

Периодические функции

Алгебра и начала анализа, 10 класс
(профильный уровень)
А.Г.Мордкович, П.Е.Семёнов

Учитель Волкова С.Е.

Определение 1

Говорят, что функция

$y = f(x)$, $x \in X$ имеет период T , если для любого $x \in X$ выполняется равенство

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Если функция с периодом T определена в точке x , то она определена и в точках

$$x + T, x - T.$$

Любая функция имеет период, равный нулю при $T = 0$ получим $f(x - 0) = f(x) = f(x + 0)$.

Определение 2

- **Функцию, имеющую отличный от нуля период T , называют периодической.**

Если функция $y = f(x)$, $x \in X$ имеет период T , то любое число, кратное T (т.е. число вида kT , $k \in \mathbb{Z}$), также является её периодом.

Доказательство

Пусть $2T$ – период функции. Тогда
 $f(x) = f(x + T) = f((x + T) + T) = f(x + 2T),$
 $f(x) = f(x - T) = f((x - T) - T) = f(x - 2T).$

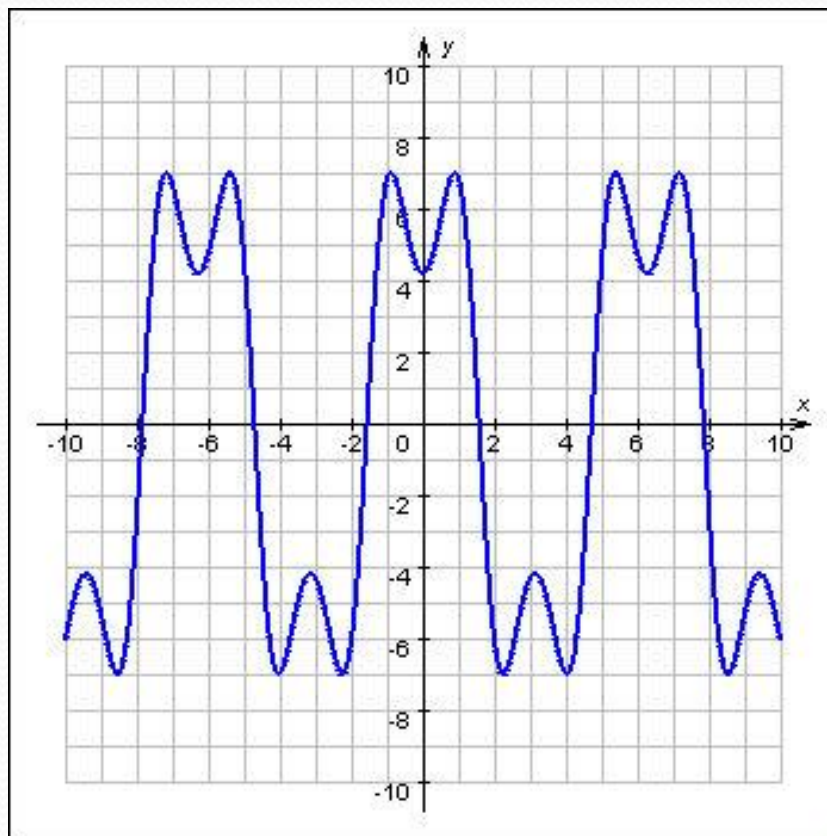
Аналогично доказывается, что

$$f(x) = f(x + 3T) = f(x - 3T),$$

$$f(x) = f(x + 4T) = f(x - 4T) \text{ и т.д.}$$

$$\text{Итак, } f(x - \kappa T) = f(x) = f(x + \kappa T)$$

*Наименьший период среди положительных периодов периодической функции называется **основным периодом** данной функции.*



Особенности графика периодической функции

- Если T – основной период функции $y = f(x)$, то достаточно:
 - построить ветвь графика на одном из промежутков длины T
 - выполнить параллельный перенос этой ветви вдоль оси x на $\pm T, \pm 2T, \pm 3T$ и т.д.

Обычно выбирают промежуток с концами в точках

$$\left(-\frac{T}{2}; 0\right) \text{ и } \left(\frac{T}{2}; 0\right)$$

Свойства периодических функций

1. Если $f(x)$ – периодическая функция с периодом T , то функция $g(x) = A f(kx + b)$, где $k > 0$, также является периодической с периодом $T_1 = T/k$.
2. Пусть функция $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определены на всей числовой оси и являются периодическими с периодами $T_1 > 0$ и $T_2 > 0$. Тогда при $T_1/T_2 \in \mathbb{Q}$ функция $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ – периодическая функция с периодом T , равным наименьшему общему кратному чисел T_1 и T_2 .

Примеры

1. Периодическая функция $y = f(x)$ определена для всех действительных чисел. Её период равен 3 и $f(0) = 4$. Найти значение выражения $2f(3) - f(-3)$.

Решение .

$$T = 3,$$

$$f(3) = f(0+3) = 4,$$

$$f(-3) = f(0-3) = 4, f(0) = 4.$$

Подставив полученные значения в выражение

$$2f(3) - f(-3), \text{ получим } 8 - 4 = 4.$$

Ответ: 4.

Примеры

2. Периодическая функция $y = f(x)$ определена для всех действительных чисел. Её период равен 5, а $f(-1) = 1$. Найти $f(-12)$, если $2f(3) - 5f(9) = 9$.

Решение

$$T = 5$$

$$f(-1) = 1$$

$$f(9) = f(-1 + 2T) = 1 \Rightarrow 5f(9) = 5$$

$$2f(3) = 9 + 5f(9) = 14 \Rightarrow f(3) = 7$$

$$f(-12) = f(3 - 3T) = f(3) = 7$$

Ответ: 7.

Используемая литература

- А.Г.Мордкович, П.В.Семёнов. Алгебра и начала анализа (профильный уровень), 10 класс
- А.Г.Мордкович, П.В.Семёнов. Алгебра и начала анализа (профильный уровень), 10 класс.
Методическое пособие для учителя