

25.05.20

# Производная

---

Домашняя работа.

№ 39.34 а)

Дано:  $y = 2x - 3$ ,  $x_0 = 3$ ,  $x_1 = 3,2$

Найти: прирост ф-ции.

Решение:  $\Delta y = y(x_1) - y(x_0) \Rightarrow \Delta y = (2 \cdot 3,2 - 3) -$   
 $-(2 \cdot 3 - 3) = 3,4 - 3 = 0,4$

Ответ:  $\Delta y = 0,4$

№ 39.35 а)  $y = x^2 + 2x$

$x_0 = -2$ ,  $x_1 = -1,9$

$$\Delta y = y_1 - y_0 = x_1^2 + 2x_1 - x_0^2 - 2x_0 =$$
$$= 3,61 - 3,8 - 4 + 4 = -0,19.$$

№ 39.37

а) Дано:  $y = 2 \sin x \cdot \cos x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = -\frac{\pi}{8}$

Найти:  $\Delta y$

№ 39.34

а)  $y = 2x - 3$

$x_0 = 3$

$$\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$

$x_1 = 3,2$

$$1) 3,2 \cdot 2 - 3 = 3,4$$

$$2) 3 \cdot 2 - 3 = 3$$

$$3) \Delta f = 3,4 - 3 = 0,4$$

№ 39.36 а)

а)  $y = \sin x$ ;  $x_0 = 0$ ;  $x_1 = \frac{\pi}{6}$

$$f(x_1) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$f(x_0) = \sin 0 = 0$$

$$\Delta f = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} = 0,5$$

Решение: 1)  $2 \sin x \cos x = \sin 2x \Rightarrow y = \sin 2x$ .  $\Delta y = y(x_1) - y(x_0)$

$$2) \Delta y = \sin 2\left(-\frac{\pi}{8}\right) - \sin 2 \cdot 0 = -\sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ответ:  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

N 39.43 b2

Dano:  $y = f(x)$   $x \rightarrow x + \Delta x$  б)  $f(x) = \frac{1}{x}$  2)  $f(x) = \sqrt{x}$

Главнн:  $\Delta f$

Решение:  $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$

$$\text{б) } \Delta f = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$$

$$\text{2) } \Delta f = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

N 39.44 б2

Dano:  $y = f(x)$   $x \rightarrow x + \Delta x$  б)  $f(x) = \frac{1}{x}$  2)  $f(x) = \sqrt{x}$

Главнн:  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$

Решение: б) 1) Главнн  $\Delta f$  (см 39.43 б)

$$\text{2) } \frac{\Delta f}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x) \cdot \Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}$$

2) 1) Главнн  $\Delta f$  (см 39.43 2)

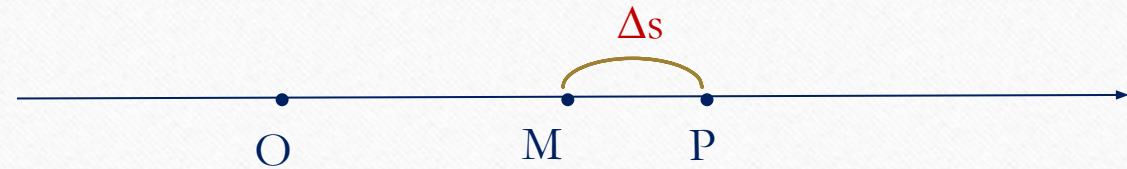
$$\text{2) } \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}) \cdot \Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

## II. Задачи, приводящие к понятию производной

### Задача 1. О скорости движения

Пусть вдоль некоторой прямой движется тело по закону  $s = s(t)$ , где  $s$  - пройденный путь,  $t$  - время, и необходимо найти скорость движения тела в момент  $t$ .

Пусть в момент времени  $t$  тело находится в точке  $M$ , пройденный путь будет  $OM = s(t)$ .



Тогда в момент времени  $(t + \Delta t)$  тело переместится в точку  $P$ ; путь  $OP = s(t + \Delta t)$ . Получается, что за  $\Delta t$  тело прошло путь  $MP = OP - OM = s(t + \Delta t) - s(t) = \Delta s$ .

Тогда за промежуток  $\Delta t$  средняя скорость будет  $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ . Когда  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $P \rightarrow M$  и  $v_{\text{ср.}} \rightarrow v_{\text{мгн.}}$ .

Мгновенная скорость ( $v_{\text{мгн.}}$ , скорость в момент времени  $t$ ) - это предел средней скорости за промежуток времени  $\Delta t$  при условии, что  $\Delta t \rightarrow 0$ .

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

## II. Задачи, приводящие к понятию производной

### Задача 2. О касательной

Геометрический смысл приращения функции  
 $y = kx + b$

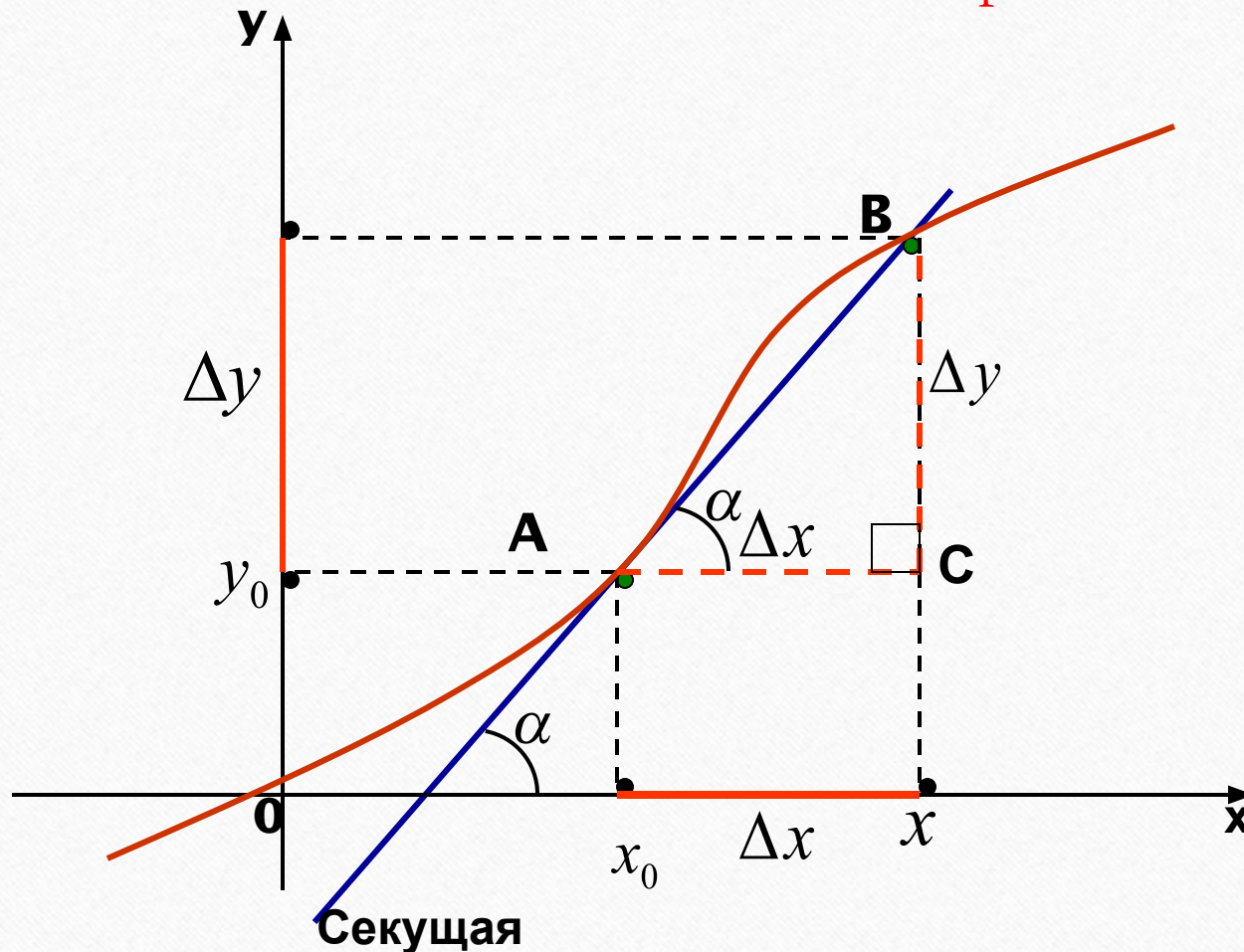
$k$  — угловой  
коэффициент прямой  
(секущей)

Знаем:  $k = \operatorname{tg} \alpha$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Таким образом,

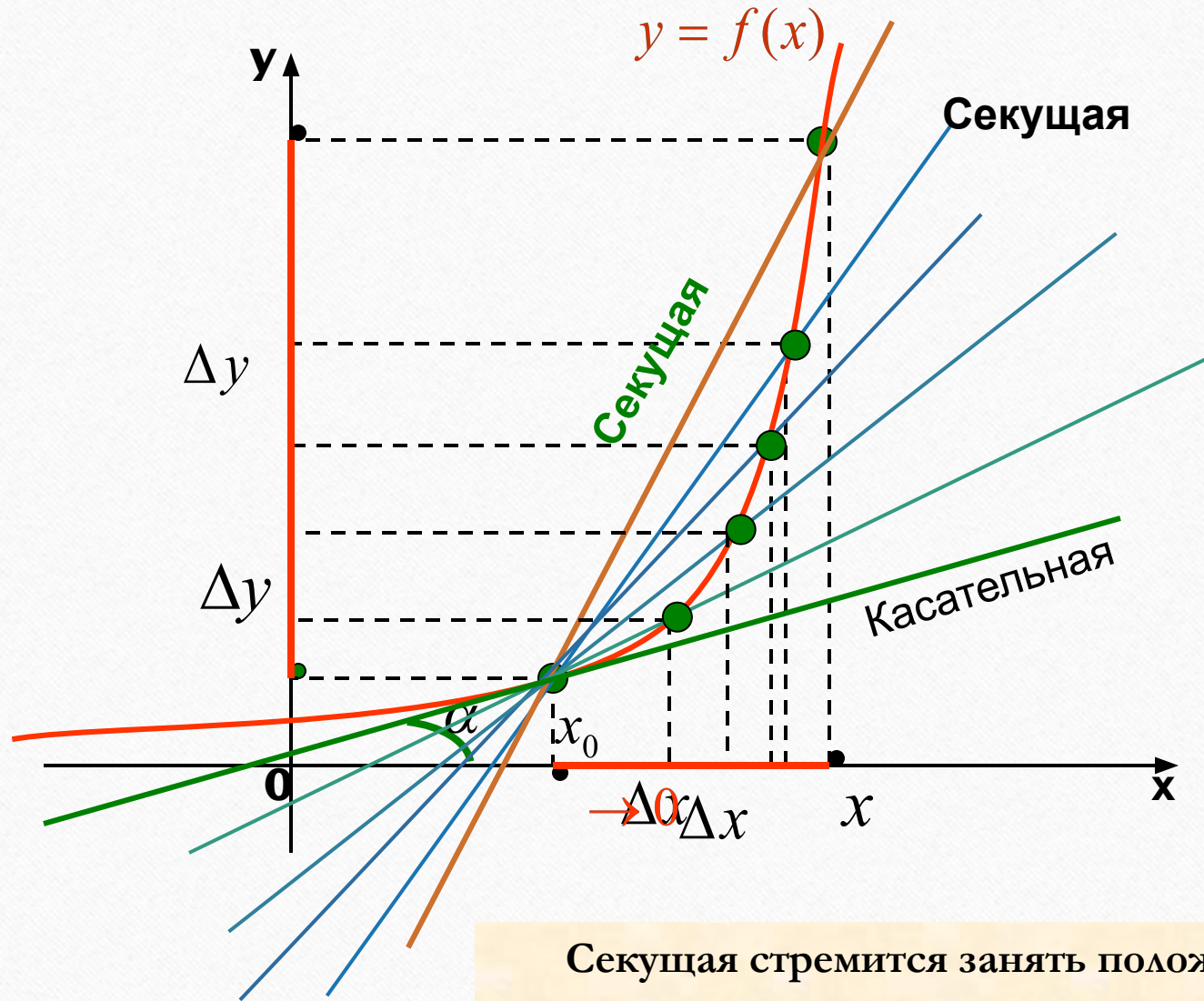
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = k$$



Отношение приращения функции к приращению аргумента равно тангенсу угла наклона секущей к положительному направлению оси ОХ.

## II. Задачи, приводящие к понятию производной

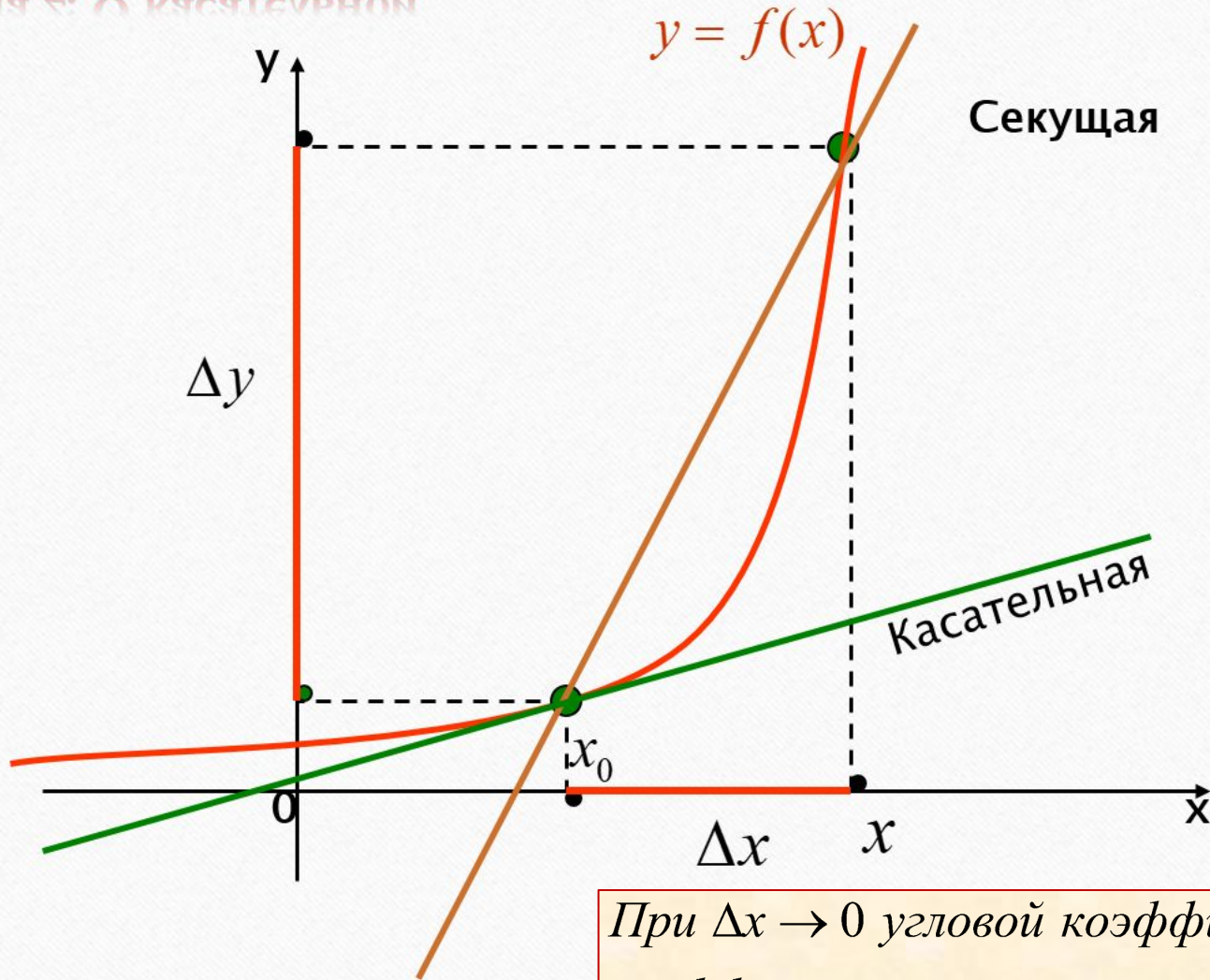
### Задача 2. О касательной



Секущая стремится занять положение касательной. То есть,  
касательная есть предельное положение секущей.

## II. Задачи, приводящие к понятию производной

### Задача 2: О касательной



$$y = kx + b$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = k$$

При  $\Delta x \rightarrow 0$   $k_{\text{кас}} \rightarrow k_{\text{сек}}$

$$k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_{\text{сек}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

При  $\Delta x \rightarrow 0$  угловой коэффициент секущей  $\rightarrow$  к угловому коэффициенту касательной.

## II. Задачи, приводящие к понятию производной

### Задача 3. О скорости химической реакции

Пусть некоторое вещество вступает в химическую реакцию. Количество этого вещества  $Q$  изменяется в течение реакции в зависимости от времени  $t$  и является функцией от времени.

Пусть за время  $\Delta t$  количество вещества изменяется на  $\Delta Q$ , тогда отношение  $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$  будет выражать среднюю скорость химической реакции за время  $\Delta t$ .

Предел этого отношения  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$  - это скорость химической реакции в данный момент времени  $t$ .

### Задача 4. О скорости радиоактивного распада

Если  $m$  - масса радиоактивного вещества и  $t$  - время, то явление радиоактивного распада в момент времени  $t$  при условии, что масса радиоактивного вещества с течением времени уменьшается, характеризуется функцией  $m = m(t)$ .

Средняя скорость распада за время  $\Delta t$  выражается отношением  $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{m(t_1 + \Delta t) - m(t_1)}{\Delta t}$ ,

а мгновенная скорость распада в момент времени  $t$  -

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

# III. Определение производной

Вышеприведенные задачи приводят к одному и тому же выводу – пределу отношения приращения функции к приращению аргумента, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

$$\Delta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta_{\text{ср}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_{\text{сек}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x$$

$$\Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x$$

1) Пусть  $y = f(x)$  определена в точке  $x$  и некоторой ее окрестности.

**Производной** функции  $y = f(x)$  в точке  $x$  называется предел отношения приращения функции  $\Delta y$  ( $\Delta f$ ) в этой точке к приращению аргумента  $\Delta x$ , при стремлении приращения аргумента к нулю.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

или

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

**2) Обозначение.** Производную функции  $y = f(x)$  обозначают  $f'(x)$ , или  $y'(x)$ , или  $y'$  (говорят: «эф штрих от икс», «игрек штрих от икс»).

**3)**  $y' = f'(x)$  – это новая функция, связанная с функцией  $y = f(x)$ , определенная во всех точках, в которых существует указанный предел.

# III. Определение производной

4) Если  $f(x)$  имеет производную в точке  $x$ , то функцию называют **дифференцируемой** в этой точке.  
Процесс нахождения производной называется **дифференцированием**.

## 5) Алгоритм вычисления производной $f'(x)$

1. Найти приращение функции  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ .
2. Составить отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ .
3. Найти предел этого отношения при  $\Delta x \rightarrow 0$  (если этот предел существует).

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

**Примеры.**

1. Дано:  $y = kx + b$ .

Найти:  $y'$ .

Решение: (см. пример 6 из предыдущей лекции)

$$1) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k$$

$$2) f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k = k.$$

$$(kx + b)' = k$$

2. Дано:  $y = x^3$ .

Найти:  $y'$ .

Решение: (см. пример 5 из предыдущей лекции)

$$1) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$$

$$2) f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + \underbrace{3x\Delta x}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\Delta x^2}_{\rightarrow 0}) = 3x^2$$

$$(x^3)' = 3x^2$$

# III. Определение производной

Пример 3.

$$(kx + b)' = k$$

$$(2x + 3)' = 2$$

$$(4x - 1)' = 4$$

$$(x + 5)' = 1$$

$$(3 - x)' = -1$$

$$(-2 - 5x)' = -5$$

$$(7x)' = 7$$

$$(-0,3x)' = -0,3$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2}$$

$$(x)' = 1$$

$$(-x)' = -1$$

$$(x)' = 1$$

$$(-x)' = -1$$

5. Дано:  $y = C$ .

Найти:  $y'$ .

Решение: 1) Найдем  $\Delta y$ :  $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$

$$\Delta y = C - C = 0$$

$$2) f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

$$C' = 0$$

$$(2)' = 0, (-1,5)' = 0$$

Пример 4.

4. Дано:  $y = x^2$ .

Найти:  $y'$ .

Решение: 1) Найдем  $\Delta y$ :  $\Delta y = y_1 - y_0 = y(x + \Delta x) - y(x)$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 =$$

$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x(2x + \Delta x)$$

$$2) f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

$$(x^2)' = 2x$$

6. Дано:  $y = \frac{1}{x}$ .

Найти:  $y'$ .

Решение: 1) Воспользуемся № 39.44 в (дом.)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x(x + \Delta x)}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

### III. Определение производной

7. Дано:  $y = \sqrt{x}$ .

Найти:  $y'$ .

Решение: 1) Воспользуемся № 39.44 г (дом.)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

### IV. Таблица производных

|         |     |     |          |      |       |            |  |  |     |
|---------|-----|-----|----------|------|-------|------------|--|--|-----|
| $f(x)$  | $C$ | $x$ | $kx + b$ |      | $x^3$ | $x^n$      |  |  | ... |
| $f'(x)$ | 0   | 1   | $k$      | $2x$ |       | $nx^{n-1}$ |  |  | ... |