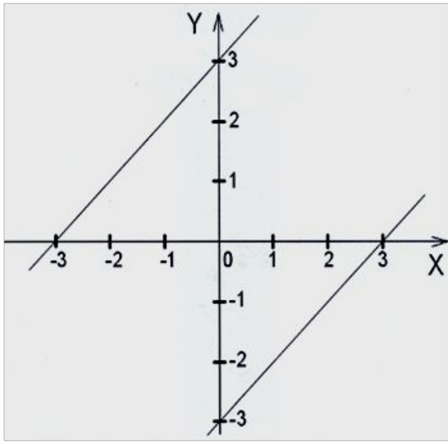
Используемая литература

1) Дороднов А. М., Острецов И. Н. и др. «Графики функций. Учебное пособие для поступающих в ВУЗы», 1972 г.
2) Журнал «Математика в школе» №5, 1999 г.
3) Студенецкая В. Н., Сагателова Л. С. «Математика 8-9 класс», Учитель ,2007 . Выпуск 1.
4) Горохова Л. И. и др. «Уроки математики с применением интегрированных технологий», 2009 г., «Глобус»
5) Математика. Еженедельное учебно-методическое приложение к газете «Первое сентября», №5, 1999 г.
6) А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский «Алгебраический тренажер», 1998 г., «Гимназия».
7) М. И. Козина « Математика 8-9 класс», «Учитель» , 2007 г. Выпуск 2.

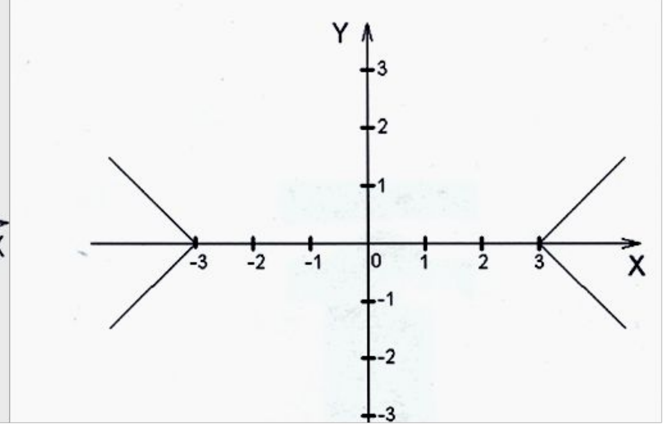
8) Интернет-ресурсы

Конец

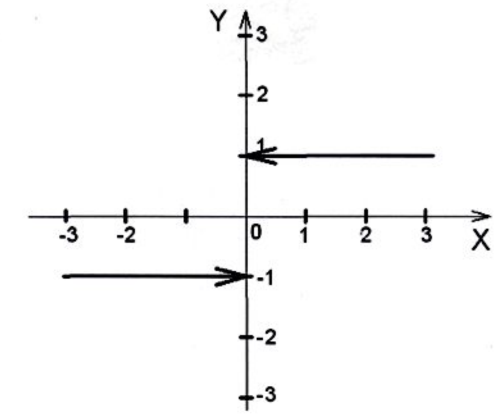
|x-y| = 3



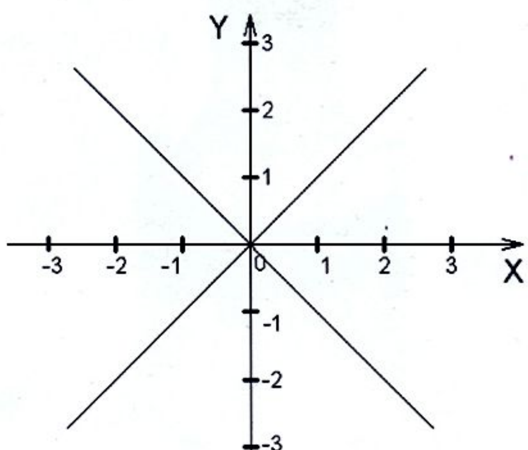
|x|-|y| = 3



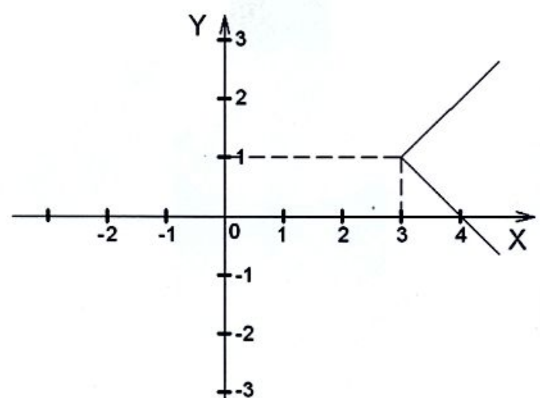
y = |x|/x



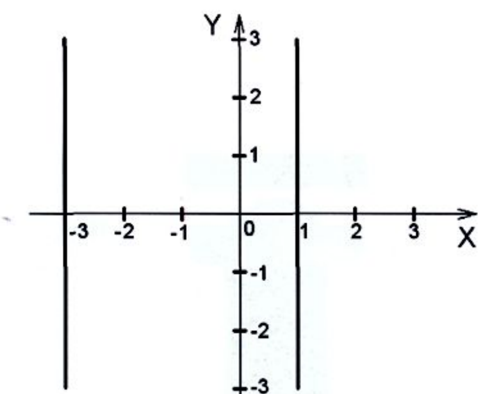
|x| = |y|



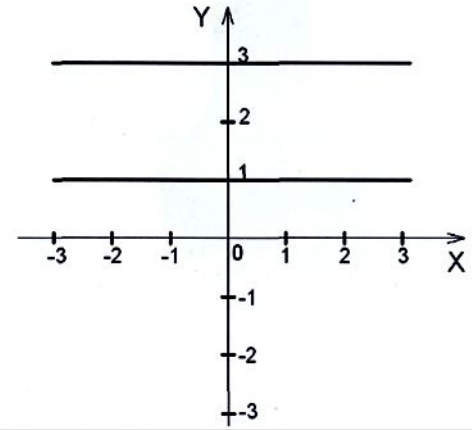
x = |y-1|+3



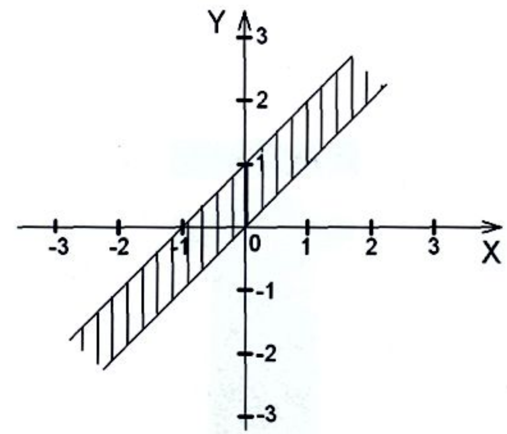
|x+1| = 2



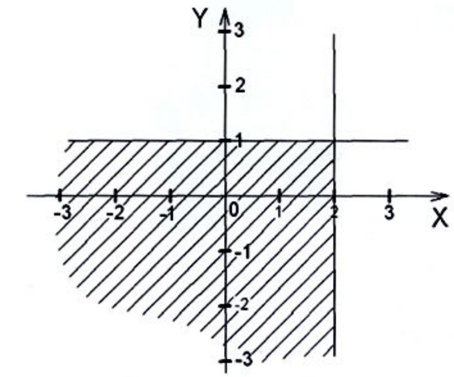
$|y-2| = 2$



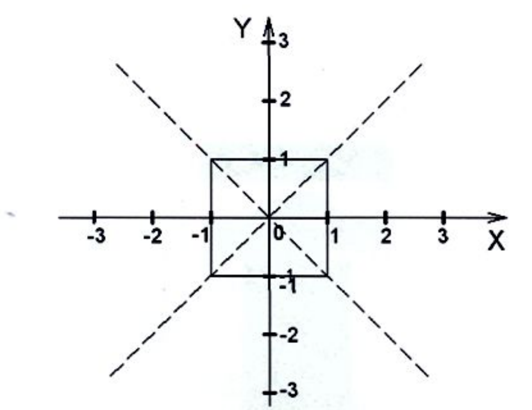
$|x-y+1|+|x-y| = 1$



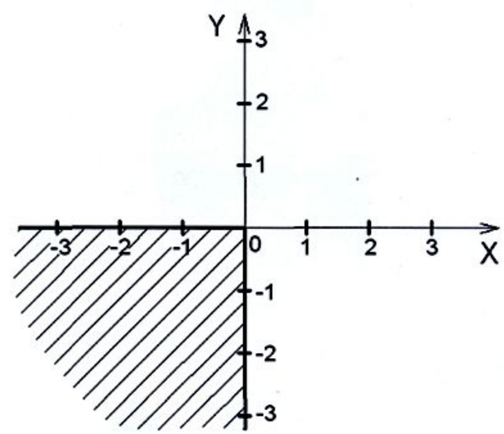
$|y-1|+y-1 = |x-2|+x-2$



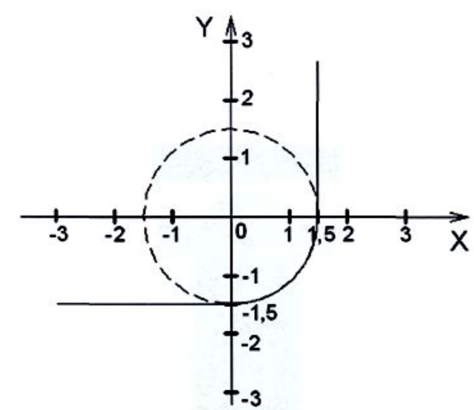
$|x-y| + |x+y| = 2$



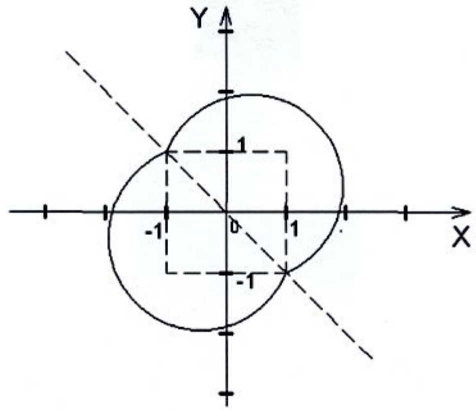
$(x+|x|)^2 + (y-|y|)^2 = 0$



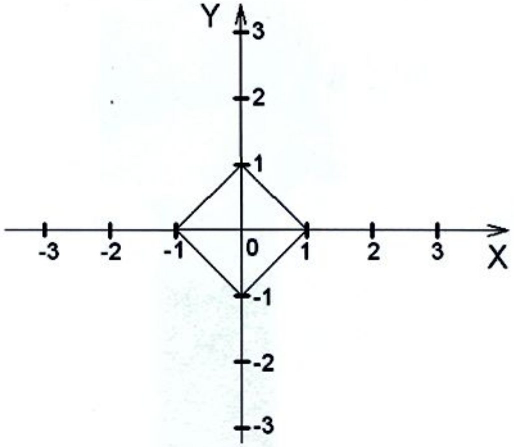
$(x+|x|)^2 + (y-|y|)^2 = 9$



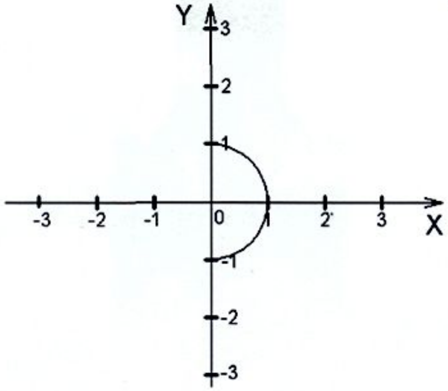
$x^2 + y^2 = 2|x+y| + 2$



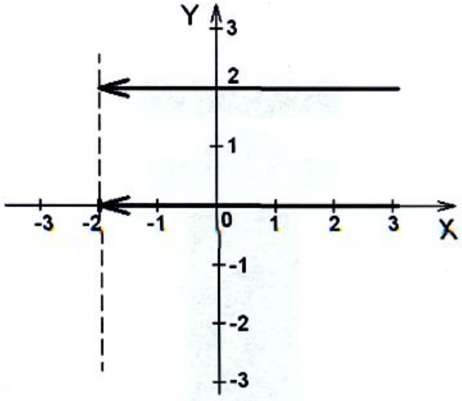
$x^2 + y^2 = 1 - 2|xy|$



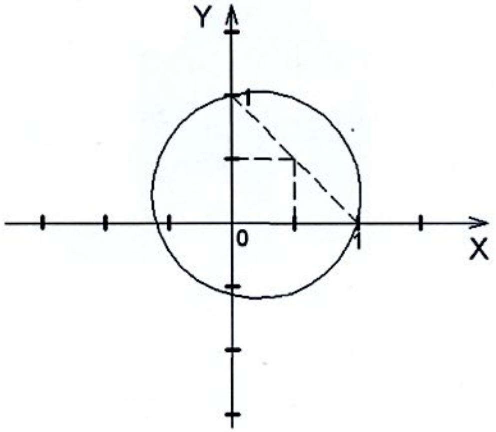
$x = |x^3 + xy^2|$



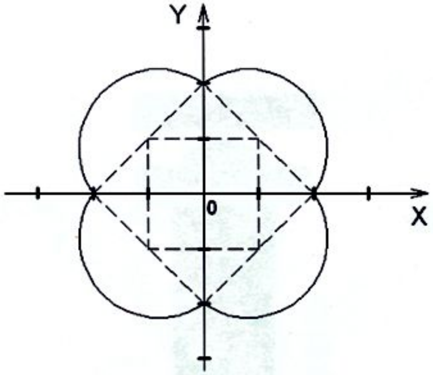
$(y-1)^2 = (x+2) / |x+2|$



$(x+y-1) / (x^2+y^2-1) = 1$



$x^2+y^2 = 2|x| + 2|y|$



Тема 2

Обобщение методов построения графиков функций, содержащих знак модуля (урок повторения и обобщения)

Оборудование: интерактивная доска.

Цель занятия:

- напомнить методы построения графиков функций, содержащих знак модуля;
- способствовать развитию навыков построения графиков функций с опорой на преобразования симметрии;
- закрепить полученные знания.

Определение

Не зная определения модуля, невозможно построить даже самого простого графика, содержащего абсолютную величину.

Итак, напомню определение функции

$$y = |x| = \begin{cases} x, \text{ при } x \geq 0; \\ -x, \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Построение графиков функций с модулем – частный случай построения графиков сложных функций.

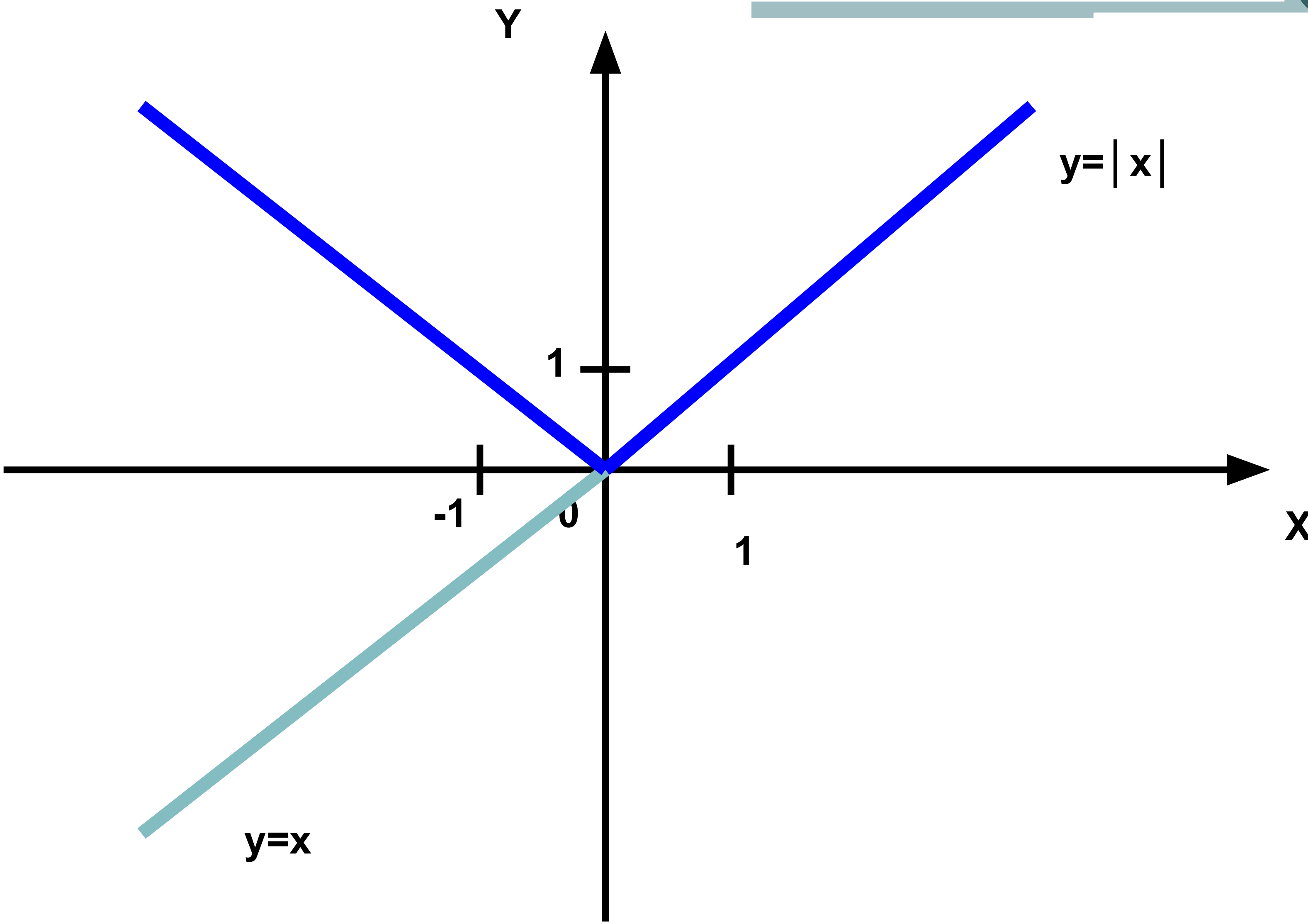
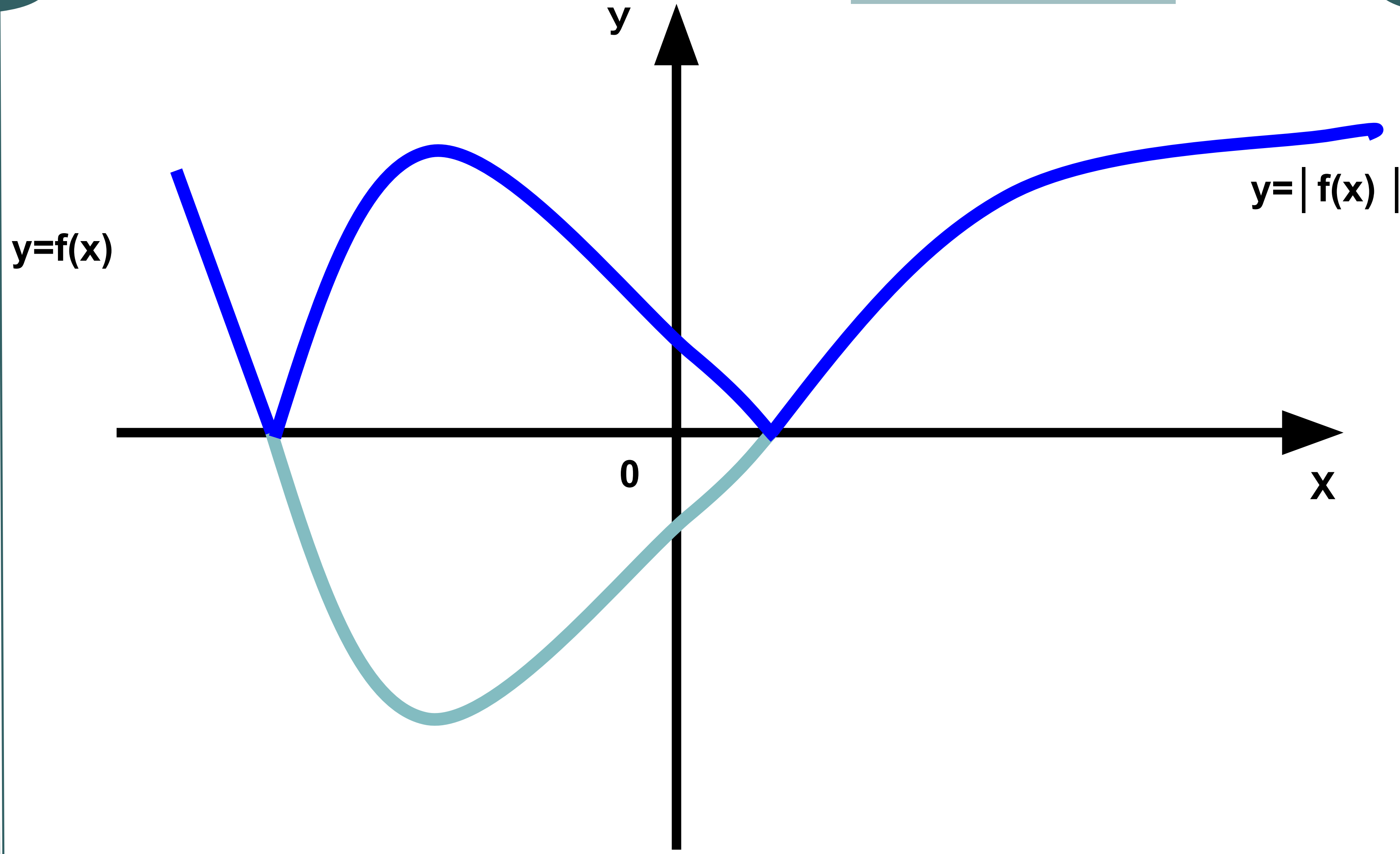


Иллюстрация графика функции $y = |x|$

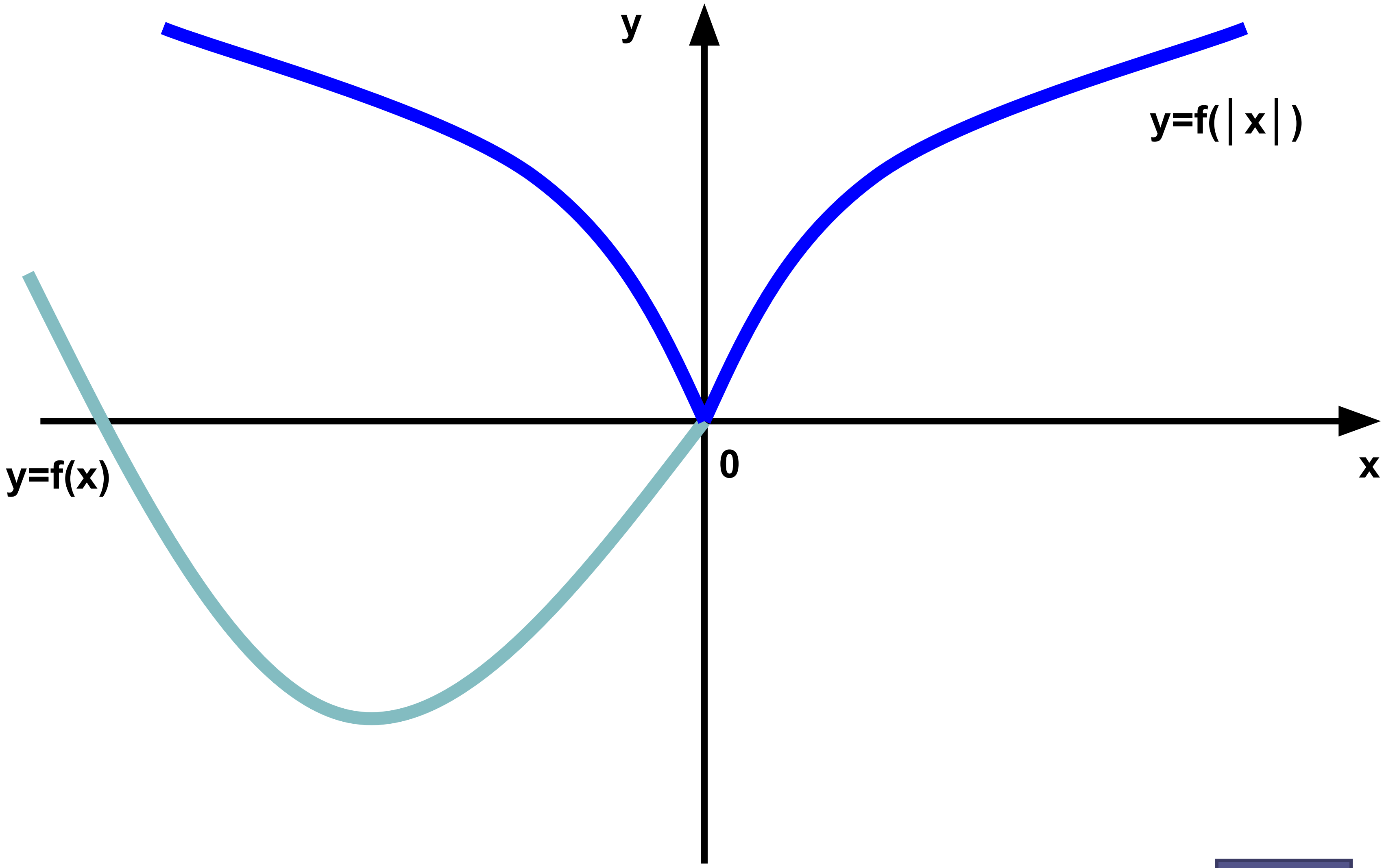
Чтобы из графика функции $y = f(x)$ получить график функции $y = |f(x)|$, нужно:

1) построить график функции $y = f(x)$;
2) части графика функции $y = f(x)$, лежащие ниже оси абсцисс, зеркально отразить от неё.


y
y=f(x)
y=│f(x) │
0
X

Для того, чтобы построить график функции $y = f(|x|)$, нужно:

1) построить график функции $y = f(x)$;
2) часть графика функции $y = f(x)$, соответствующую положительной полуоси абсцисс, отразить от оси ординат.

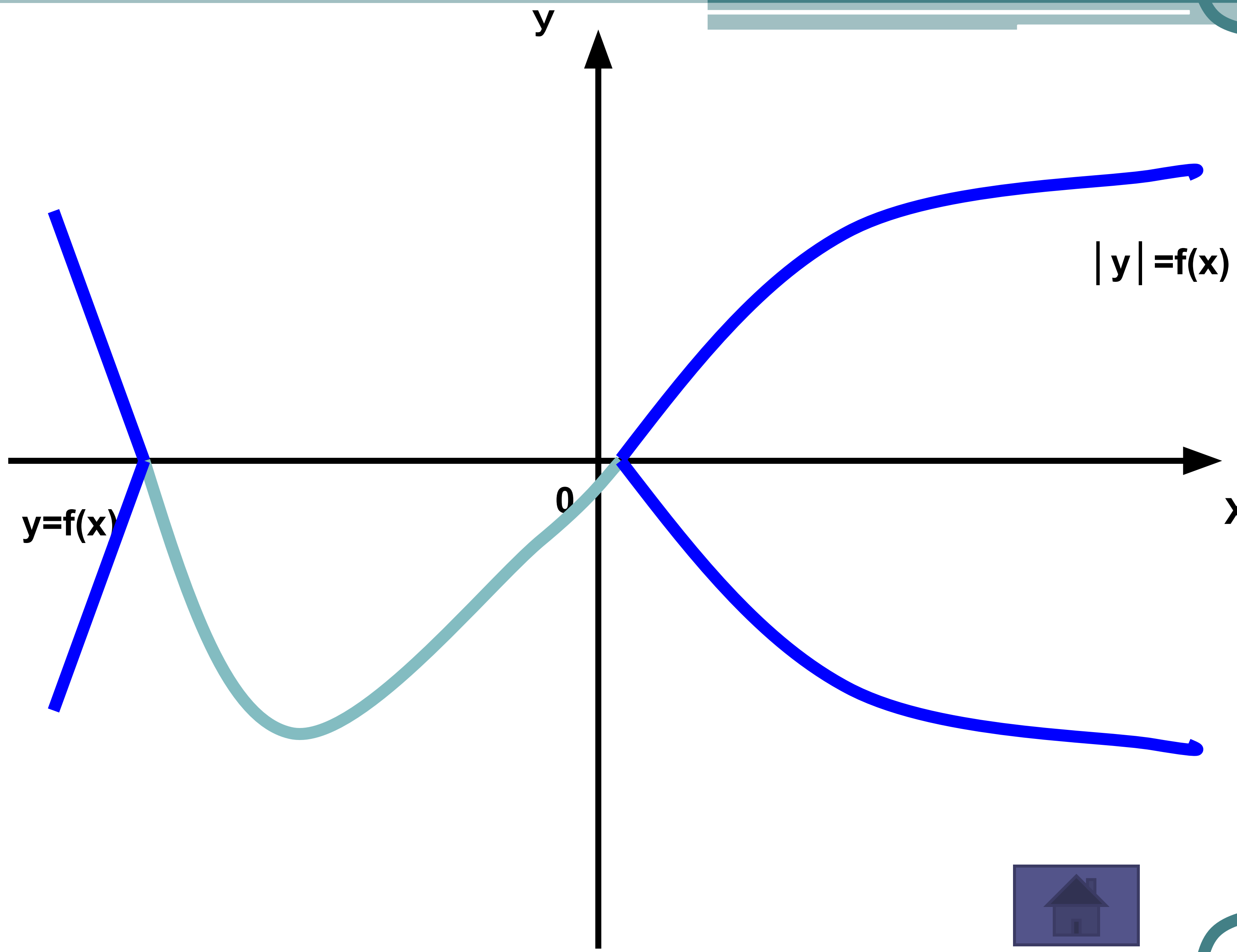


y
y=f(│x│)
y=f(x)
0
x

Функция $|y| = f(x)$ является ***двузначной***, т.к. по определению абсолютной величины $y = \pm f(x)$, где $f(x) \geq 0$, поэтому график симметричен относительно оси ОХ.

Чтобы построить график этой функции, нужно:

1) найти D (y) из условия $f(x) \geq 0$;
2) на D (y) построить график функции $y = f(x)$;
3) отобразить его зеркально от оси абсцисс.

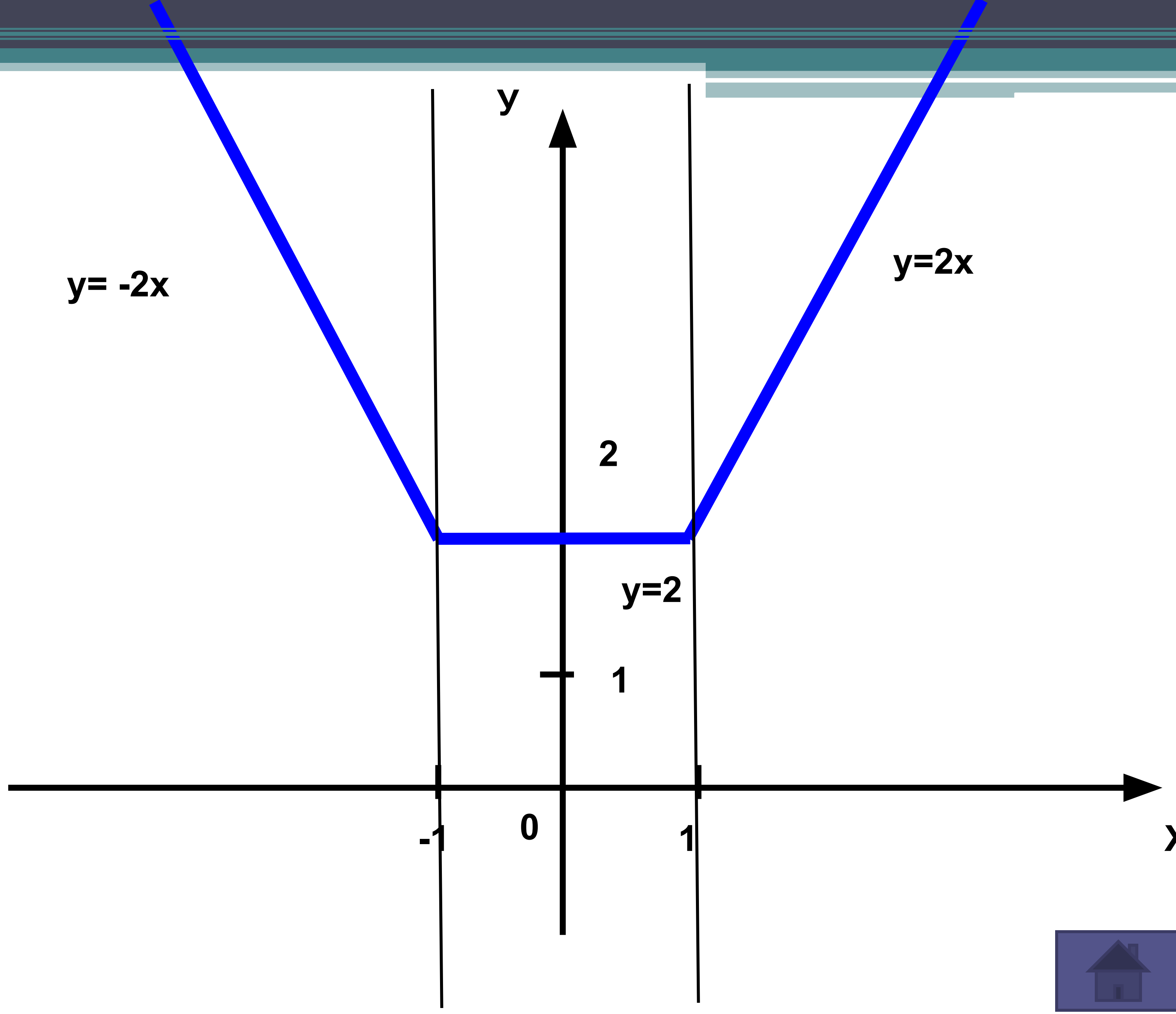

y
|y|=f(x)
0
y=f(x)
x

Графики функций
$y=|x+a|+|x+b|+\ldots+|x+n|$

Характерной особенностью графиков функций, содержащих выражения со знаком модуля, является наличие изломов в тех точках, в которых выражение, стоящее под знаком модуля, изменяет знак.

Пример функции $y = |x+1| + |x-1|$.

$$y = \begin{cases} -2x, при X \le -1; \\ 2, при -1 < X < 1; \\ 2x, при X \ge 1. \end{cases}$$



y
y= -2x
y=2x
2
y=2
1
-1
0
1
x

Итак, графики с модулями кажутся очень сложными и непонятными. Разобравшись с графиками основных видов функций, аналитическая запись которых содержит знак абсолютной величины, можно узнать много нового и полезного. Работа с ними увлекательна и интересна.

Примеры на построение

1. $|y|=2$

Строим y=2 и отражаем его относительно оси абсцисс-геометрическим местом точек являются две параллельные прямые

2. $|y|=x^2-3x+2$

На интервале (1; 2) функция отрицательна, следовательно уравнение не имеет смысла . Искомое ГМТ состоит из кусков параболы на полуинтервалах $x\leq 1$ и $x \geq 2$ и их зеркальное отображение относительно оси ОХ.

3. $y = |x^2-3x+2|$

Строим параболу и нижнюю ее часть отображаем относительно оси абсцисс.

Графики

4. $\mathbf{y = x^2 - 3|x| + 2}$

Строим $y = x^2 - 3x + 2$ при $x \geq 0$ и симметрично отображаем его относительно оси ординат

5. $\mathbf{y = |x| + x}$

Раскрыв знак модуля, функцию можно записать в виде:

$$y = \begin{cases} 2x, \text{ при } x \geq 0, \\ 0, \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

6. $\mathbf{y = |x|(x-2)}$

После раскрытия модуля функция примет вид:

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x, \text{ при } x \geq 0, \\ -x^2 + 2x, \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Графики

Самостоятельная работа

Постройте графики функций:

$$y = \left|x^2 - 3x + 2\right|$$

$$y = \left|x^2 - 3|x| + 2\right|$$

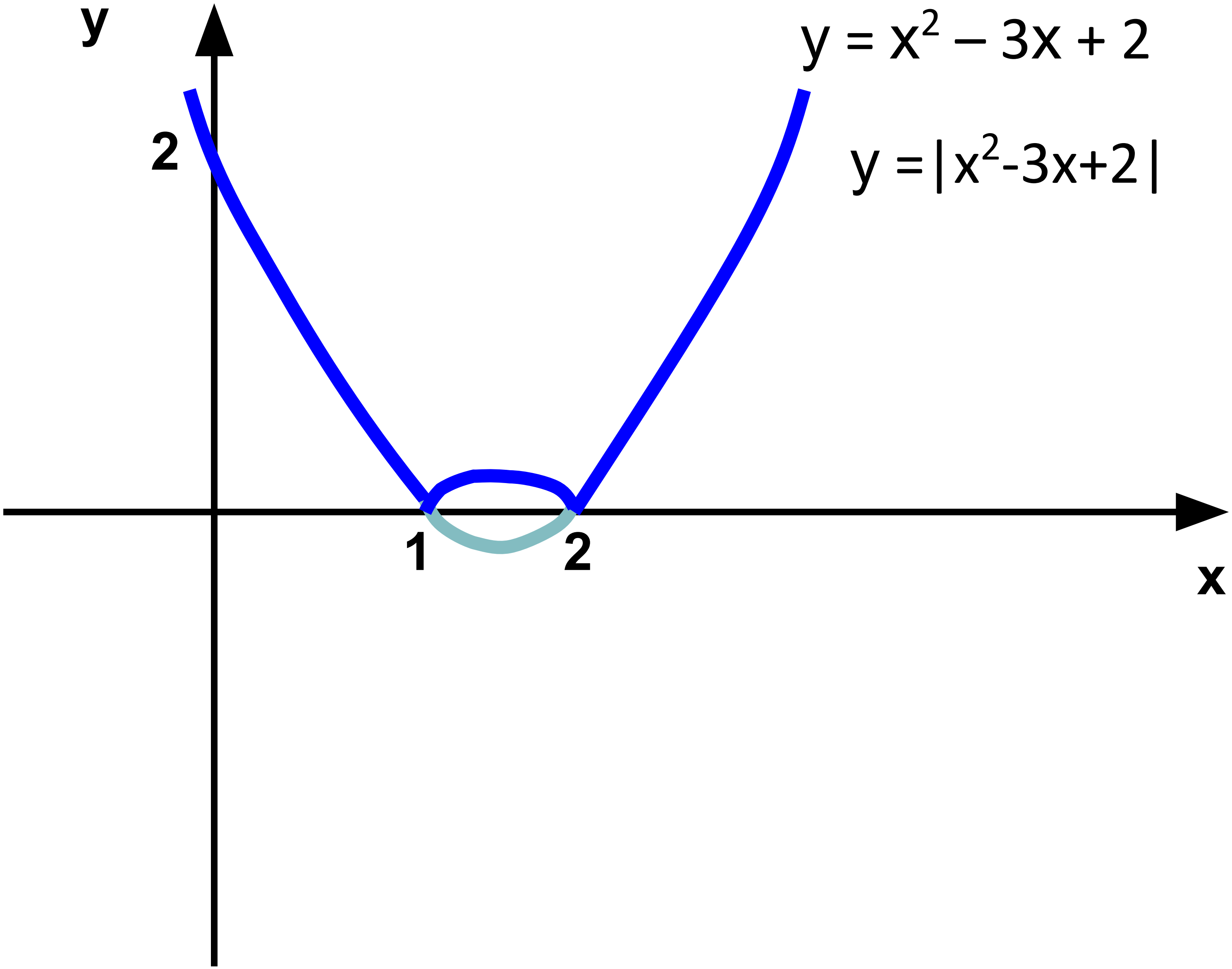
$$y = x^2 - 3|x| + 2$$

$$|y| = x^2 - 3x + 2$$

с помощью преобразования функции

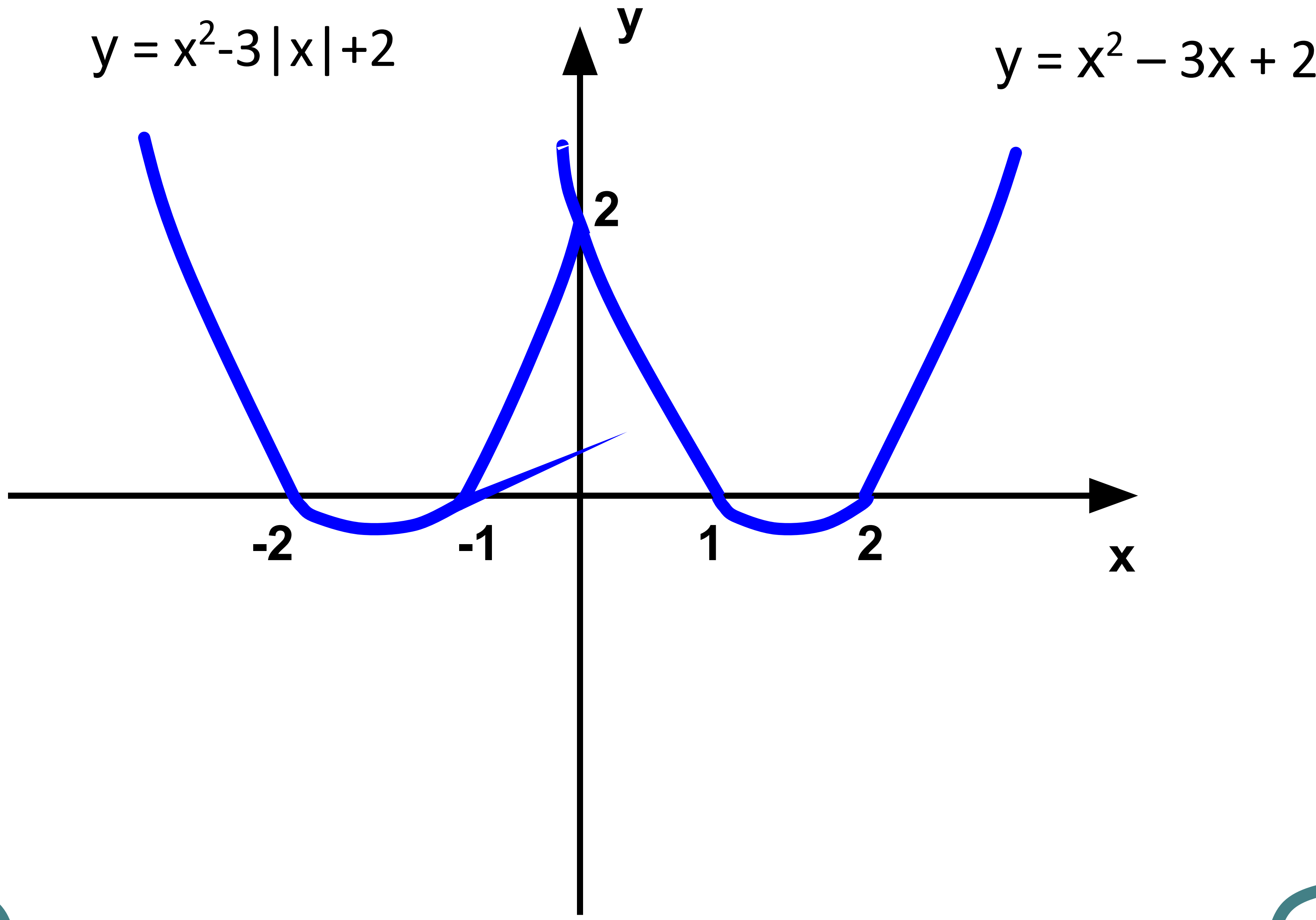
$$y = x^2 - 3x + 2$$

Проверим правильность выполнения работы.



$y = x^2 - 3x + 2$

$y = |x^2 - 3x + 2|$

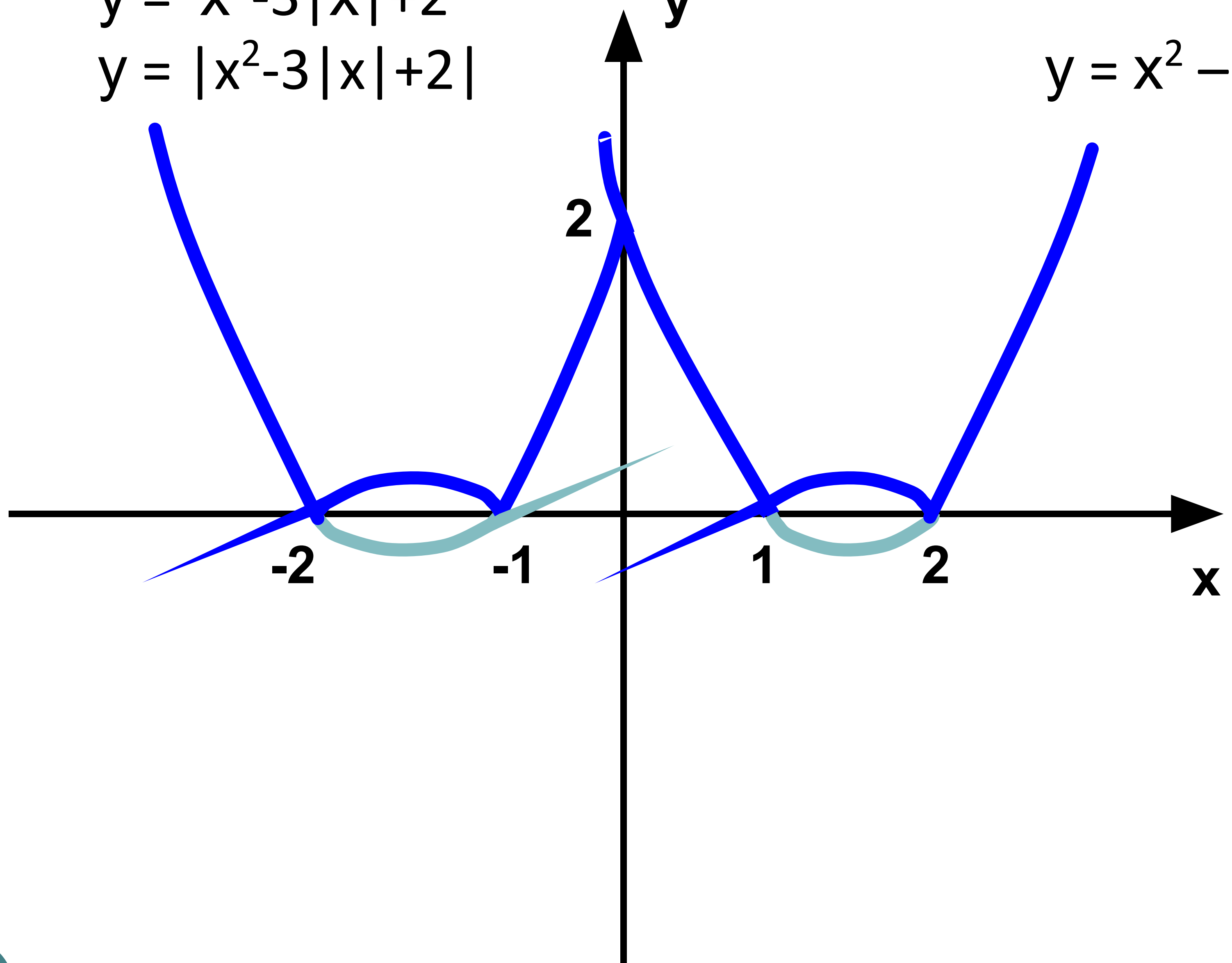


$y = x^2 - 3|x| + 2$
$y = x^2 - 3x + 2$
y
x
2
-2
-1
1
2

$y = x^2 - 3|x| + 2$

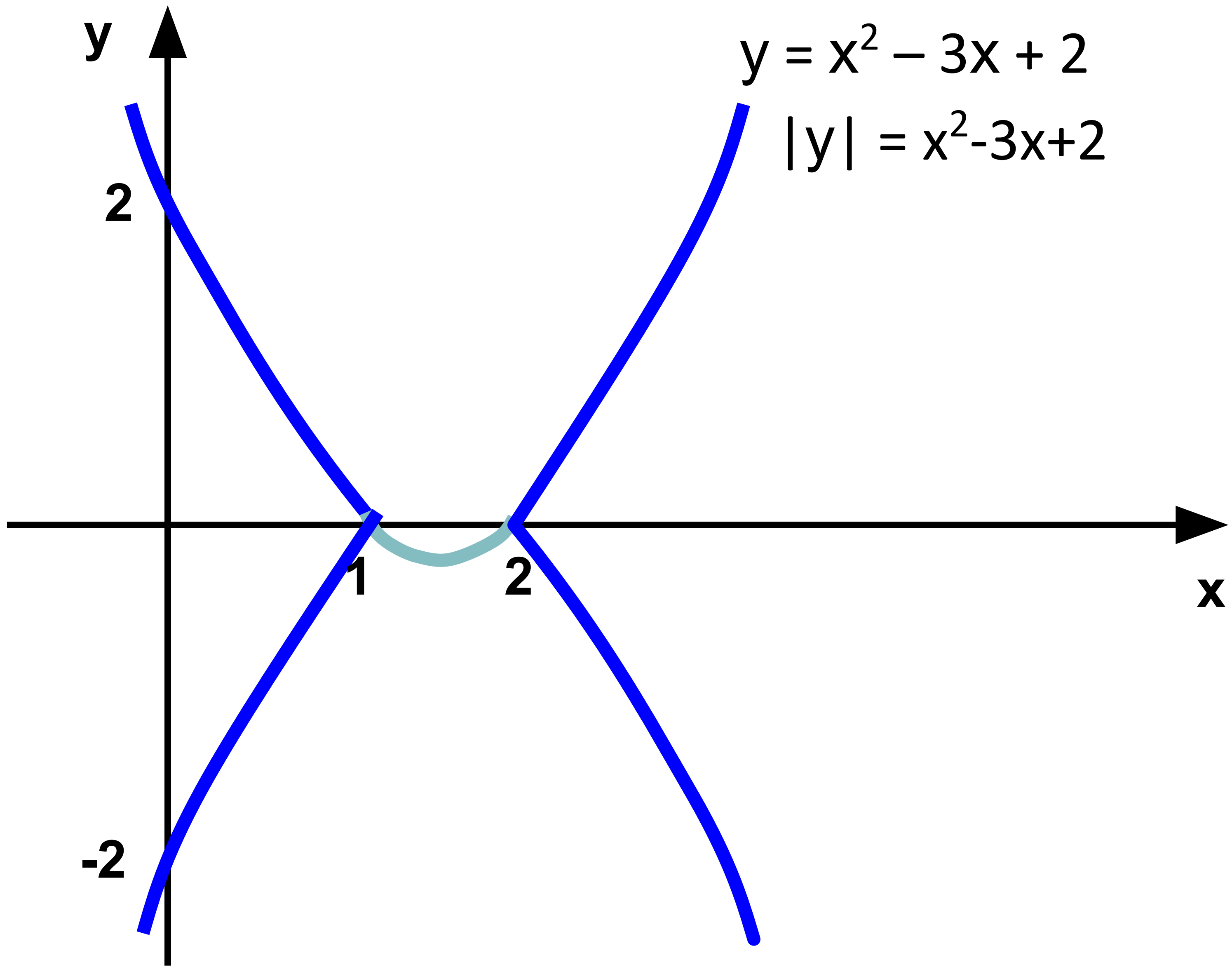
$y = |x^2 - 3|x| + 2|$

$y = x^2 - 3x + 2$



$y = x^2 - 3x + 2$

$|y| = x^2 - 3x + 2$



Дидактический материал для учащихся.

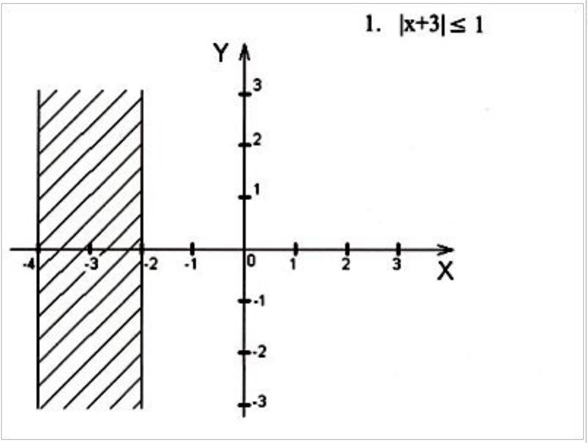
Упражнения. Построить ГМТ, заданные условием

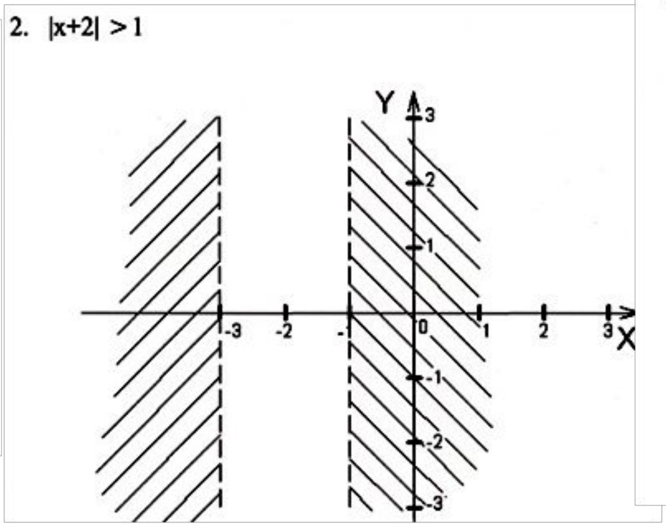
1) $y=x^2-|x|-6$
2) $y=|x^2-x-6|$
3) $y=|x^2-|x|-6|$
4) $y=|x-1|+|x-3|$
5) $y=|x|-|x-1|$
6) $y=3x+1-|x-1|+2|x|$
7) $|y|=x^2-5x+6$
8) $|y|=|x^2-x-6|$
9) $y=|x-2|\cdot x-x^2$
10) $y=|x+2|+2|x-1|-x$
11) $y=|x-1|+|x+1|+x$
12) $y=|x+1|/(x+1)$
13) $y=x|y|$ 14) $|y|=|x^2-3x+2|$

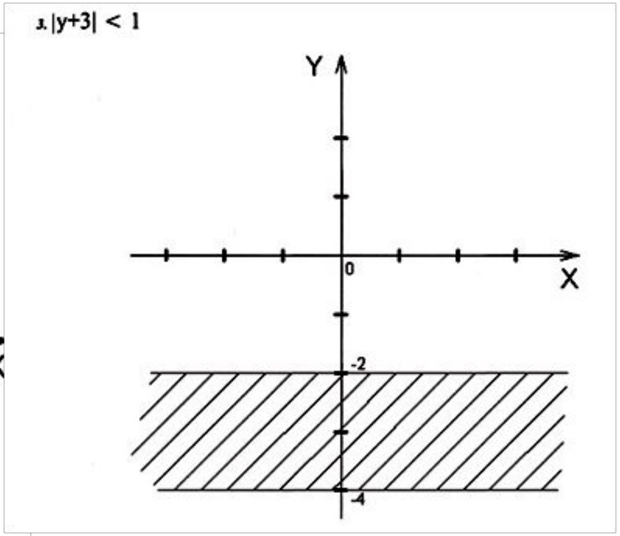
Домашнее задание

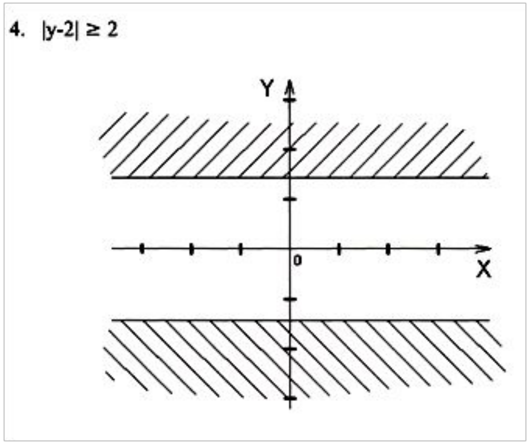
Завершите начатую работу по проекту и сделайте к нему мини-презентацию.

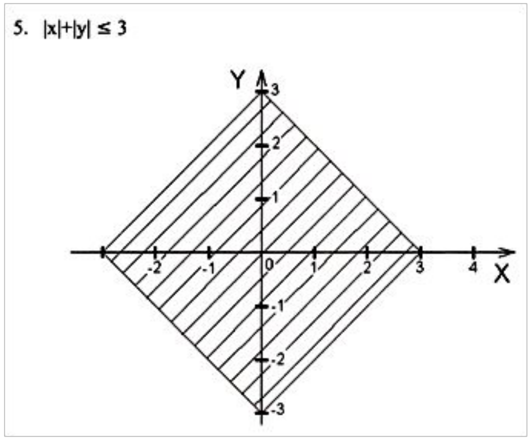
ВСЕМ СПАСИБО!

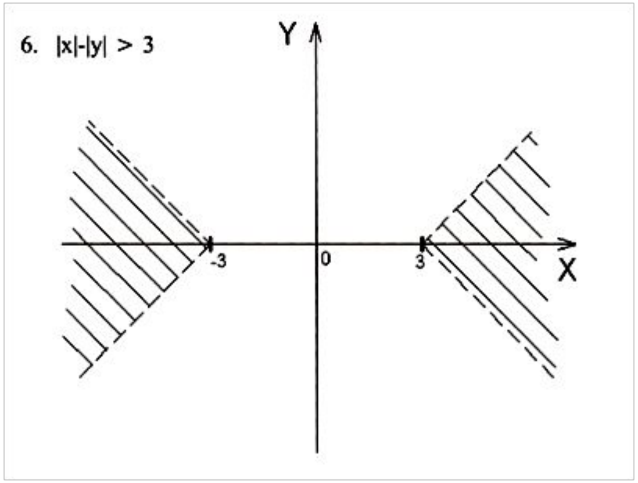

1. |x+3| ≤ 1
Y
X


2. |x+2| > 1
Y
X

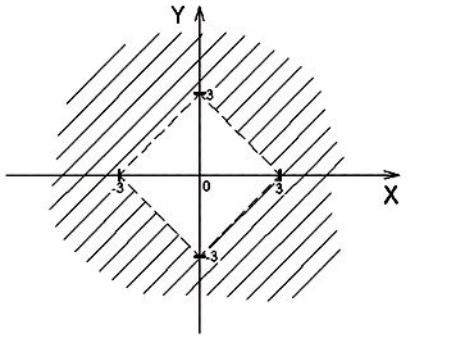

3. |y+3| < 1
Y
X


4. |y-2| ≥ 2
Y
X

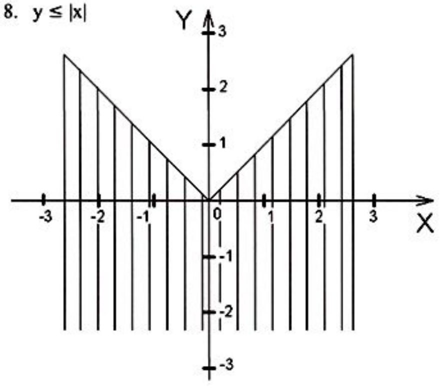

5. |x|+|y| ≤ 3
Y
X


6. |x|-|y| > 3
Y
X

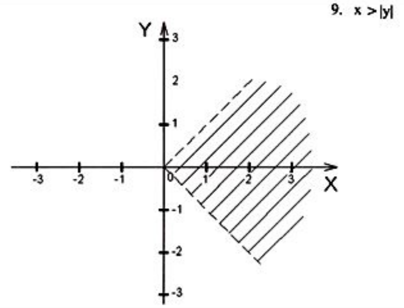
7. $|x|+|y| > 3$



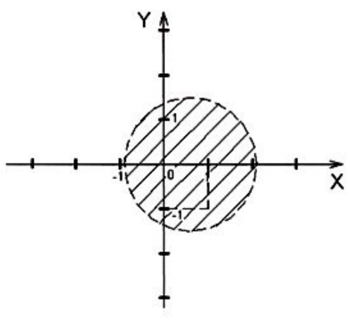
8. $y \le |x|$



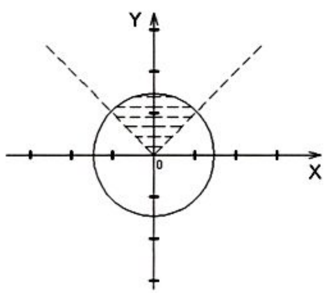
9. $x > |y|$



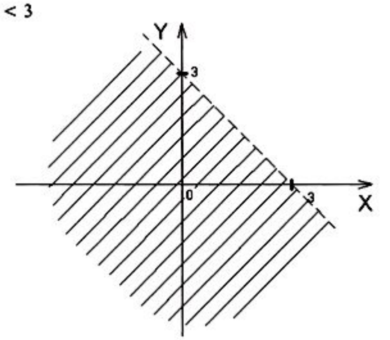
10. $x^2+y^2-2x-2y < 7$



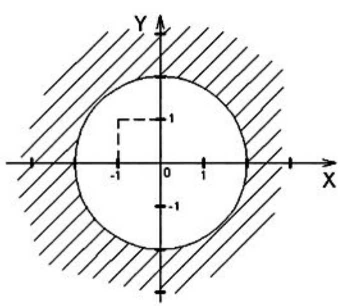
11 $\begin{cases} y > |x| \\ x^2+y^2 \le 0 \end{cases}$



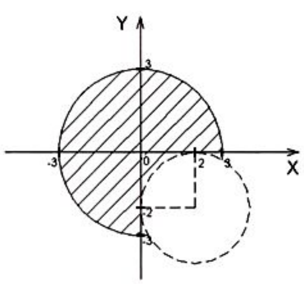
12. $x+y < 3$



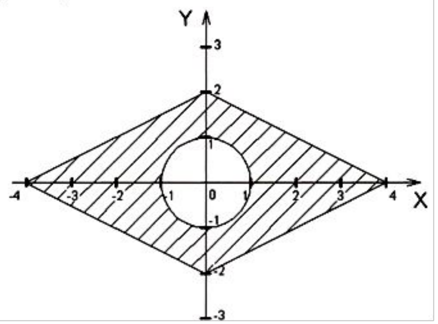
13. $x^2+y^2-2x-2y \ge 7$



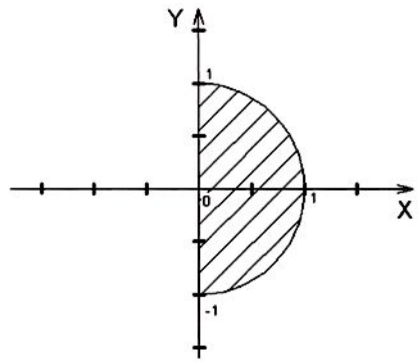
14. $\begin{cases} x^2+y^2-4x+6y+9>0 > 0 \\ x^2+y^2 \le 9 \end{cases}$



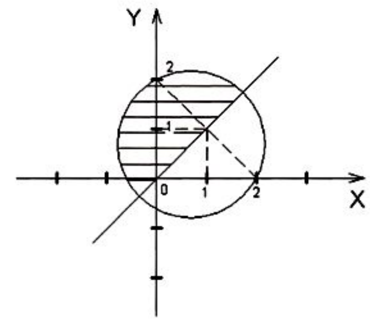
15. $\begin{cases} |x| + 2|y| \le 4 \\ x^2 + y^2 \ge 1 \end{cases}$



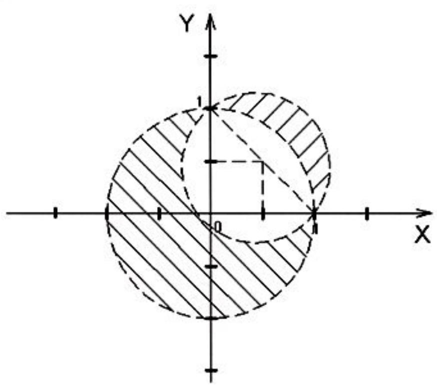
16. $x \ge |x^3+xy^2|$



17. $x^2+y^2 \le 2x+2y \le 4y$



18. $\dfrac{x-y-1}{x^2+y^2-1} < 1$



19 $x^2 + y^2 \le 2|x| - 2|y|$

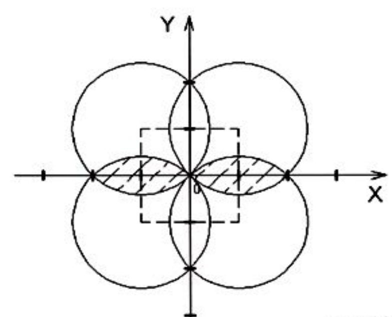
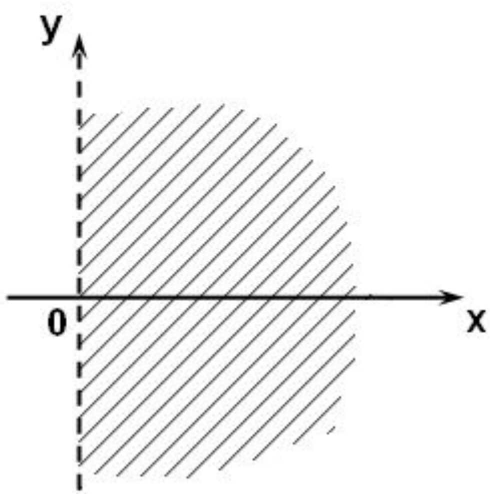
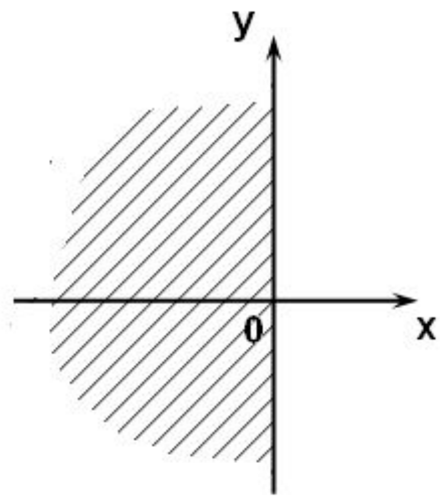
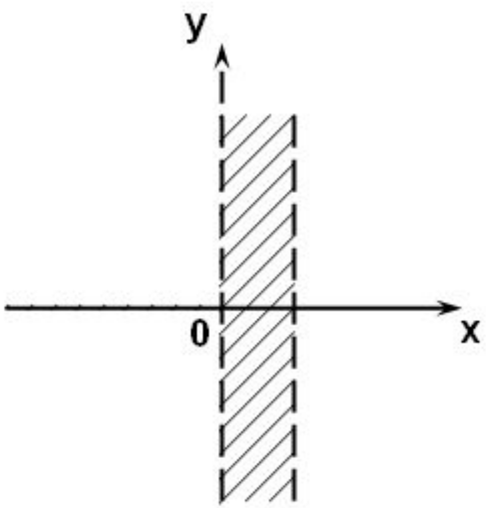


рис.20

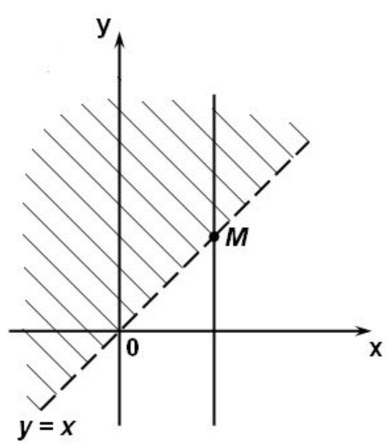
Упражнение 1

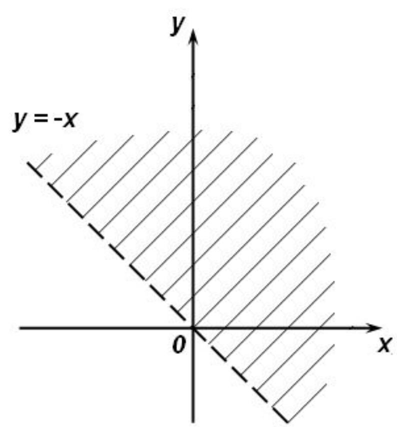


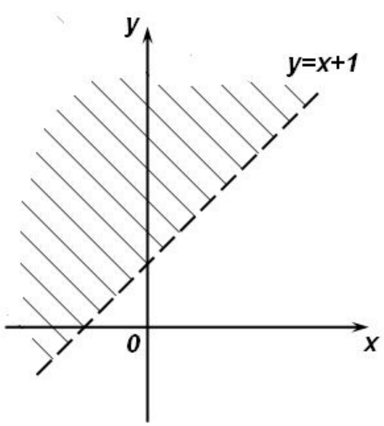




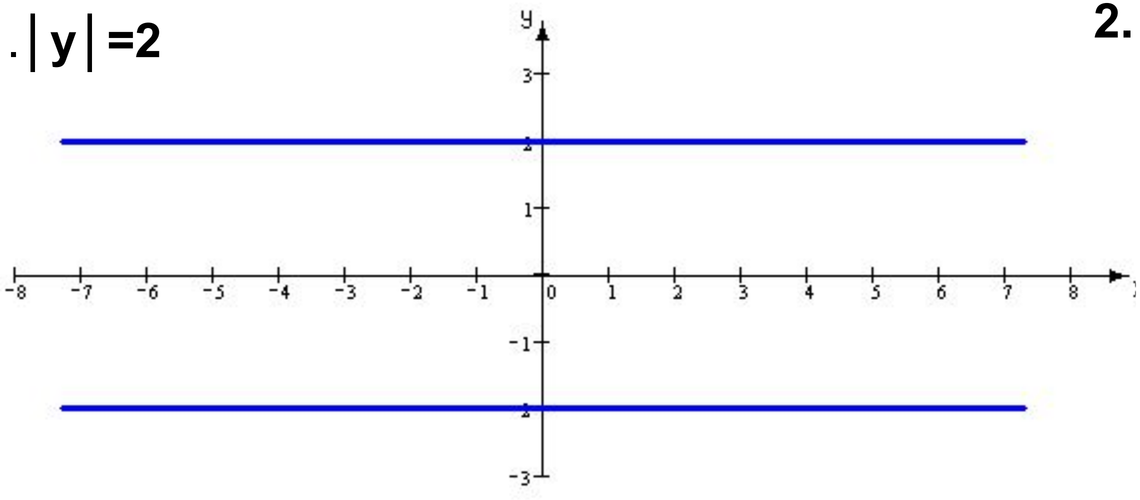
Упражнение 2



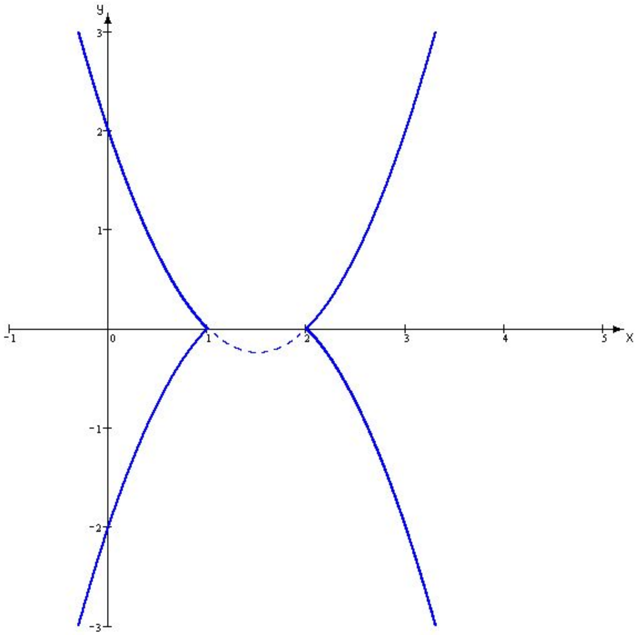




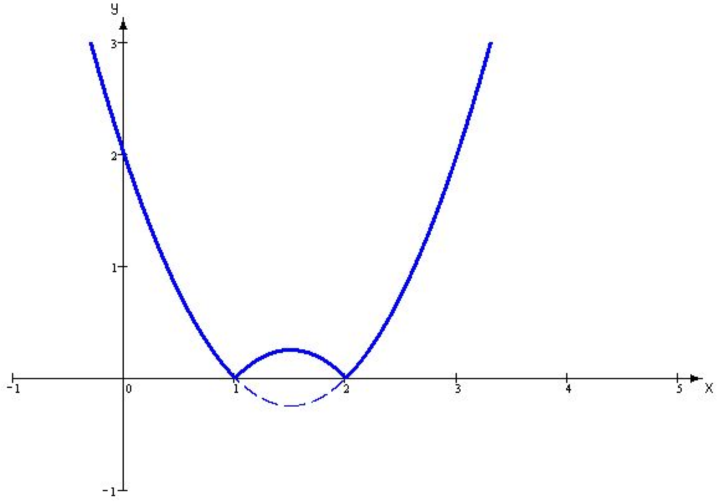
1. $|y| = 2$



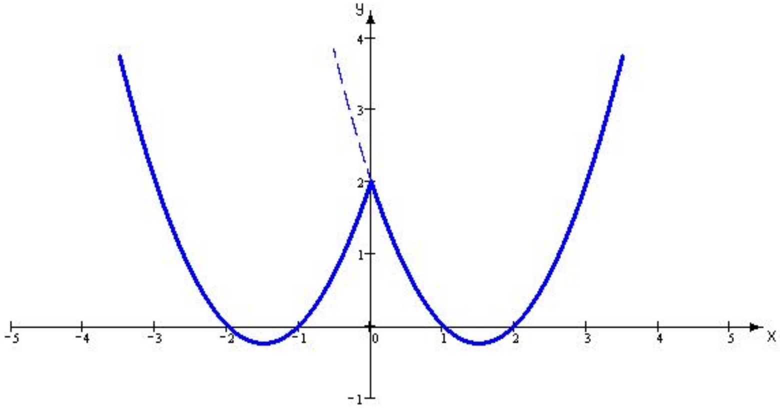
2. $|y| = x^2 - 3x + 2$



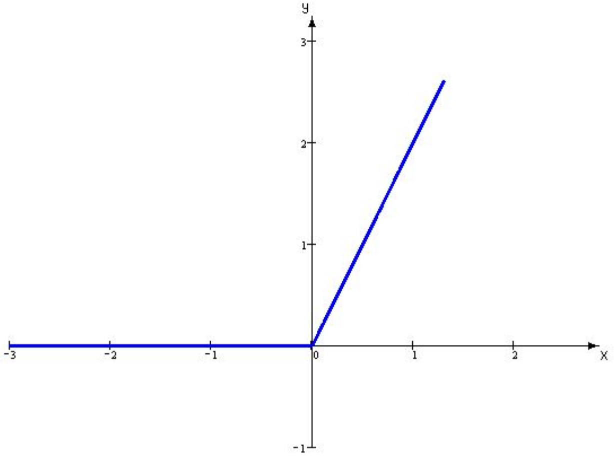
3. $y = |x^2 - 3x + 2|$



4. $y = x^2 - 3|x| + 2$



5. $y = |x| + x$



6. $y = |x|(x-2)$