

Аналитическая геометрия

на плоскости



Аналитическая геометрия на плоскости.

Аналитическая геометрия – это та часть математики, в которой геометрические задачи решаются аналитическими (алгебраическими) методами. И в этом ей помогает метод координат. Основателем метода координат считается французский математик и философ Рене Декарт (1596-1650г.г.). Опубликование его “Геометрии” (приложение к философскому трактату “Рассуждение о методе”) в 1637 году условно считается датой рождения аналитической геометрии.

РЕНЕ ДЕКАРТ (1596-1650)



прямоугольная (декартова) система координат

Под системой координат на плоскости или в пространстве понимают способ, позволяющий численно описать положение точки плоскости или пространства. Одной из таких систем является прямоугольная (декартова) система координат. Прямоугольная система координат задается взаимно перпендикулярными прямыми (рис.1,2), на каждой из которых выбрано положительное направление, и задан единичный отрезок. Эти прямые называются осями координат, точка их пересечения O – начало координат, ox – ось абсцисс, oy – ось ординат.

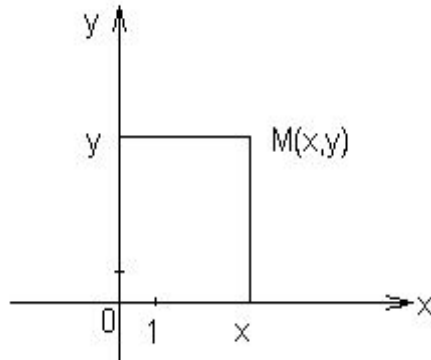


Рис.1

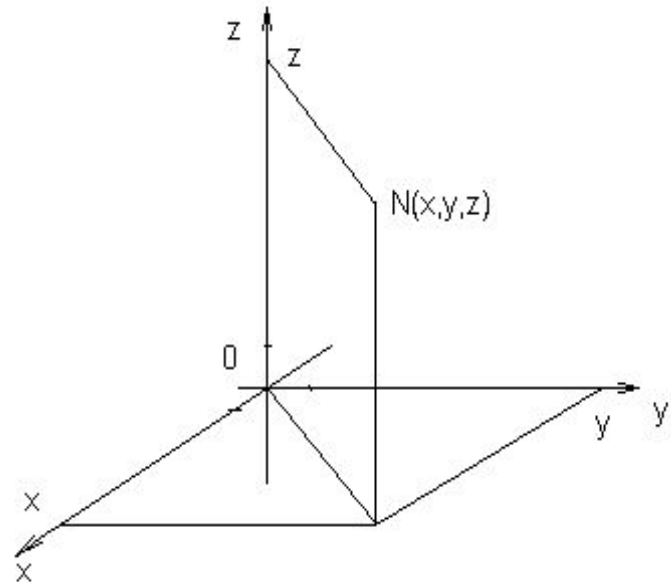


Рис.2

Важнейшим понятием аналитической геометрии на плоскости является понятие уравнения линии.

Линией, определяемой уравнением $F(x,y)=0$, называется геометрическое место точек плоскости Oxy , координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Это означает, что координаты любой точки линии, при подстановке в уравнение $F(x,y) = 0$ превращают его в тождество.

А координаты любой другой точки, не принадлежащей линии, этому уравнению не удовлетворяют.

Уравнение линии дает возможность изучение геометрических свойств линии заменить исследованием его уравнения.

Чтобы ответить на вопрос, лежит ли точка на линии L , достаточно знать координаты точки M и уравнение линии L .

Рассмотрим линии на плоскости xOy .

Окружность $x^2 + y^2 = \frac{1}{9}$, например, состоит из тех и только тех точек плоскости xOy , координаты которых удовлетворяют этому уравнению (т.е. при подстановке координат точек в данное уравнение получается тождество).



x

- **Пример.** Лежит ли точка $K(-2,1)$ на линии $2x+y+3=0$?
- *Решение.* Подставим $x=-2$, $y=1$ в уравнение линии: $2 \cdot (-2) + 1 + 3 = 0$, $0 = 0$.
- Точка $K(-2,1)$ лежит на данной линии.

Прямая на плоскости.

Простейшей из линий является прямая. Всякую прямую, не параллельную оси ординат, можно представить уравнением вида

$$y = kx + b$$

где k есть тангенс угла α , образованного прямой с положительным направлением оси абсцисс (ox).

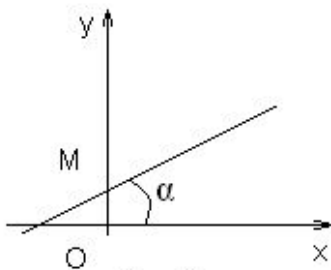


Рис. 6

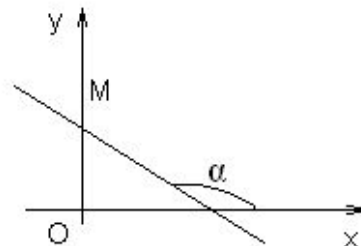


Рис. 7

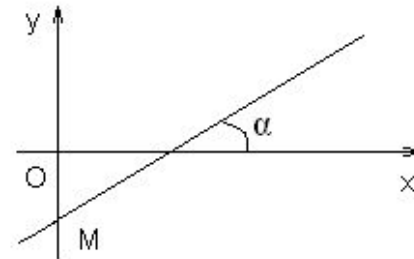


Рис. 8

$$k = \operatorname{tg} \alpha; \quad M(0, b).$$

Вывод уравнения прямой с угловым коэффициентом

Прямая образует с положительным направлением оси Ox угол α и ордината ее точки пересечения с осью Oy равна b .

Возьмем на прямой точку $M(x, y)$ тогда $OA = x$, $AM = y$, $MN = y - b$, $MN = x \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

Так как $k = \operatorname{tg} \alpha$, получим $y - b = kx$ или

$$y = kx + b.$$

Величину k называют угловым коэффициентом.

Величину b – начальной ординатой.

Если прямая параллельна оси ox , то уравнение прямой примет вид: $y = b$

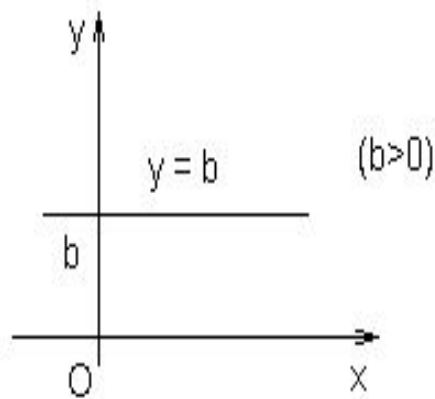


Рис. 9

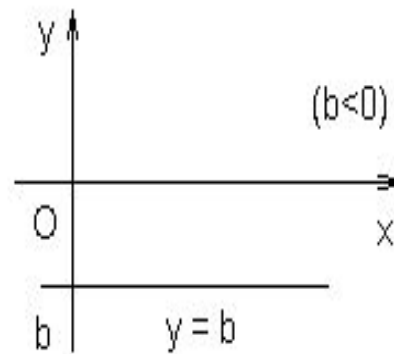


Рис. 10

Если прямая параллельна оси ou , то $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $k = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ не существует.

В этом случае уравнение прямой будет иметь вид:

$$x = a,$$

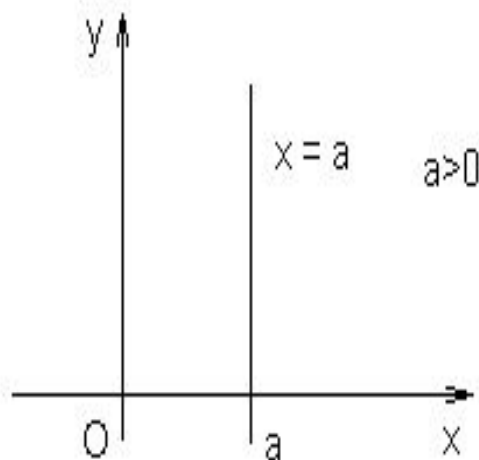


Рис. 11

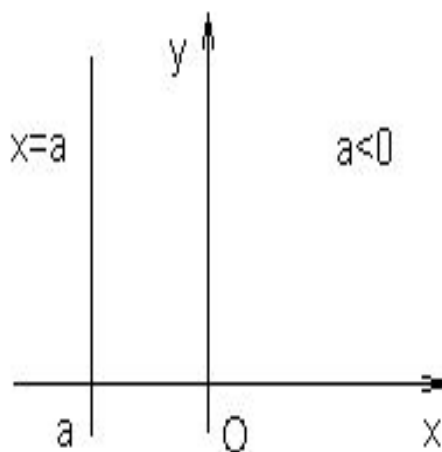


Рис. 12

Уравнение прямой, проходящей через данную точку.

Пусть прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеет угловой коэффициент k .

$$k = \operatorname{tg} \alpha.$$

Уравнение такой прямой можно записать в виде $y=kx+b$, где b - неизвестная величина.

Так как прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению $y=kx+b$.

Имеем $y_0 = k \cdot x_0 + b$. Отсюда $b = y_0 - k \cdot x_0$.

Подставим значение “ b ” в уравнение $y=kx+b$, получим

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Пример

Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1;-2)$ и образующей угол 135° с положительным направлением оси OX .

Решение

Найдем угловой коэффициент прямой: $k = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$.

Используем уравнение прямой, проходящей через данную точку:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Подставляем числовое значение углового коэффициента и координаты точки M_0 .

$$y - (-2) = -1(x - 1), \quad y = -x - 1,$$

$$x + y + 1 = 0.$$

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору.

Пусть прямая проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$.

Направляющим вектором данной прямой называется вектор, параллельный этой прямой.

Пусть дан вектор $\vec{s} = \{m; n\}$, параллельный прямой.

Возьмем на прямой произвольную точку $M(x, y)$ рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$.

Векторы $\vec{s} = \{m; n\}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарны, следовательно, их соответствующие координаты пропорциональны:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

Полученное уравнение является уравнением прямой по точке и направляющему вектору.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

Известно, что через две данные точки
можно провести единственную прямую.

Пусть прямая проходит через точки

$$M_1(x_1, y_1) \text{ и } M_2(x_2, y_2).$$

За направляющий вектор $\vec{s}$

данной прямой можно взять вектор

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}.$$

Составим уравнение прямой по точке $M_1(x_1, y_1)$

и направляющему вектору $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Пример

- Даны две точки $M_1(2, -3)$, $M_2(1, 4)$, подставляем их координаты в уравнение

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$\frac{x - 2}{1 - 2} = \frac{y - (-3)}{4 - (-3)}, \quad \frac{x - 2}{-1} = \frac{y + 3}{7}, \quad 7(x - 2) = -1(y + 3),$$

$$7(x - 2) = -1(y + 3), 7x - 14 = -y - 3, \quad 7x + y - 11 = 0$$

Частные случаи:

Если $x_1 = x_2$, то прямая параллельна оси oy .

Ее уравнение имеет вид: .

$$x = x_1$$

x

Если $y_1 = y_2$, то прямая параллельна оси ox .

Ее уравнение

$$y = y_1$$

x

Общее уравнение прямой.

$$Ax + By + C = 0$$

это уравнение называется общим уравнением прямой.

1). Если $A = 0$, то уравнение примет вид $By + C = 0$; $y = -\frac{C}{B}$.
Прямая параллельна оси ox .

2). Если $B = 0$, то уравнение примет вид: $Ax + C = 0$, $x = -\frac{C}{A}$.
Прямая параллельна оси oy .

3). Если $C = 0$, то уравнение примет вид: $Ax + By = 0$. $y = -\frac{A}{B}x$.

Прямая проходит через начало координат и имеет угловой коэффициент $k = -\frac{A}{B}$.

Задача для самостоятельного решения *

- Даны векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, совпадающие со сторонами треугольника ABC. Найти разложение по базису $\vec{b}, \vec{c}$ вектора, приложенного к вершине B и совпадающего с высотой треугольника BD.

• Ответ:
$$\overrightarrow{BD} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{c^2} \vec{c} - \vec{b}$$

Из общего уравнения прямой, если $B \neq 0$, можно найти угловой коэффициент k .

Для этого выразим y из этого уравнения : $Ax + By + C = 0$.

$$By = -Ax - C ;$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

$$k = -\frac{A}{B}$$

Пример

Найти угловой коэффициент k прямой $3x + 5y - 11 = 0$.

Сравнивая с формулой $Ax + By + C = 0$, видим, что

$A = 3$, $B = 5$, значит по формуле $k = -\frac{A}{B}$ получим:

$$k = -\frac{3}{5}.$$

ПРИМЕР

$$3x + 5y = 7, \quad 5y = 7 - 3x, \quad y = -\frac{3}{5}x + \frac{7}{5}, \quad \boxed{k = -\frac{3}{5}}$$

$$\text{Или: } 3x + 5y = 7, \quad A = 3, B = 5, \quad k = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{5}$$

Взаимное расположение прямых на плоскости.

Угол между двумя пересекающимися прямыми.

Углом между двумя пересекающимися прямыми называется острый угол между ними. На рисунке это угол φ .

Уравнение первой прямой $L_1: y = k_1x + b_1$.

Уравнение второй прямой $L_2: y = k_2x + b_2$, значит

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = k_1, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = k_2$$

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2};$$

Формула для нахождения острого угла между прямыми имеет вид:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$$

Условие параллельности двух прямых.

Пусть даны две прямые $L_1 : y = k_1x + b_1$ и $L_2 : y = k_2x + b_2$.

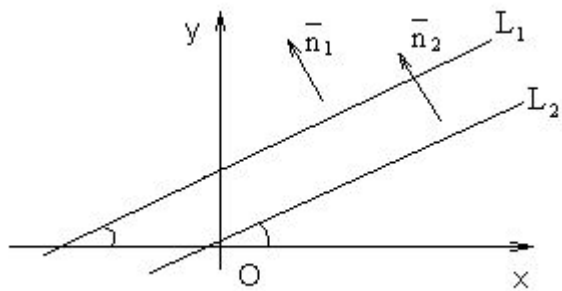


Рис. 28

Так как прямые параллельны, то они имеют одинаковый угол наклона с осью ox и, следовательно, одинаковые угловые коэффициенты:

$$k_1 = k_2.$$

Пример

- Прямые $y = 3x + 7$ и $y = 3x - 1$ параллельны, так как

$$k_1 = 3 \text{ и } k_2 = 3$$

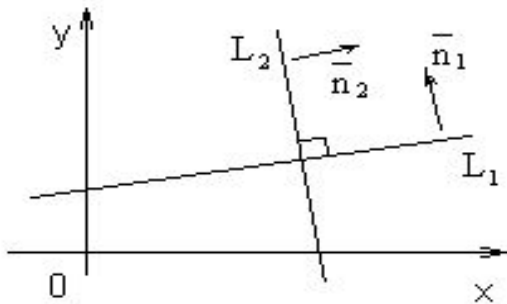
Условие перпендикулярности двух прямых.

Если две прямые $L_1 : y = k_1x + b_1$ и $L_2 : y = k_2x + b_2$ взаимно перпендикулярны, то угол между ними $\varphi = 90^\circ$. Так как $\operatorname{tg} 90^\circ$ не существует, то это означает, что в

формуле $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$ знаменатель равен 0: $1 + k_1 k_2 = 0$. Отсюда $k_1 k_2 = -1$

или

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}$$



Это и есть условие перпендикулярности двух прямых.

Пример

- Прямые $y = 3x + 7$ и $y = -\frac{1}{3}x - 1$ перпендикулярны,
так как

$$k_1 = 3 \quad \text{и} \quad k_2 = -\frac{1}{3}$$

- То есть

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}$$