

МИНИМАЛЬНЫ Е МАРШРУТЫ И ПОКРЫТИЯ

Лекция 5

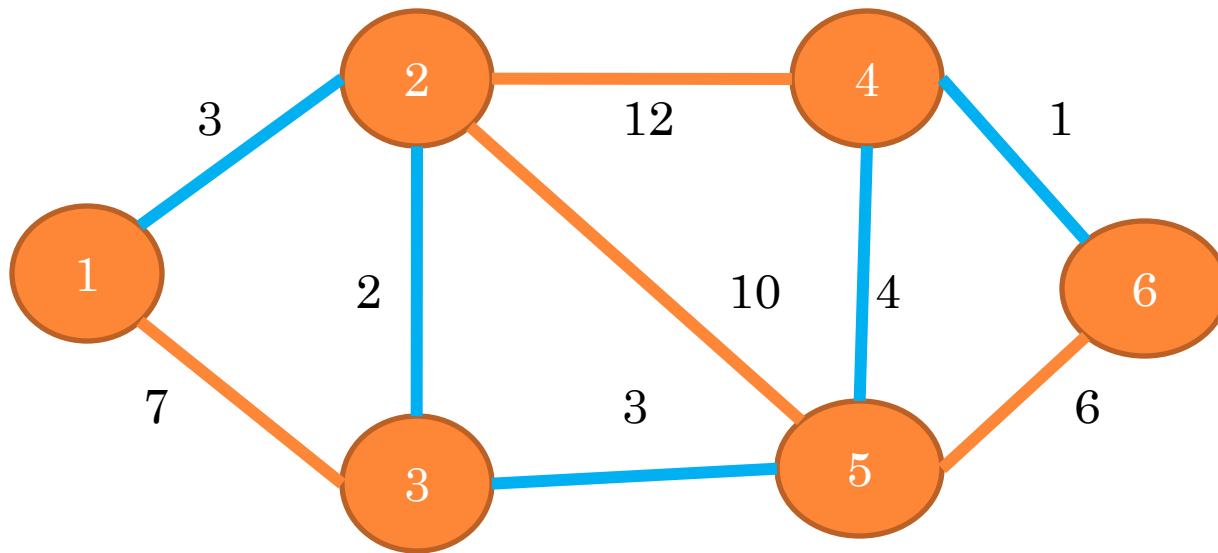
СОДЕРЖАНИЕ

- Часть 1. Минимальные маршруты, связывающие две вершины.
- Часть 2. Минимальные маршруты, связывающие выбранную вершину со всеми остальными.
- Часть 3. Минимальные покрывающие подмножества вершин.

ЧАСТЬ 1.
МИНИМАЛЬНЫЕ
МАРШРУТЫ,
СВЯЗЫВАЮЩИЕ ДВЕ
ВЕРШИНЫ.

СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

- На заданном взвешенном графе требуется определить маршрут, суммарный вес ребер которого минимален.



Синим цветом выделен минимальный маршрут, объединяющий первую и шестую вершины.

ФОРМАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

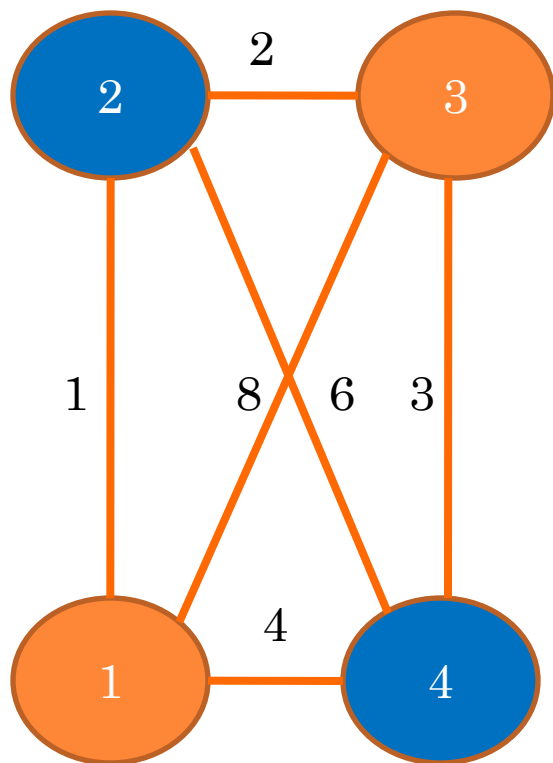
Ниже считается, что выбраны s-я и t-я вершины.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i \sum_j r(i, j) \cdot z(i, j) \rightarrow \min; \\ \sum_i z(s, i) = 1; \\ \sum_i z(i, t) = 1; \\ \forall j \notin \{s, t\} : \sum_i z(i, j) = \sum_q z(j, q); \\ \forall (i, j) \in U : z(i, j) = 1, 0. \end{array} \right.$$

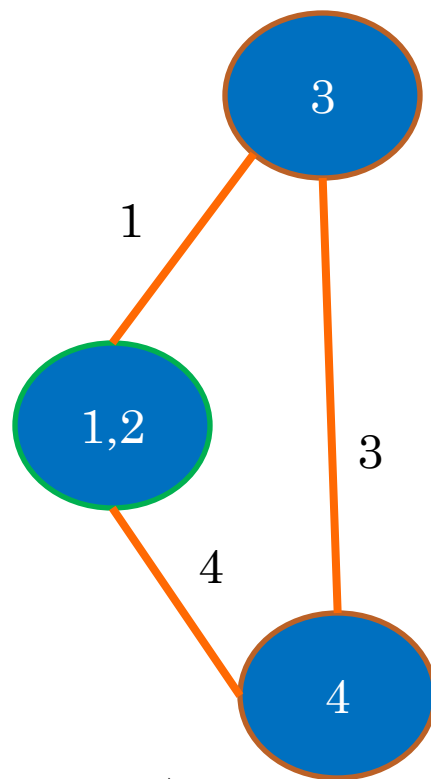
АЛГОРИТМ 1

- Шаг 1. У одной из выбранных вершин полученного графа выбираем ребро с минимальным весом.
- Шаг 2. Вес всех ребер, инцидентных выбранной вершине, уменьшаем на величину выбранного ребра.
- Шаг 3. Ребра с нулевым весом стягиваются в одну вершину.
- Шаг 4. Если на полученном графе образовались параллельные ребра, то остается одно из них, обладающее минимальным весом.
- Шаг 5. Если выбранные вершины стянулись в одну вершину, то перейти к шагу 6, в противном случае — к шагу 1.
- Шаг 6. Конец алгоритма. На множестве стянутых ребер есть минимальный маршрут.

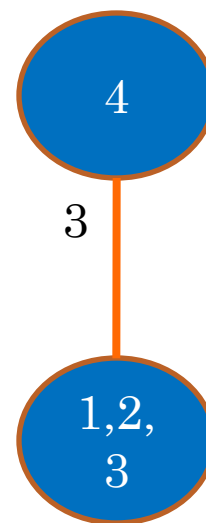
ПРИМЕР 1



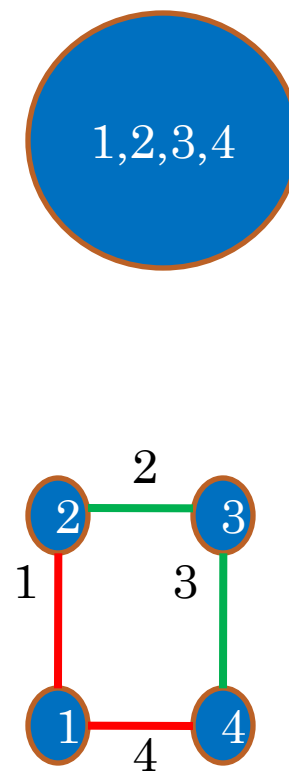
a)



б)



в)



г)

ДОСТОИНСТВА И НЕДОСТАТКИ АЛГОРИТМА 1

Достоинства:

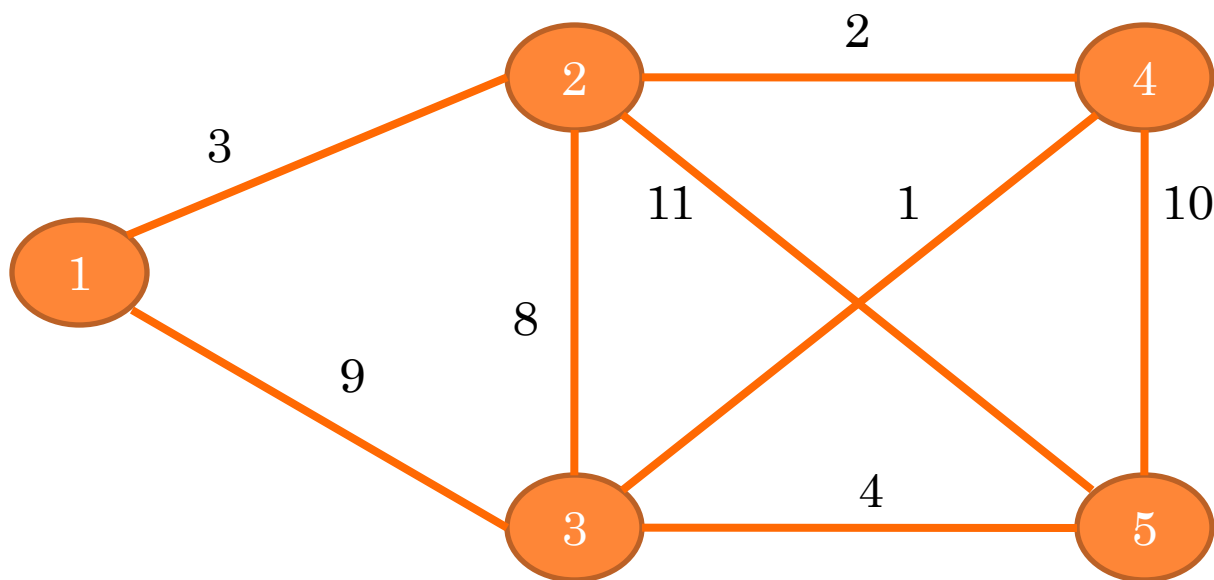
1. Число итераций пропорционально числу вершин.
2. Наглядность алгоритма.
3. Алгоритм гарантирует глобально оптимальное решение.
4. Легкость программной реализации.

Недостатки:

1. Неоднозначность полученного результата.
2. Невозможность в общем случае получить суммарный вес ребер минимального маршрута.

САМОСТОЯТЕЛЬНО

Определить минимальный маршрут между 1-й и 5-й вершинами:

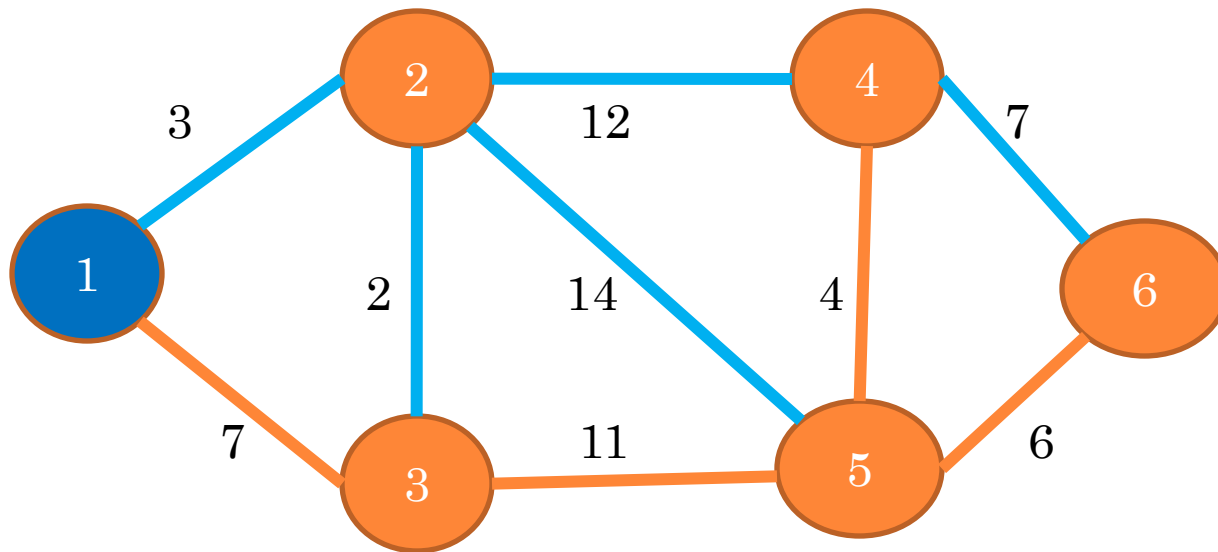


ЧАСТЬ 2

МИНИМАЛЬНЫЕ
МАРШРУТЫ,
СВЯЗЫВАЮЩИЕ
ВЫБРАННУЮ ВЕРШИНУ
СО ВСЕМИ
ОСТАЛЬНЫМИ

СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

- На заданном взвешенном графе требуется определить минимальные маршруты, соединяющие выделенную вершину со всеми остальными.



Синим цветом выделен минимальный маршрут, объединяющий первую и шестую вершины.

ФОРМАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ниже полагаем, что выбрана s-я вершина.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in \{X \setminus s\} : \max_d \prod_{(i,j) \in L^d(s,t)} z(i,j) \cdot \sum_{(i,j) \in L^d(s,t)} z(i,j) \cdot r(i,j) \rightarrow \min; \\ \sum_i z(s,i) \geq 1; \\ \forall t \in \{X \setminus s\} : \sum_i z(i,t) = 1; \\ \forall t \in \{X \setminus s\} : \sum_d \prod_{(i,j) \in L^d(s,t)} z(i,j) \geq 1; \\ \forall (i,j) \in U : z(i,j) = 1, 0. \end{array} \right.$$

Многокритериальная
оптимизация

АЛГОРИТМ 2

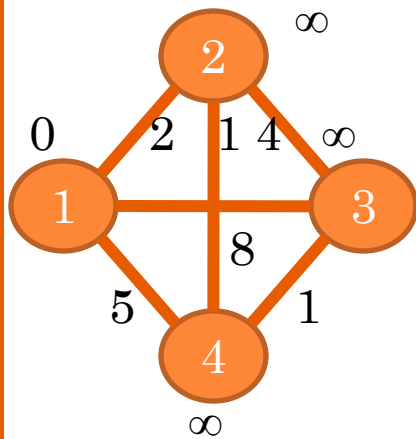
- Шаг 1. Выбранной вершине присваивается потенциал, равный нулю, а остальным — равный ∞ .
- Шаг 2. Каждой i -й вершине ($|i-s| > 0$), присваивается потенциал, равный $p(i)$:

$$p(i) = \min\{p(i); p(j) + r(j, i)\}.$$

- Шаг 3. Если потенциал хотя бы одной вершины изменился, то перейти к шагу 2, в противном случае — к шагу 4.
- Шаг 4. Конец алгоритма. Потенциалы вершин равны величинам минимальных маршрутов до выбранной вершины.

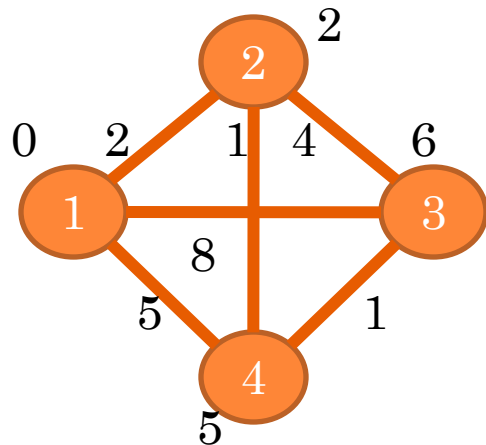
ПРИМЕР 2

Граф $G(X, U)$

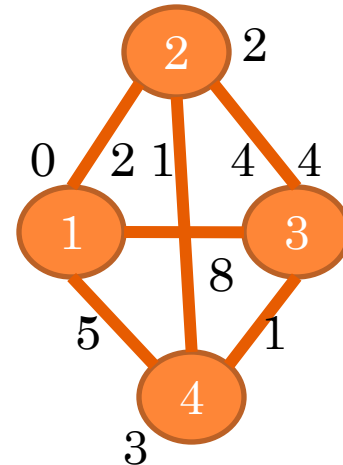


а)

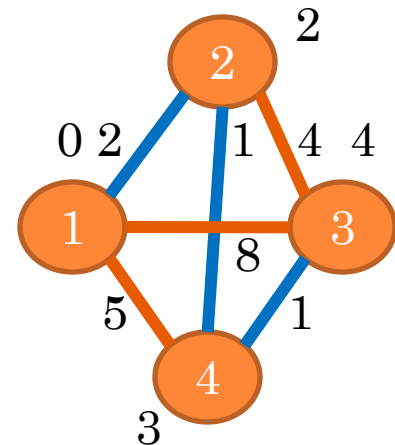
Расстановка потенциалов



б)



в)



г)

На рис. г) синим цветом выделен минимальный маршрут, связывающий первую и третью вершины.

ДОСТОИНСТВА И НЕДОСТАТКИ АЛГОРИТМА

2

Достоинства:

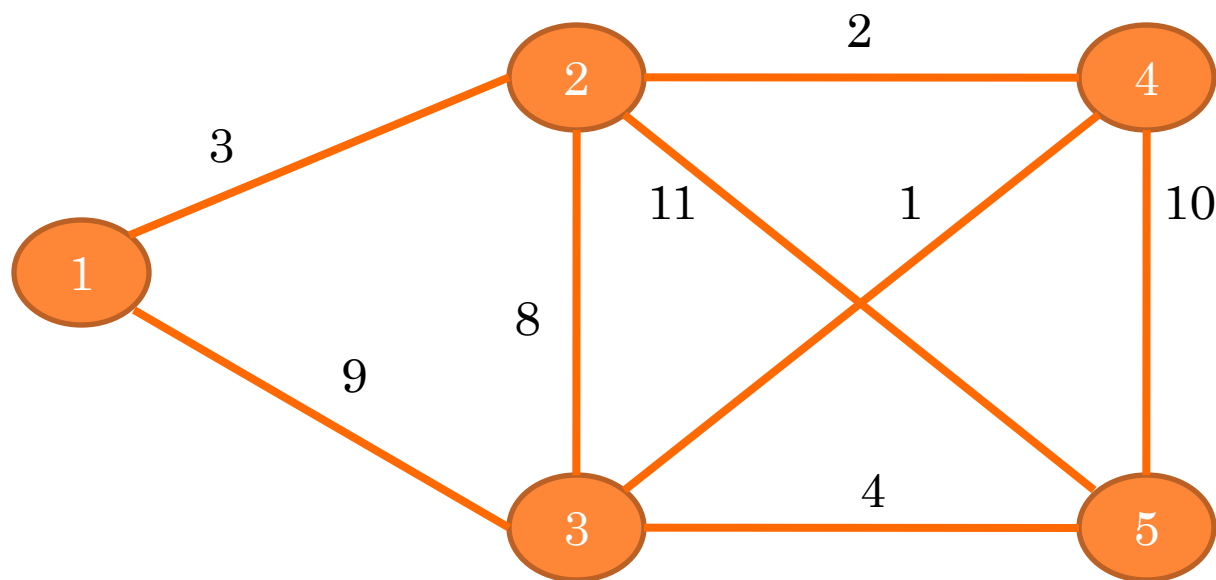
1. Гарантия глобального оптимума.
2. Отсутствие необходимости полного перебора всех маршрутов.
3. Легкость программной реализации.

Недостатки:

1. Алгоритм дает лишь возможность определить величины минимальных маршрутов, но не входящие в них ребра.
2. Невозможно *a priori* определить число итераций этим алгоритмом.

САМОСТОЯТЕЛЬНО

Определить величины минимальных маршруты между 1-й и остальными вершинами:



АЛГОРИТМ 3

Определение минимального
маршрута между выбранными
вершинами

ПОШАГОВОЕ ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА 3

Шаг 1. Выбирается та из выделенных вершин, которая обозначается j , потенциал которой не равен нулю.

Шаг 2. Ищется q -я вершина, для которой справедливо:
$$p(q) = p(j) - r(j, q).$$

Шаг 3. Ребро (j, q) принадлежит минимальному маршруту.

Шаг 4. Если $p(q) = 0$, то перейти к шагу 6, в противном случае – к шагу 5.

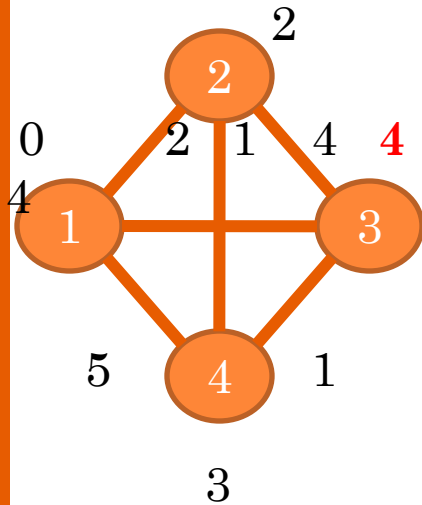
Шаг 5. Вершину q считаем вновь j -й и переходим к шагу 2.

Шаг 6. Конец алгоритма.

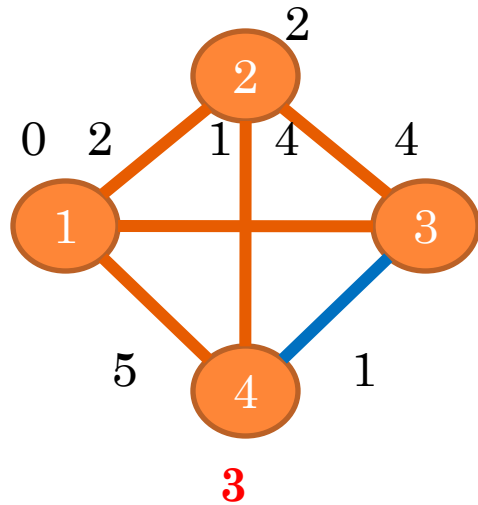
ПРИМЕР 3

Граф $G(X, U)$

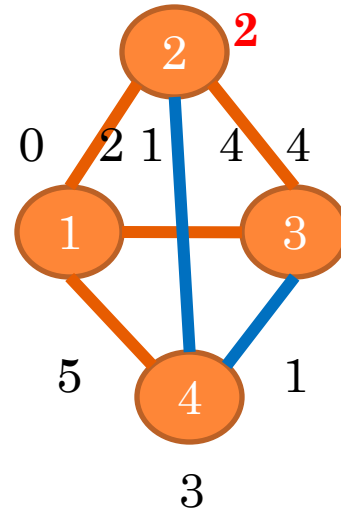
Потенциалы расставлены алгоритмом 2



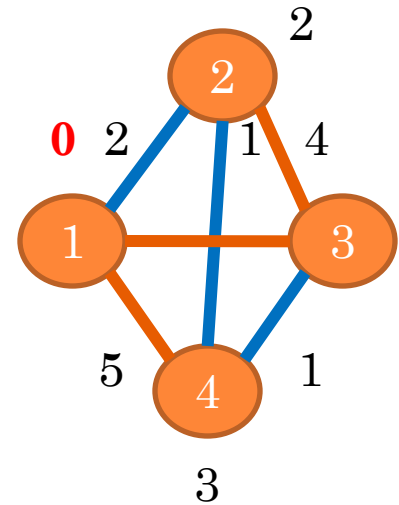
а)



б)



в)

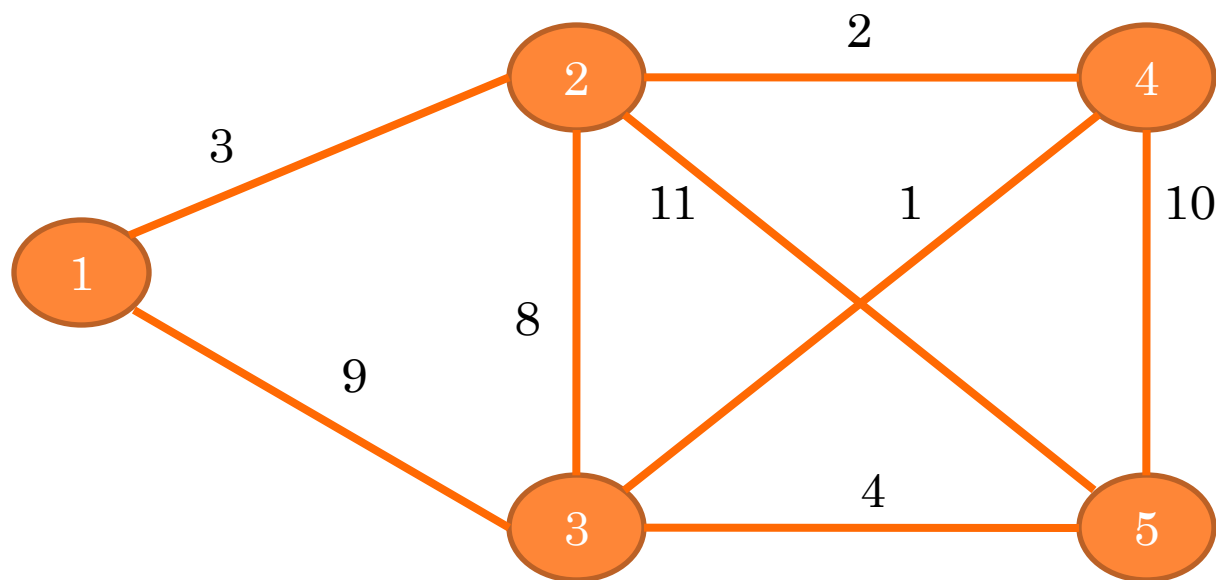


г)

Определение ребер, входящих в минимальный маршрут, соединяющий 1-ю и 3-ю вершины.

САМОСТОЯТЕЛЬНО

Определить ребра минимального маршрута между 1-й и 3-й вершинами приведенного ниже графа $G(X, U)$:



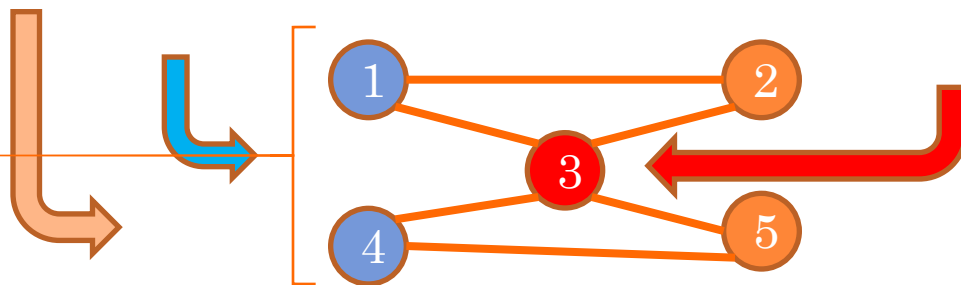
ЧАСТЬ 3

МИНИМАЛЬНЫЕ ПОКРЫВАЮЩИЕ ПОДМНОЖЕСТВА ВЕРШИН

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Покрывающим подмножеством вершин графа $G((X,U))$ называется такое подмножество вершин X' для которого справедливо:
 - если две вершины x_i, x_j принадлежат подмножеству X' , то ребра (i,j) на графе не существует, т. е. $(i,j) \notin U$;
 - любая вершина подмножества $X \setminus X'$ соединена одним ребром с одной из вершин подмножества X' . $(i,j) \notin U$;
2. Минимальным покрывающим подмножеством вершин графа $G((X,U))$ называется такое покрывающее подмножество вершин $X' \subset X$, мощность множества вершин которого минимальна.

Граф $G(X,U)$ Покрывающее подмножество выделено синим цветом. Минимальное покрывающее подмножество – красным.



Пример 4: компрессия изображений методом переменных фрагментов

1. Замена фрагментов изображения графом $G(X,U)$ и выделение на графе минимального покрывающего подмножества вершин



Рис. 1. Фрагментация изображения

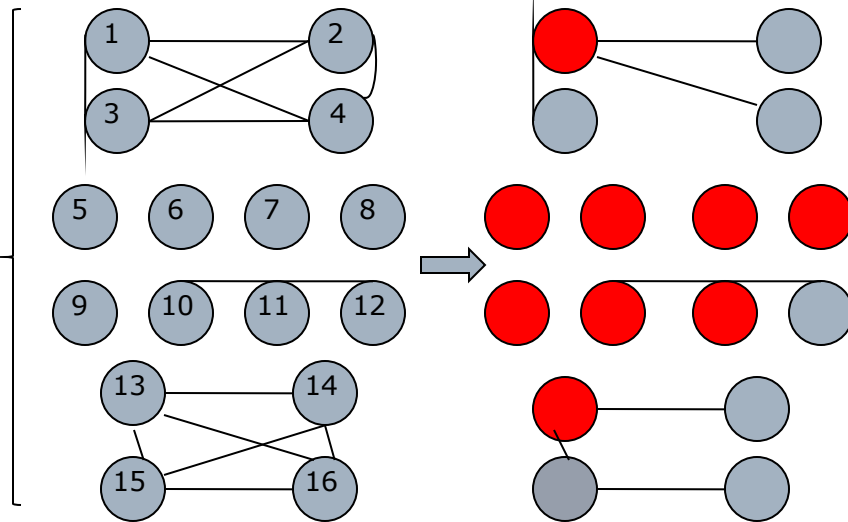
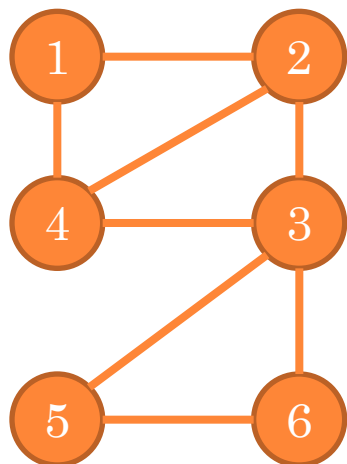


Рис. 2. Замена фрагментов графом $G(X,U)$, где вершины отвечают фрагментам, а ребра – связям между ними.

Рис. 3. На графе $G(X,U)$ красным цветом выделено минимальное покрывающее подмножество вершин. Коэффициент компрессии η равен $|X|/|X_1|=1.8$

Поиск минимального покрытия перебором

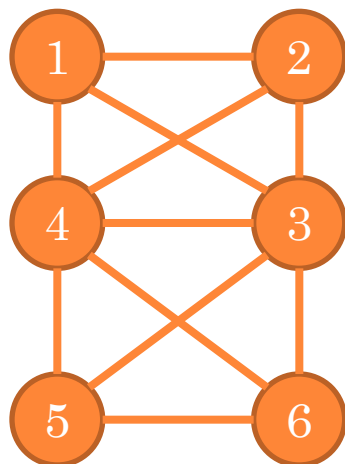


Граф $G(X,U)$

№	1	2	3	4	5	6	R
1	0	0	0	0	0	1	∞
2	0	0	0	0	1	0	∞
3	0	0	0	0	1	1	∞
4	0	0	0	1	0	0	∞
5	0	0	0	1	0	1	2
6	0	0	0	1	1	0	2
7	0	0	0	1	1	1	3

Таблица перебора покрытий графа $G(X,U)$

РЕШИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО



Граф $G(X, U)$

№	1	2	3	4	5	6	R
1	0	0	0	0	0	1	?
2	0	0	0	0	1	0	?
3	0	0	0	0	1	1	?
4	0	0	0	1	0	0	?
5	0	0	0	1	0	1	?
6	0	0	0	1	1	0	?
7	0	0	0	1	1	1	?

Таблица перебора покрытий графа $G(X, U)$

САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Дать формальное описание задачи выделения покрывающего множества вершин.
2. Дать формальное описание задачи выделения минимального покрывающего множества вершин.