Российский химико-технологический университет
им. Д. И. Менделеева

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 1. Определители 2 и 3 порядков. Векторы: основные понятия, линейные операции. Скалярное произведение и его свойства. Условие ортогональности.

План лекции

1. Определители 2 и 3 порядков
2. Векторы: основные понятия
3. Основные операции над векторами
4. Дополнительные операции
5. Скалярное произведение векторов
6. Решение задач

Определители 2 и 3 порядков

Определение. Рассмотрим четыре числа: a, b, c и d. Из них можно составить таблицу 2×2: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

которая называется *квадратной матрицей второго порядка*.

Определение. Числа a, b, c и d называются *элементами* матрицы. Элементы a и b образуют первую строку матрицы, элементы c и d – вторую строку; элементы a и c образуют первый столбец матрицы, элементы b и d – второй столбец.

Определение. Число $ad–bc$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ается *определителем* (*детерминантом*) матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и обозначается так: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Определители 2 и 3 порядков

Определение. Аналогично, таблица $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$,

составленная из девяти чисел, называется *квадратной матрицей третьего порядка.*

Определение. Число

$$a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

называется *определителем* (или *детерминантом*)

матрицы $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ и обозначается $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

Векторы: основные понятия

Определение. *Направленным отрезком* называется упорядоченная пара точек пространства.

Определение. *Началом* и *концом* направленного отрезка называются, соответственно, первая и вторая точки этой пары.

Определение. *Длиной* направленного отрезка называется расстояние между этими точками.

Определение. Направленный отрезок называется *нулевым*, если его начало и конец совпадают.

Определение. Два ненулевых направленных отрезка называются *коллинеарными*, если прямые, на которых они лежат, параллельны или совпадают. Нулевой направленный отрезок считается коллинеарным любому направленному отрезку

Векторы: основные понятия

Определение. Два ненулевых направленных отрезка, лежащих на параллельных прямых, *сонаправлены*, если их концы лежат по одну сторону от прямой, соединяющей их начала, и *противоположно направлены*, если по разные.

Определение. Два направленных отрезка *равны*, если они имеют одинаковую длину и сонаправлены.

Определение. *Вектором* называется любой из равных между собой направленных отрезков. Обозначение: $\vec{a}$.

Основные операции над векторами

Определение. *Суммой* $\vec{a}+\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, начало которого находится в произвольной точке *A* пространства, а конец строится следующим образом: отложим от точки *A* вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, а от точки *B* вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\vec{b}$; тогда точка *C* и будет концом вектора $\vec{a}+\vec{b}$.

Основные операции над векторами

Свойства сложения векторов:

1. $\forall \vec{a}, \vec{b}: \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (коммутативность сложения).

2. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}: \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (ассоциативность сложения).

3. $\forall \vec{a}: \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

4. $\forall \vec{a}: \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Основные операции над векторами

Определение. *Произведением* $\alpha\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на действительное число α называется вектор длины $|\alpha| \cdot |\vec{a}|$, сонаправленный с вектором $\vec{a}$, если $\alpha > 0$, и направленный противоположно вектору $\vec{a}$, если $\alpha < 0$.

Основные операции над векторами

Свойства умножения вектора на число:

1. $\forall \vec{a}; \alpha, \beta \in R: (\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ (ассоциативность).

2. $\forall \vec{a}; \alpha, \beta \in R: (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$
(дистрибутивность по отношению к сложению действительных чисел).

3. $\forall \vec{a}, \vec{b}; \alpha \in R: \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
(дистрибутивность по отношению к сложению векторов).

4. $\forall \vec{a}: 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
.

Дополнительные операции

Определение. *Разностью* $\vec{a} - \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, равный $\vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}$.

Определение. *Частным* $\vec{a} / \alpha$ от деления вектора $\vec{a}$ на число $\alpha (\alpha \neq 0)$, называется вектор $(\frac{1}{\alpha}) \cdot \vec{a}$.

Определение. Три ненулевых вектора называются *компланарными*, если будучи отложенными от одной точки, оказываются лежащими в одной плоскости. (Нулевой вектор компланарен с любыми двумя векторами).

Линейная комбинация

Определение. *Линейной комбинацией* векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ называется выражение вида $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{a_n}$, где коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – действительные числа.

Определение. Если вектор представлен как линейная комбинация некоторых векторов, то говорят, что он *разложен* по этим векторам.

Определение. Линейная комбинация векторов называется *тривиальной*, если все ее коэффициенты равны нулю, и *нетривиальной* в противном случае.

Линейная зависимость векторов

Определение. Набор векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ называется *линейно зависимым*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору, и *линейно независимым* в противном случае.

Теорема. Для того чтобы два вектора были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы они были коллинеарны.

Линейная зависимость векторов

Теорема. Для того чтобы три вектора были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы они были компланарны.

Теорема. Всякие четыре вектора в пространстве (R^3) линейно зависимы.

Определение. *Базисом* называется максимальный набор линейно независимых векторов, взятых в определенном порядке.

Замечание. Базисом на плоскости является упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$, лежащих в этой плоскости, а базисом в пространстве – упорядоченная тройка $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ некомпланарных векторов .

Разложение по базису

Определение. Если вектор $\vec{a}$ разложен по базису $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$, т. е. $\vec{a} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \alpha_3\overrightarrow{a_3}$, то числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ называются *координатами* вектора $\vec{a}$ в базисе $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$.

Теорема. Всякий вектор в пространстве (R^3) может быть и при том единственным образом разложен по базису в этом пространстве.

Угол между векторами

Определение. Пусть даны два направленных отрезка $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ с общим началом. *Углом* между ними назовем наименьший из плоских углов, образованных лучами *OA* и *OB*, если $\overrightarrow{OA} \neq \vec{0}$ и $\overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$. Если же хотя бы один из этих направленных отрезков нулевой, то угол между ними не определяется.

Определение. *Углом между двумя векторами* называется угол между изображающими их направленными отрезками, отложенными от одной точки пространства.

Определение. Два вектора называются *ортогональными*, если угол между ними равен 90°.

Скалярное произведение векторов

Определение. *Скалярным произведением* двух ненулевых векторов называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними. Если хотя бы один из векторов нулевой, то их скалярное произведение по определению полагают равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Скалярное произведение векторов

Свойства скалярного произведения:

1. $\forall \vec{a}, \vec{b}: \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot a$ (коммутативность).

2. $\forall \vec{a}: \ \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$; выражение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется *скалярным квадратом* вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^2$.

3. Если $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$, то $\vec{a} = \vec{0}$.

4. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{n}; \alpha, \beta \in R: (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) \cdot \vec{n} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{n}) + \beta(\vec{b} \cdot \vec{n})$

(линейность).

Ортогональность

Теорема. Для того чтобы два ненулевых вектора были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение равнялось нулю.

Определение. Базис называется *ортогональным*, если его векторы попарно ортогональны.

Определение. Базис называется *нормированным*, если его векторы имеют единичную длину.

Определение. Базис называется *ортонормированным*, если он ортогональный и нормированный.

Направляющие косинусы

Определение. Векторы ортонормированного базиса называются *ортами*.

Определение. *Направляющими косинусами* вектора называются косинусы углов α, β, γ , образуемых этим вектором с векторами ортонормированного базиса.

Замечание. $$cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|}, cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|}, cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

Свойство направляющих косинусов:

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$$

Проекция вектора на другой вектор

Определение. *Проекцией* вектора $\vec{a}$ на ненулевой вектор $\vec{b}$ называется вектор, сонаправленный вектору $\vec{b}$ и имеющий длину (с учетом знака):

$$\Pi p_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot cos\angle(\vec{a};\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Теорема. В ортонормированном базисе скалярное произведение векторов равно сумме произведений их соответствующих координат.

Решение задач

Пример 1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$

Решение. $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5) - (-2) \cdot 3 = 1.$

Пример 2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

$= 1 \cdot 9 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) = -1$

Решения задач

Пример 3. В четырехугольнике *ABCD* точки *P* и *Q* – середины сторон *BC* и *AD*, соответственно. Выразить вектор $\overrightarrow{PQ}$ через векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$

Решение.

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$$

Пример 4. В параллелограмме *ABCD* точки *P* и *Q* – середины сторон *BC* и *AD*, соответственно. Найти координаты вектора $\overrightarrow{PQ}$, если за базисные векторы приняты $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{AB}$.

Решение.

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{e_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{e_2}$$

т. е. $\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ в базисе $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$.

Решение задач

Пример 5. В пирамиде *ABCD* точки *P* и *Q* – середины ребер *AD* и *BC* соответственно. Найти координаты вектора $\overrightarrow{PQ}$ базисе $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{AD}$.

Решение. $$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$
$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{e_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{e_2} - \frac{1}{2}\overrightarrow{e_3}$$

т. е. $\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ в базисе $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$.

Пример 6. Дано: $\vec{a} = (-1; 2; 5)$ $\vec{b} = (1; 3; 7)$. Найти $7\vec{a} - 5\vec{b}$

Решение. $7\vec{a} = (-7; 14; 35)$, $5\vec{b} = (5; 15; 35)$. Тогда $7\vec{a} - 5\vec{b} = (-12; -1; 0)$.

Решение задач

Пример 7. Проверить, что векторы $\vec{a} = (-1; 3)$ и $\vec{b} = (2; 2)$ на плоскости не коллинеарны, и разложить вектор $\vec{c} = (7; -5)$ по базису $\vec{a}, \vec{b}$.

Решение. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Следовательно, они образуют базис на плоскости. Тогда $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Расписывая по каждой координате, получаем уравнения $7 = x \cdot (-1) + y \cdot 2$ и $2 = x \cdot 3 + y \cdot 2$, откуда $x = -3, y = 2$. То есть: $\vec{c} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$

Пример 8. Найти длину вектора $\vec{a} = (-3; 4)$ на плоскости и вектора $\vec{b} = (1; -2; 2)$ в пространстве.

Решение. $|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$, $|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$.

Решение задач

Пример 9. Найти направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(1;-1;3), B(2;1;1).$

Решение. $\overrightarrow{AB} = (1;2;-2)$. Тогда $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+4+4} = 3$.

Следовательно, $cos\alpha = \frac{1}{3}, cos\beta = \frac{2}{3}, cos\gamma = -\frac{2}{3}$.

Пример 10. Вектор $\vec{a}$ образует с осями *OX* и *OY* углы 60°. Какой угол он образует с осью *OZ*?

Решение. Так как $cos^2 60^\circ + cos^2 60^\circ + cos^2\gamma = 1$, то $cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно, $\gamma = 45^\circ$ или $\gamma = 135^\circ$

Решение задач

Пример 11. Вектор $\vec{a}$ образует с осями координат равные острые углы. Найти эти углы.

Решение. Так как $cos^2\alpha + cos^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, то $cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Учитывая, что углы острые, $cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Тогда $\alpha = arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Пример 12. Даны точки $A(2;0;1), B(2;1;0), C(1;0;0).$ Найти угол *ABC*.

Решение. $\overrightarrow{BA} = (0;-1;1)$, $\overrightarrow{BC} = (-1;-1;0)$. Тогда

$$cos\varphi = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \frac{0\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1)+1\cdot 0}{\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+0^2}} = \frac{1}{2},$$

$\varphi = 60^\circ$

Решение задач

Пример 13. Найти проекцию вектора $\vec{a} = (1; 2; 3)$ на ось l, образующую с координатными осями равные острые углы.

Решение. В качестве $\vec{l}$ можно взять $(1; 1; 1)$. Тогда

$$\text{Пр}_{\vec{l}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{l}}{|\vec{l}|} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Пример 14. Даны векторы $\vec{a} = (1; 2; -1)$ и $\vec{b} = (2; -1; 3)$. Найти $\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}$.

Решение.

$$\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3}{\sqrt{6}} = -\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Спасибо за внимание!