



Кратные интегралы и ряды

Математический анализ
3 семестр

Лекция 1

Знакопостоянные числовые ряды.

05 сентября 2018 года

Лектор: Профессор НИЯУ МИФИ, д.ф.-м.н.
Орловский Дмитрий Германович



Понятие числового ряда и его сходимости

Пусть имеется числовая последовательность

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots = \{u_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Символ

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1)$$

будем называть **числовым рядом**, а элементы последовательности – его **членами**. Рассмотрим теперь последовательность **частичных сумм** ряда (1):

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \quad \dots,$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \quad \dots = \{S_n\}_{n=1}^{\infty}.$$



Понятие числового ряда и его сходимости

Определение. Если существует конечный или нет предел последовательности частичных сумм

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

то он называется **суммой ряда (1)**, при этом пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S.$$

Если $|S| < +\infty$, то ряд (1) называют **сходящимся**, если же

$$|S| = +\infty$$

или не существует, то ряд называют **расходящимся**.



Пример

Пример:

Доказать по определению, что ряд сходится, и вычислить его сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

Решение

$$\frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{(2k - 1)(2k + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(2k - 1)} - \frac{1}{(2k + 1)} \right)$$



Пример

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(2k-1)} - \frac{1}{(2k+1)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$



Пример

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$

Доказать по определению, что этот ряд расходится.

Решение:

Можно указать две подпоследовательности последовательности частичных сумм, имеющие различные пределы:

$$\begin{cases} S_{2m-1} = -1 \rightarrow -1, \\ S_{2m} = 0 \rightarrow 0. \end{cases}$$

Следовательно, последовательность частичных сумм предела не имеет, и ряд расходится.



Ряд из геометрической прогрессии

Пример: ряд, образованный геометрической прогрессией.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + \dots + q^n + \dots$

Замечание. Ради удобства нумерация членов ряда не всегда начинается с единицы, при этом n -ой частичной суммой все равно считается сумма всех членов ряда до u_n включительно.

В данном случае частичная сумма

$$S_n = \begin{cases} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, & q \neq 1, \\ n + 1, & q = 1. \end{cases}$$

Отсюда $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$ (сходится) при $|q| < 1$; расходится при $|q| \geq 1$.



Связь сходимости последовательности и ряда

Понятия сходимости ряда и последовательности тесно связаны. Так сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

есть сходимость последовательности его частичных сумм.

$$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Верно и обратное. Для любой последовательности

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

можно построить такой ряд, для которого члены этой последовательности являются частичными суммами:



Связь сходимости последовательности и ряда

$$u_1 = a_1, \quad u_2 = a_2 - a_1, \quad u_3 = a_3 - a_2, \quad \dots,$$

$$u_n = a_n - a_{n-1}, \quad \dots$$

Тогда частичными суммами ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

будут элементы последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_2, \dots, \quad S_n = a_n, \dots$$



Теорема (критерий Коши)

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall m > n > N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^m u_k \right| < \varepsilon \right).$$

(это условие называется **условием Коши** для ряда)



Критерий Коши

Доказательство: следует из связи сходимости ряда со сходимостью последовательности его частичных сумм. По критерию Коши для последовательностей

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall m > n > N \Rightarrow |S_m - S_n| < \varepsilon$$

$$S_m - S_n = (u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_m) - \\ - (u_1 + u_2 + \dots + u_n) = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_m = \sum_{k=n+1}^m u_k$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall m > n > N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^m u_k \right| < \varepsilon$$



Необходимое условие сходимости

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Доказательство. Пусть данный ряд сходится, применим критерий Коши при $m=n+1$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+1} u_k \right| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \Rightarrow |u_{n+1}| < \varepsilon$$

Но это равносильно тому, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$



Построение отрицания критерия Коши

Критерий Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall m > n > N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^m u_k \right| < \varepsilon$$

Отрицание:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists m > n > N : \left| \sum_{k=n+1}^m u_k \right| \geq \varepsilon.$$



Расходимость гармонического ряда

Гармонический ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Отрицание критерия Коши:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \quad \exists m > n > N : \left| \sum_{k=n+1}^m u_k \right| \geq \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = 1/2$ и N - любое, выберем $n=N+1$, $m=2N+1$ ($m > n > N$), тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} \right| &= \left| \sum_{k=N+2}^{2N+2} \frac{1}{k} \right| = \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{2N+2} \geq \\ &\geq \frac{1}{2N+2} + \dots + \frac{1}{2N+2} = \frac{N+1}{2N+2} = \frac{1}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, гармонический ряд расходится, хотя необходимое условие сходимости выполнено:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$



Остаток ряда

Определение.

Ряд $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ называется n-ым остатком ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Утверждение. Последовательность остатков сходящегося ряда является бесконечно малой.

Доказательство. Последовательность частичных сумм ряда r_n

$$\sigma_m = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m} = (u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m}) - (u_1 + u_2 + \dots + u_n) = S_{n+m} - S_n \rightarrow S - S_n \quad m \rightarrow \infty$$

Следовательно, сумма ряда-остатка

$$r_n = S - S_n \text{ при } S - S = 0 \quad n \rightarrow \infty$$



Изменение конечного числа членов ряда

Теорема. Изменение конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость или расходимость.

Доказательство. Пусть два ряда отличаются конечным числом членов, тогда начиная с некоторого номера частичные суммы этих рядов будут отличаться на постоянную величину

$$\exists N \quad \forall n \geq N \quad S'_n = S_n + \text{const}$$

но тогда пределы последовательностей частичных сумм оба либо существуют, либо не существуют.

Задача. Если к ряду добавить конечное число членов или выбросить из него конечное число членов, то сходимость (расходимость) этого ряда не изменится.



Арифметические свойства сходящихся рядов

Задачи.

- Если $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится, и его сумма равна S , то $\forall c \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (c \cdot u_k)$ также сходится, причем его сумма равна $c \cdot S$.
- Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ сходятся, и их суммы равны соответственно S_u и S_v , то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k + v_k)$ также сходится, и его сумма $S_{u+v} = S_u + S_v$.
- Ряды $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} (c \cdot u_k)$, где $c \neq 0$, сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство этих утверждений основано на связи сходимости ряда со сходимостью последовательности (частичных сумм) и на арифметических свойствах предела последовательности.



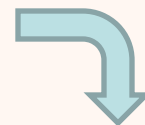
Знакоположительные ряды

Рассмотрим ряд все члены которого неотрицательны. Такой ряд называется **знакоположительным**. Аналогично можно рассмотреть **знакоотрицательный** ряд, все члены которого неположительны.

Оба типа рядов носят название **знакопостоянных (знакоопределенных)**. Для таких рядов можно сформулировать особые признаки сходимости.

Далее будем рассматривать только знакоположительные ряды (знакоотрицательные сводятся к ним умножением ряда на -1).

$$S_{n+1} - S_n = u_n$$



Ряд является знакоположительным тогда и только тогда, когда частичные суммы ряда образуют монотонно неубывающую последовательность.



Критерий сходимости знакоположительного ряда

Теорема. Знакоположительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (\forall n \quad u_n \geq 0)$$

сходится тогда и только тогда, когда последовательность частичных сумм ряда S_n ограничена сверху, при этом сумма ряда равна точной верхней грани последовательности частичных сумм.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sup_{n \geq 1} S_n$$

Утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы о пределе неубывающей последовательности.



Признаки сравнения

Пусть $\forall n \ u_n \geq v_n \geq 0$, тогда из сходимости ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, а из расходимости

ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Если S_n и S'_n частичные суммы первого и второго ряда, то

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \geq v_1 + v_2 + \dots + v_n = S'_n$$

Отсюда следует, что из ограниченности S_n (сходимости первого ряда) следует ограниченность S'_n (сходимость второго ряда), а из неограниченности S'_n (расходимости второго ряда) следует неограниченность S_n (расходимость первого ряда).



Задачи к признакам сравнения

Задача 1. Признаки сравнения остаются верными, если соотношение $u_n \geq v_n \geq 0$ становится верным с некоторого конечного номера N_0 .

Задача 2. Признаки сравнения остаются верными, если соотношение $u_n \geq v_n \geq 0$ заменить на $c \cdot u_n \geq v_n \geq 0$, $c > 0$.

Указание. В первой задаче перейти к рядам с выброшенными N_0 первыми членами. Во второй задаче воспользоваться равносильностью сходимости рядов с общими членами u_n и cu_n .



Признак сравнения в предельной форме

Пусть $\forall n \ u_n > 0$ и существует конечный предел

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} > 0$$

Тогда оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ либо сходятся, либо расходятся.

Так как последовательность v_n/u_n сходится, то она ограничена

$$\frac{v_n}{u_n} = \left| \frac{v_n}{u_n} \right| \leq c$$

Переходя в этом неравенстве к пределу получим, что

$L \leq c$ откуда следует, что $c \neq 0$ (так как $L \neq 0$). Кроме того неравенство ограниченности можно записать в виде $v_n \leq cu_n$. Утверждение теоремы теперь следует из задачи 2.



Признак Даламбера

Теорема (Признак Даламбера в допредельной форме).

Пусть все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ положительны ($\forall n$ тогда).

Если $\forall n \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q < 1$, то ряд сходится.

Если $\forall n \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, то ряд расходится.



Признак Даламбера

Доказательство.

$$1) \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{u_3}{u_2} \cdot \frac{u_4}{u_3} \boxtimes \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdot \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq q \cdot q \cdot q \boxtimes q \cdot q = q^{n-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{u_n}{u_1} \leq q^{n-1} \Rightarrow u_n \leq u_1 q^{n-1}$$

Утверждение теоремы следует теперь из теоремы сравнения.

$$2) \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{u_3}{u_2} \cdot \frac{u_4}{u_3} \boxtimes \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdot \frac{u_n}{u_{n-1}} \geq 1 \cdot 1 \cdot 1 \boxtimes 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \frac{u_n}{u_1} \geq 1 \Rightarrow u_n \geq u_1$$

Если бы ряд сходиллся, то должно быть выполнено необходимое условие: предел общего члена равен нулю, однако из полученного неравенства следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \geq u_1 > 0$$

(противоречие). Следовательно, ряд расходится.



Признак Даламбера

Теорема (Признак Даламбера в предельной форме).

Пусть все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ положительны и существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$. Тогда если $q < 1$, то ряд сходится, а если $q > 1$, то ряд расходится.

Пусть $q < 1$, возьмем $q_1 \in (q, 1)$ и $\varepsilon = q_1 - q$. Тогда $\varepsilon > 0$ и по определению предела найдется такое N , что при всех $n > N$

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - q \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} - q < \varepsilon \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < \varepsilon + q = q_1 < 1$$

Поэтому для ряда $\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$ выполнено условие признака Даламбера в предельной форме. Следовательно этот ряд сходится, а вместе с ним сходится и исходный ряд.



Признак Даламбера

Пусть $q_1 > 1$, возьмем $q_1(\epsilon)$ и $\epsilon = q - q_1$. Тогда $q_1 > 1$ и по определению предела найдется такое N , что при всех $n > N$

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - q \right| < \epsilon \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} - q > -\epsilon \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > q - \epsilon = q_1 > 1$$

Поэтому для ряда $\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$ выполнено условие признака Даламбера в допредельной форме. Следовательно этот ряд расходится, а вместе с ним расходится и исходный ряд.

Рассмотренные выше примеры сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ и расходящегося ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ показывают, что при $q=1$ признак Даламбера ответа на вопрос сходимости не

дает. Для обоих рядов величина $q = 1$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 1}{4(n+1)^2 - 1} = 1$.



Радикальный признак Коши

Теорема (признак Коши в допредельной форме).

Пусть все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ неотрицательны, N_0 - некоторый номер. Тогда

Если $\forall n > N_0 \quad \sqrt[n]{u_n} \leq q < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится;

Если $\forall n > N_0 \quad \sqrt[n]{u_n} \geq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Доказательство.

При всех $n > N_0 \quad \sqrt[n]{u_n} < q \Rightarrow u_n < q^n$. Так как $q < 1$, то по признаку сравнения ряд $\sum_{n=N_0}^{\infty} u_n$ вместе с ним и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходятся.

При всех $n > N_0 \quad \sqrt[n]{u_n} \geq 1 \Rightarrow u_n \geq 1$. Не выполнено необходимое условие сходимости ряда. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.



Радикальный признак Коши

Теорема (признак Коши в предельной форме).

Пусть все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ неотрицательны и существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = q$. Тогда если $q < 1$, то ряд сходится, а если $q > 1$, то ряд расходится.

Пусть $q < 1$, возьмем $q_1 \in (0, q)$ и $\varepsilon = q - q_1 > 0$. Тогда по определению предела найдется такое N_0 , что при всех $n > N_0$

$$|\sqrt[n]{u_n} - q| < \varepsilon \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} - q < \varepsilon \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} < \varepsilon + q = q_1 \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} < q_1 < 1$$

Согласно признаку Коши в предельной форме ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

Пусть $q > 1$, возьмем $q_1 \in (1, q)$ и $\varepsilon = q - q_1 > 0$. Тогда по определению предела найдется такое N_0 , что при всех $n > N_0$

$$|\sqrt[n]{u_n} - q| < \varepsilon \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} - q > -\varepsilon \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} > q - \varepsilon = q_1 \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} > q_1 > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} > 1$$

Согласно признаку Коши в предельной форме ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.



Радикальный признак Коши

Так же как и в случае признака Даламбера, признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда для случая $q=1$. В качестве примеров подходят те же ряды, которые мы рассматривали для признака Даламбера.

Примеры сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ и расходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ показывают, что при $q=1$ признак Коши ответа на вопрос сходимости не дает. Для обоих рядов величина $q = 1$.

Задача.

Показать самим, что
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{4n^2 - 1}{4(n+1)^2 - 1}} = 1.$$



Интегральный признак Коши-Маклорена

Теорема (признак Коши-Маклорена).

Пусть функция $f(x)$ неотрицательна и невозрастает на промежутке

Тогда ряд $() \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходит

сится интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

Доказательство.

Так как заданная функция неотрицательна, то сходимость ряда равносильна ограниченности частичных сумм

$$S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n),$$

а сходимость интеграла равносильна ограниченности первообразной

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt.$$



Интегральный признак Коши-Маклорена

Выведем сначала нужные для доказательства оценки. В силу монотонности подинтегральной функции и свойств интеграла

$$\int_k^{k+1} f(k+1) dt \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} f(k) dt$$

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$$

$$f(2) + f(3) + \dots + f(n) \leq \int_1^2 f(t) dt + \int_2^3 f(t) dt + \dots + \int_{n-1}^n f(t) dt \leq f(1) + f(2) + \dots + f(n-1)$$

$$S_n - f(1) \leq \int_1^n f(t) dt \leq S_{n-1} \Rightarrow S_n - f(1) \leq F(n) \leq S_{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_n \leq F(n) + f(1) \\ F(n) \leq S_{n-1} \end{cases}$$



Интегральный признак Коши-Маклорена

Теперь воспользуемся полученными неравенствами

$$\begin{cases} S_n \leq F(n) + f(1) \\ F(n) \leq S_{n-1} \end{cases}$$

Пусть сходится несобственный интеграл, тогда ограничена первообразная:

$$\exists M > 0 \quad \forall x \in [1; +\infty) \quad F(x) \leq M,$$

но тогда при всех n

$$S_n \leq F(n) + f(1) \leq M + f(1),$$

т.е. ограничены частичные суммы ряда и поэтому ряд сходится.

Пусть сходится ряд. Тогда ограничены частичные суммы ряда

$$\exists M > 0 \quad \forall n \quad S_n \leq M,$$

но тогда при всех $x \geq 1$

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt \leq \int_1^{[x]+1} f(t) dt = F([x]+1) \leq S_{[x]} \leq M,$$

т.е. ограничена первообразная и поэтому интеграл сходится.



Основные вопросы по лекции

Понятие числового ряда, его сходимость и, суммы.

Критерий Коши сходимости числового ряда.

Необходимое условие сходимости.

Арифметические свойства сходящихся рядов.

Ряды с неотрицательными членами. Критерий сходимости.

Ряды с неотрицательными членами. Признаки сравнения.

Признак Даламбера в допредельной и предельной форме.

Признак Коши в допредельной и предельной форме.

Интегральный признак Коши-Маклорена.



Математический анализ.
«Знакопостоянные числовые ряды»
Лекция 1
Завершена.

Спасибо за внимание!

Тема следующей лекции:
«Знакопеременные числовые ряды».
Лекция состоится в среду, 12 сентября
в 12:45 по Московскому времени.