

Векторы в пространстве

ВХОД



Содержание

- I. Понятие вектора в пространстве
- II. Коллинеарные векторы
- III. Компланарные векторы
- IV. Действия с векторами
- V. Разложение вектора
- VI. Базисные задачи

Проверь себя

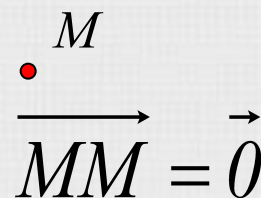
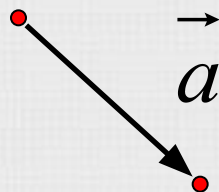
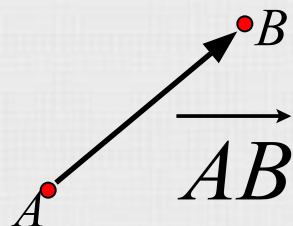
Помощь в управлении презентацией

Выход

Понятие вектора в пространстве

Вектор(направленный отрезок) –

отрезок, для которого указано какой из его концов считается началом, а какой – концом.



Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ – длина отрезка AB .

$$|\overrightarrow{AB}| = AB \quad |\vec{0}| = 0$$



Коллинеарные векторы

Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или параллельных прямых.

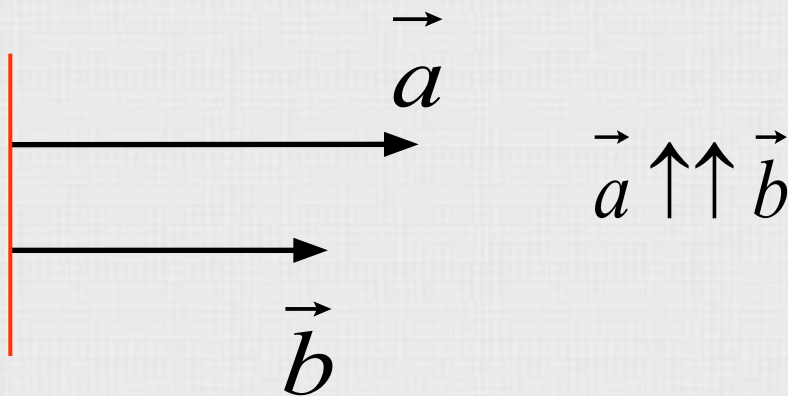
Среди коллинеарных различают:

- Сонаправленные векторы
- Противоположно направленные векторы



Сонаправленные векторы

Сонаправленные векторы - векторы, лежащие по одну сторону от прямой, проходящей через их начала.



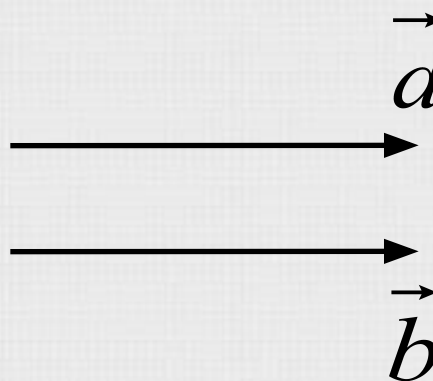
Нулевой вектор считается сонаправленным с любым вектором.

- Равные векторы



Равные векторы

Равные векторы - сонаправленные векторы, длины которых равны.

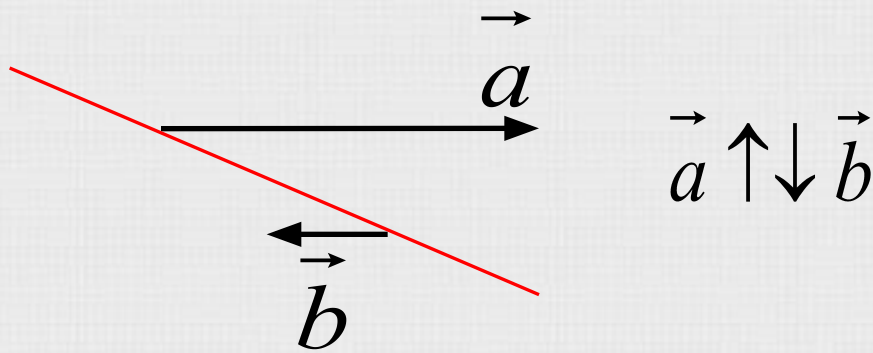

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}, |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.



Противоположно направленные векторы

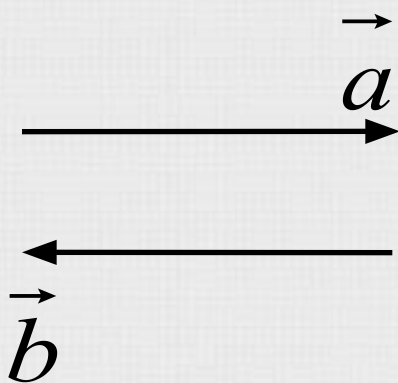
Противоположно направленные векторы – векторы, лежащие по разные стороны от прямой, проходящей через их начала.



- Противоположные векторы

Противоположные векторы

Противоположные векторы – противоположно направленные векторы, длины которых равны.


$$\vec{a} = -\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \updownarrow \vec{b}, |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

Вектором, противоположным нулевому, считается нулевой вектор.



Признак коллинеарности

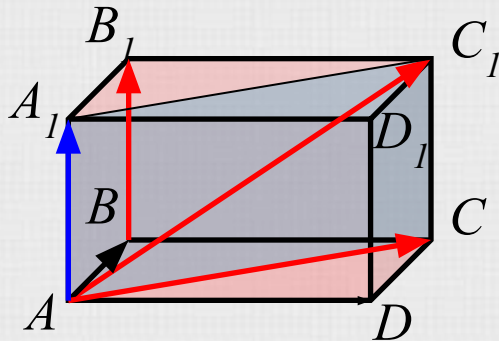
Если существует такое число k при котором выполняется равенство $\vec{a} = k\vec{b}$ и при том вектор $\vec{b} \neq \vec{0}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.



Определение компланарных векторов

Компланарные векторы – векторы, при откладывании которых от одной и той же точки пространства, они будут лежать в одной плоскости.

Пример:

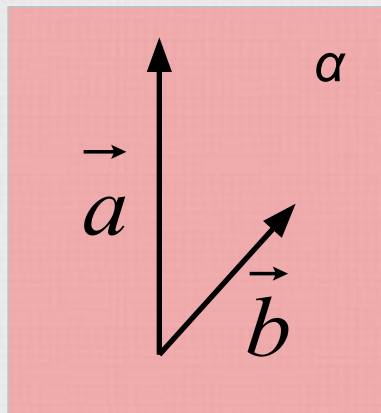
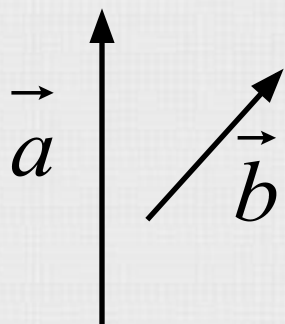


$\vec{BB_1}, \vec{AC}, \vec{AC_1}$ – компланарны, т.к.
 $\vec{BB_1} = \vec{AA_1}$, а векторы $\vec{AA_1}, \vec{AC}, \vec{AC_1}$
лежат в плоскости (AA_1C)



О компланарных векторах

Любые два вектора всегда компланарны.



$$\vec{a} \in \alpha$$

$$\vec{b} \in \alpha$$

$\vec{a}$ и $\vec{b}$ – компланарны

Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, компланарны.

$\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ –

компланарны

если

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$$
$$\vec{a} = k\vec{b}$$



Признак компланарности

Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. представить в виде

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

где x и y – некоторые числа, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.



Задачи на компланарность

1) *Компланарны ли векторы:*

а) $\vec{a}, \vec{b}, 2\vec{a}, 3\vec{b}$;

б) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$?

Справка

Решение

2) *Известно, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.
Компланарны ли векторы:*

а) $\vec{a}, 2\vec{b}, 3\vec{c}$;

б) $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{c}, 2\vec{b} - 3\vec{c}$?

Справка

Решение



Решение

а) векторы $\vec{a}$ и $2\vec{a}$ коллинеарны,
векторы $\vec{b}$ и $3\vec{b}$ коллинеарны,
значит векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $2\vec{a}$ и $3\vec{b}$ компланарны

б) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a} + \vec{b}$ компланарны,
векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ компланарны,
значит векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ компланарны



Решение

а) если векторы $\vec{a}$, $2\vec{b}$, $3\vec{c}$ компланарны,
то существуют такие x и y , что

$$\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c}$$

проверяем существуют ли такие m и n , что

$$\vec{a} = m \cdot 2\vec{b} + n \cdot 3\vec{c}$$

имеем :

$$2m = x \quad m = \frac{x}{2}$$

$$3n = y \quad n = \frac{y}{3}$$

m и n определяются единственным образом,
значит векторы компланарны



Решение

б) если векторы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + 2\vec{c}$, $2\vec{b} - 3\vec{c}$ компланарны, то существуют такие x и y , что

$$\vec{a} + \vec{b} = x(\vec{a} + 2\vec{c}) + y(2\vec{b} - 3\vec{c})$$

$$\vec{a} + \vec{b} = x\vec{a} + 2x\vec{c} + 2y\vec{b} - 3y\vec{c}$$

$$\vec{a}(1 - x) + \vec{b}(1 - 2y) + \vec{c}(-2x + 3y) = 0$$

$$\begin{cases} 1 - x = 0 \\ 1 - 2y = 0 \\ 3y - 2x = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + 2\vec{c} + \frac{1}{2}(2\vec{b} - 3\vec{c})$$

искомые x и y существуют,
значит векторы компланарны



Свойство компланарных векторов

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, то один из них можно выразить линейным образом через два других, т.е. представить в виде :

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.



Действия с векторами

- Сложение
- Вычитание
- Умножение вектора на число
- Скалярное произведение



Сложение векторов

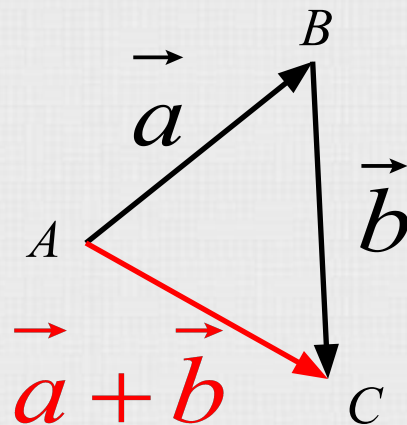
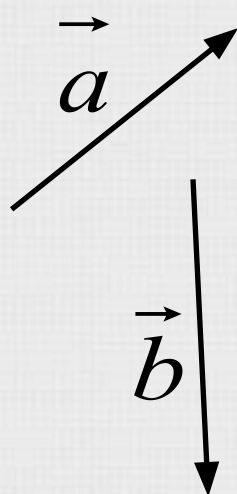
- Правило треугольника
- Правило параллелограмма
- Правило многоугольника
- Правило параллелепипеда
- Свойства сложения



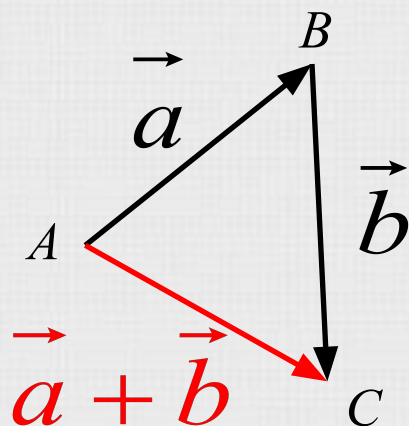
Правило треугольника

Для сложения двух векторов необходимо :

1. отложить от какой – нибудь точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$
2. от точки B отложить вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{b}$
3. вектор $\overrightarrow{AC}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$



Правило треугольника



Для любых трех точек A , B и C справедливо равенство:

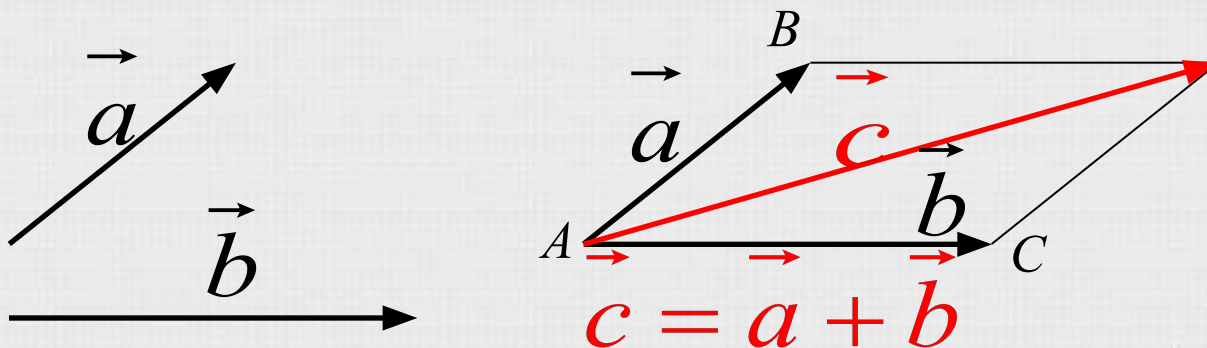
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \underline{\overrightarrow{AC}}$$



Правило параллелограмма

Для сложения двух векторов необходимо :

- 1. отложить от какой – нибудь точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$*
- 2. от точки A отложить вектор $\overrightarrow{AC}$, равный $\vec{b}$*
- 3. построить фигуру до параллелограмма, проведя дополнительные линии параллельно данным векторам*
- 4. диагональ параллелограмма – сумма векторов*



Свойства сложения

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы
равенства :

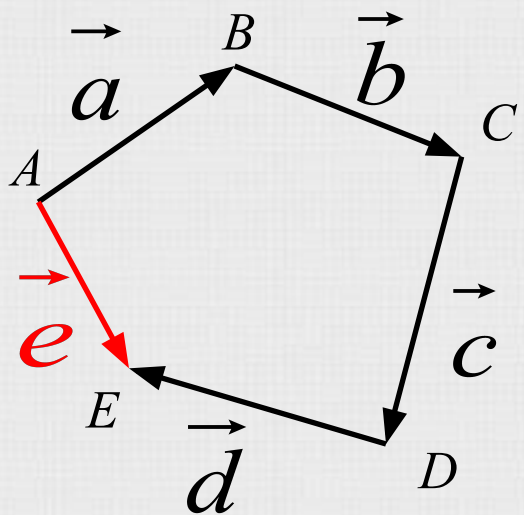
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \text{переместительный закон}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad \text{сочетательный закон}$$



Правило многоугольника

Сумма векторов равна вектору, проведенному из начала первого в конец последнего (при последовательном откладывании).



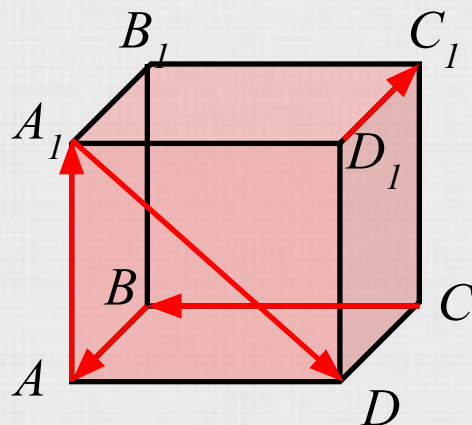
$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{e}$$

Пример

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \underline{\overrightarrow{AE}}$$



Пример

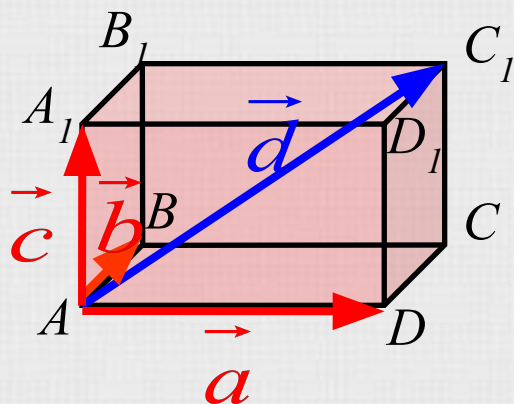


$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{A_1D} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$$



Правило параллелепипеда

Вектор, лежащий на диагонали параллелепипеда, равен сумме векторов, проведенных из той же точки и лежащих на трех измерениях параллелепипеда.



$$\overrightarrow{AD} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$$

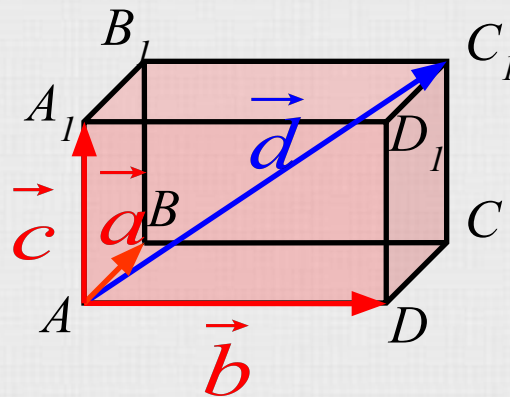
$$\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \vec{d}$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}$$



Свойства



$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ для любого параллелепипеда
 $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ для прямоугольного
параллелепипеда

Вычитание векторов

- Вычитание
- Сложение с противоположным



Вычитание

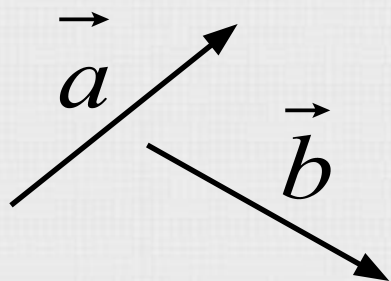
Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.



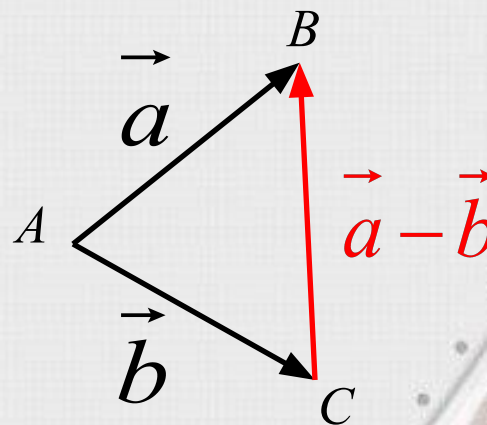
Вычитание

Для вычитания одного вектора из другого необходимо :

1. отложить от какой – нибудь точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$
2. от этой же точки A отложить вектор $\overrightarrow{AC}$, равный $\vec{b}$
3. вектор $\overrightarrow{CB}$ называется разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

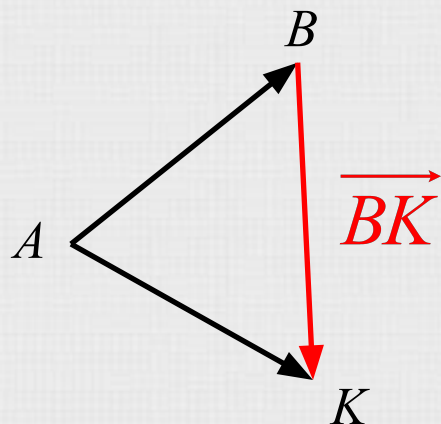


Правило трех точек



Правило трех точек

Любой вектор можно представить как разность двух векторов, проведенных из одной точки.

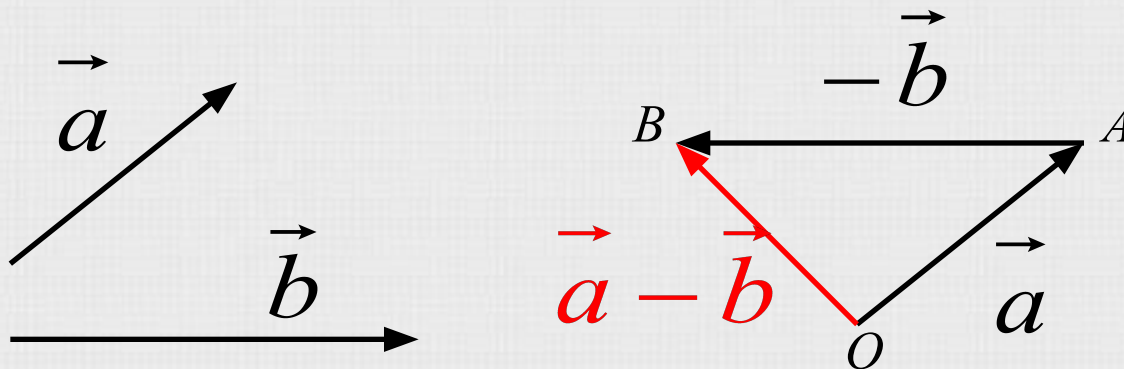


$$\underline{\overrightarrow{BK}} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AB}$$

Сложение с противоположным

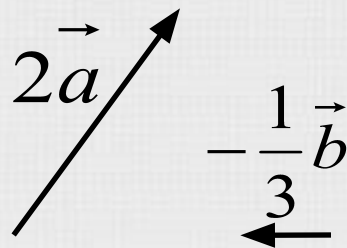
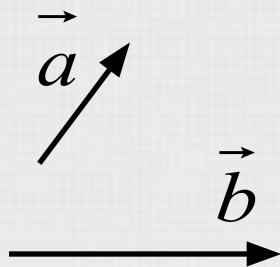
Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно представить как сумму вектора $\vec{a}$ и вектора, противоположного вектору $\vec{b}$.

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$, при чем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $k \geq 0$ и противоположно направлены при $k < 0$.



Свойства

- Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.

$$\vec{0} \cdot n = \vec{0}$$

- Произведение любого вектора на число ноль есть нулевой вектор.

$$n \cdot \vec{0} = \vec{0}$$



Свойства

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и любых чисел k, l справедливы равенства :

$$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a}) \quad \text{сочетательный закон}$$

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b} \quad \text{1-ый распределительный закон}$$

$$(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a} \quad \text{2-ой распределительный закон}$$



Скалярное произведение

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}; \vec{b}})$$

Справедливые утверждения

Вычисление скалярного произведения в координатах

Свойства скалярного произведения



Справедливые утверждения

- *скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \vec{a} \neq \vec{0} \quad \vec{b} \neq \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

- *скалярный квадрат вектора (т.е. скалярное произведение вектора на себя) равен квадрату его длины*

$$\vec{a}^2 = \left| \vec{a} \right|^2 = a^2$$



Вычисление скалярного произведения в координатах

Скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$

и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ выражается формулой

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$



Свойства скалярного произведения

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и любого числа k справедливы равенства :

$$1^0. \vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0 \text{ причем } \vec{a} \cdot \vec{a} > 0 \text{ при } \vec{a} \neq 0$$

$$2^0. \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (\text{переместительный закон})$$

$$3^0. (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \quad (\text{распределительный закон})$$

$$4^0. (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (\text{сочетательный закон})$$



Разложение вектора

- По двум неколлинеарным векторам
- По трем некомпланарным векторам



Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Теорема.

Любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.



Разложение вектора по трем некомпланарным векторам

Если вектор $\vec{p}$ представлен в виде

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

где x, y, z – некоторые числа, то говорят, что вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Числа x, y, z называются коэффициентами разложения.

Теорема

Любой вектор можно разложить по трем данным некомпланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.



Базисные задачи

Вектор, проведенный в середину отрезка

Вектор, проведенный в точку отрезка

Вектор, соединяющий середины двух отрезков

Вектор, проведенный в центроид треугольника

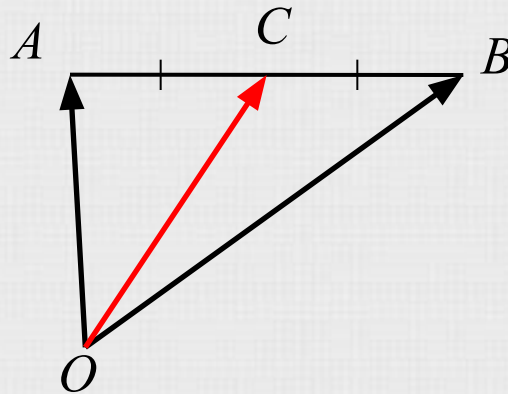
Вектор, проведенный в точку пересечения
диагоналей параллелограмма

Вектор, лежащий на диагонали параллелепипеда



Вектор, проведенный в середину отрезка,

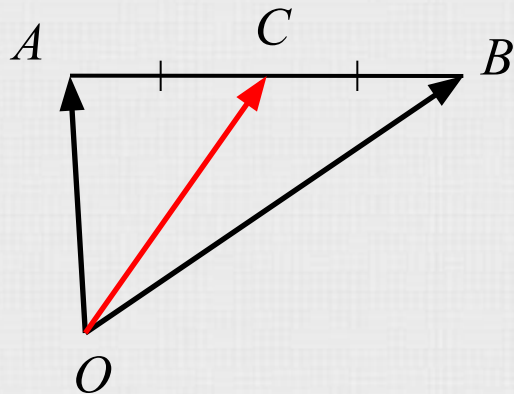
равен полусумме векторов, проведенных из той же точки в его концы.



$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

Доказательство

Доказательство



Дано :

AB – отрезок

$AC = CB$

Доказать :

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

Доказательство :

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} \end{aligned} \right| +$$

$$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC})$$

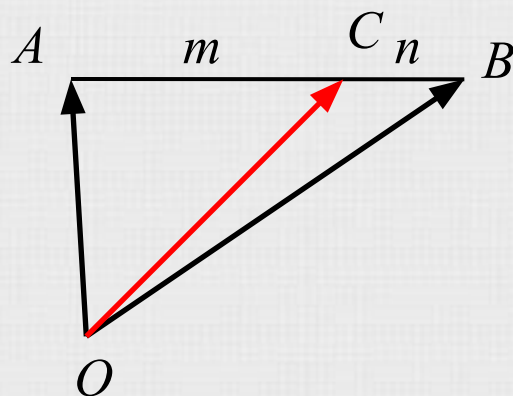
$$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad | \div 2$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \quad | \text{ч.т.д.}$$



Вектор, проведенный в точку отрезка

Точка C делит отрезок AB в отношении $m : n$.

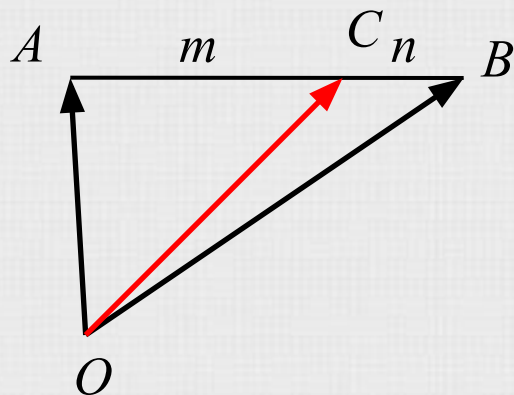


$$\vec{OC} = \frac{n}{m+n} \vec{OA} + \frac{m}{m+n} \vec{OB}$$

Доказательство



Доказательство



Дано :

AB – отрезок

$$AC = m$$

$$CB = n$$

Доказать :

Доказательство :

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n} \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{AC} = \frac{m}{m+n} \overrightarrow{AB} = \frac{m}{m+n} (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

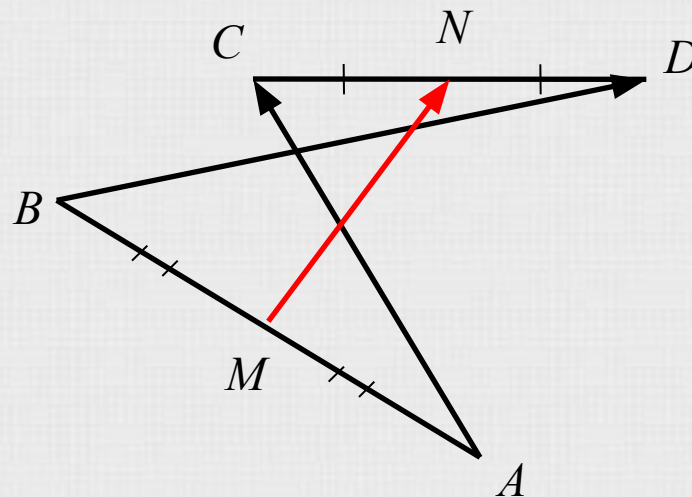
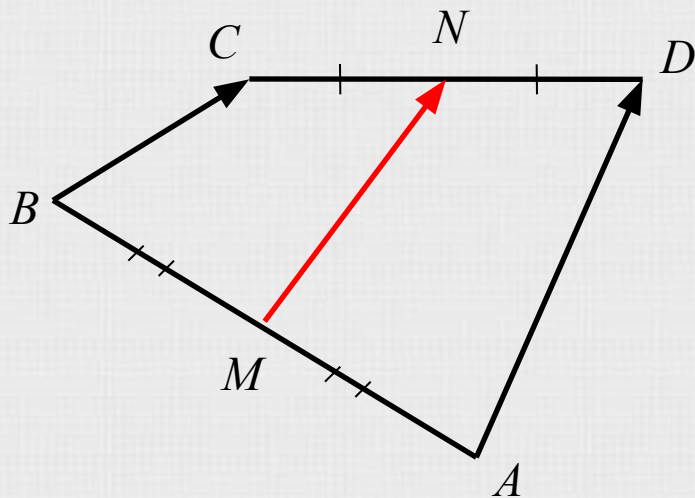
$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{OB} - \frac{m}{m+n} \overrightarrow{OA} =$$

$$= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{OB} \text{ ч.т.д.}$$



Вектор, соединяющий середины двух отрезков,

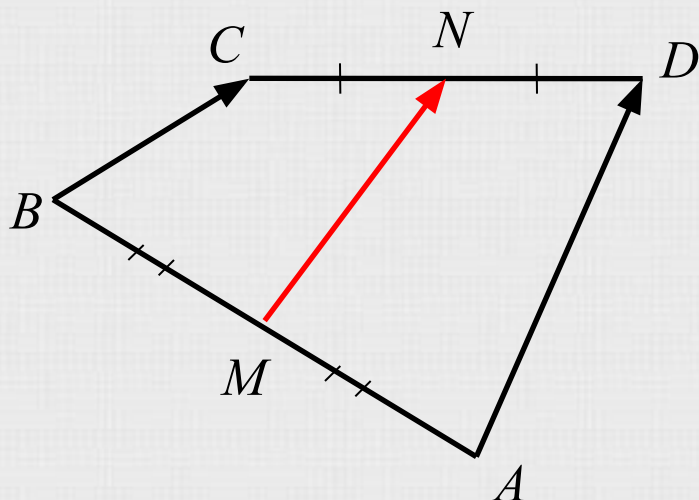
равен полусумме векторов, соединяющих их концы.



$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$$

Доказательство

Доказательство



Дано :

$AB; CD$

$BM = AM$

$CN = ND$

Доказать :

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$$

Доказательство :

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN} \end{aligned} \right\} +$$

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

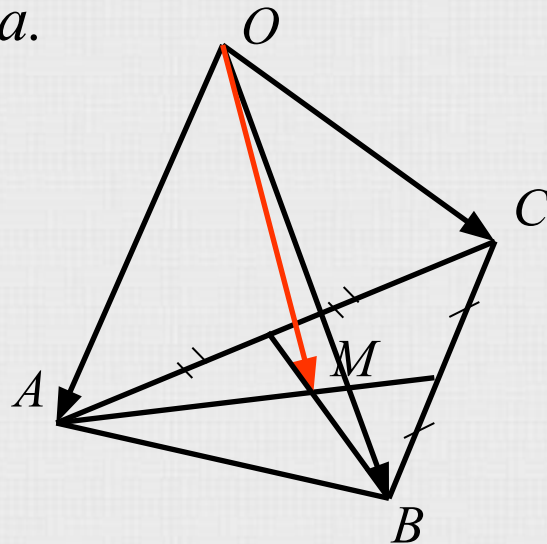
$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \text{ ч.т.д.}$$



Вектор, проведенный в центроид треугольника,

равен одной трети суммы векторов, проведенных из этой точки в вершины треугольника.

Центроид – точка пересечения медиан треугольника.

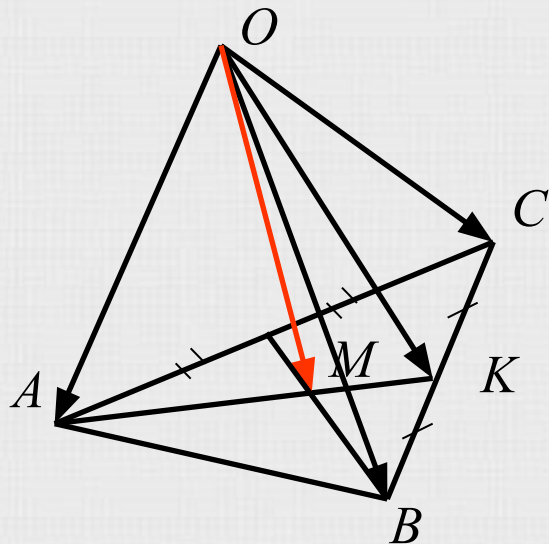


$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

Доказательство



Доказательство



Дано :

$\triangle ABC$

M – центр тяжести

Доказать :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

Доказательство :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OK} =$$

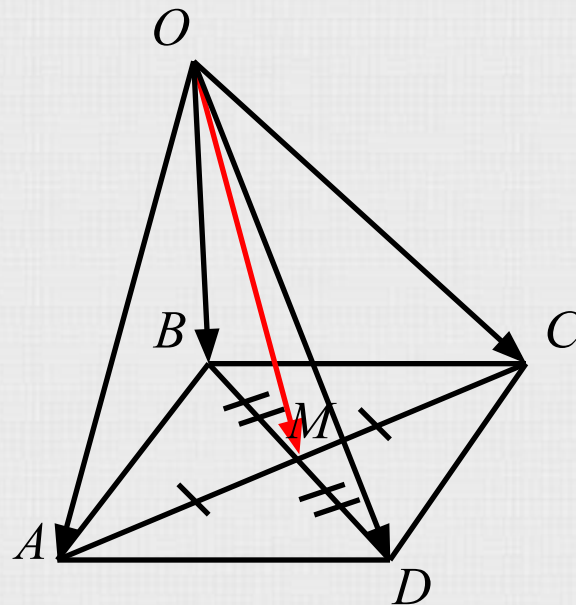
$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB})\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \text{ ч.т.д.}$$



Вектор, проведенный в точку пересечения диагоналей параллелограмма,

равен одной четверти суммы векторов, проведенных из этой точки в вершины параллелограмма.

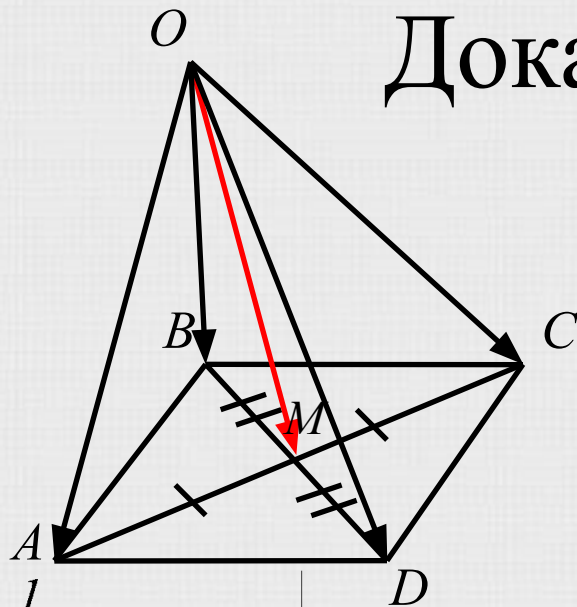


$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

Доказательство



Доказательство



Дано :

$ABCD$ – пар – м

$BD \cap AC = M$

Доказать :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

$$\left. \begin{aligned} OM &= \frac{1}{2}(OA + OC) \\ OM &= \frac{1}{2}(OB + OD) \end{aligned} \right| +$$

$$2OM = \frac{1}{2}OA + \frac{1}{2}OB + \frac{1}{2}OC + \frac{1}{2}OD$$

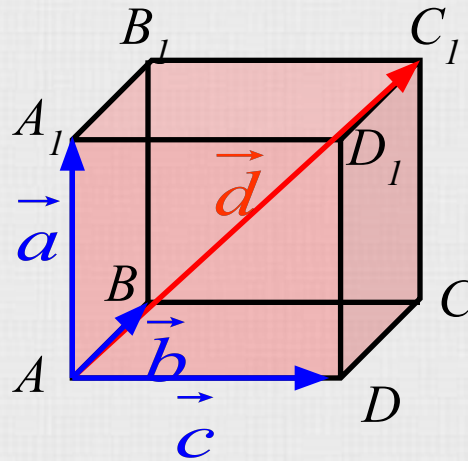
$$OM = \frac{1}{4}OA + \frac{1}{4}OB + \frac{1}{4}OC + \frac{1}{4}OD =$$

$$= \frac{1}{4}(OA + OB + OC + OD) \div . \grave{o} . \ddot{a} .$$



Вектор, лежащий на диагонали параллелепипеда,

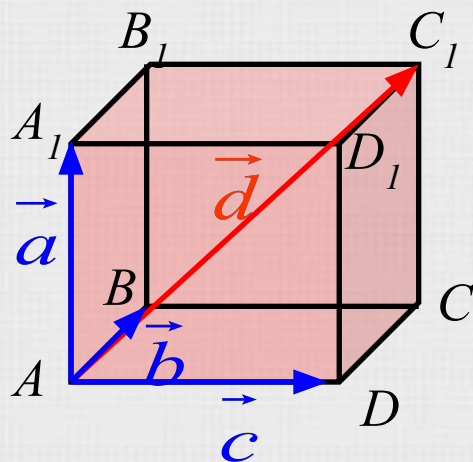
*равен сумме векторов, лежащих на трех его ребрах,
исходящих из одной вершины.*



$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Доказательство

Доказательство



Доказательство :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC_1} &= \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} = \\ &= \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \text{ ч.т.д.}\end{aligned}$$

Дано :

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – пар – м

$$\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AD} = \vec{c}$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \vec{d}$$

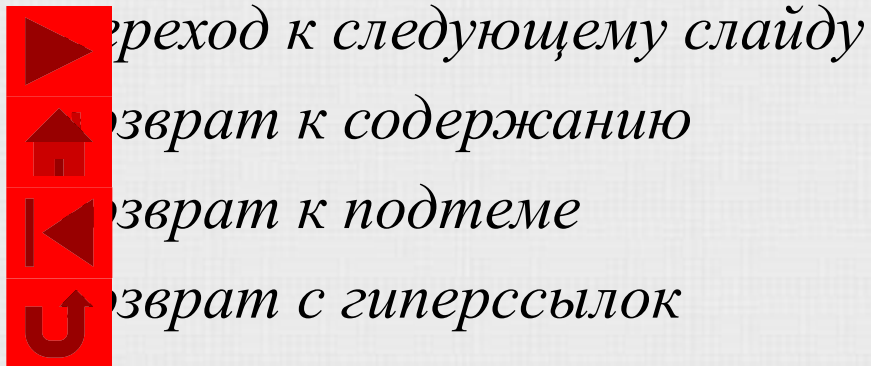
Доказать :

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$



Помощь в управлении презентацией

- *управление презентацией осуществляется с помощью левой клавиши мыши*
- *переход от одного слайда к другому и на гиперссылки по одиночному щелчку*
- *завершение презентации при нажатии кнопки выход*



Проверь себя

- Устные вопросы
- Задача 1 ~~Задача 1.~~ Задача на доказательство
- Задача 2. Разложение векторов
- Задача 3. Сложение и вычитание векторов
- Задача 4. Скалярное произведение



Устные вопросы

Справедливо ли утверждение:

а) любые два противоположно направленных вектора коллинеарны?

б) любые два коллинеарных вектора сонаправлены?

в) любые два равных вектора коллинеарны?

г) любые два сонаправленных вектора равны?

д) если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$?

е) существуют векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ такие, что $\vec{a}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны, а $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны?

Ответ

ы



Ответы

а) ДА

б) НЕТ (могут быть и противоположно направленными)

в) ДА

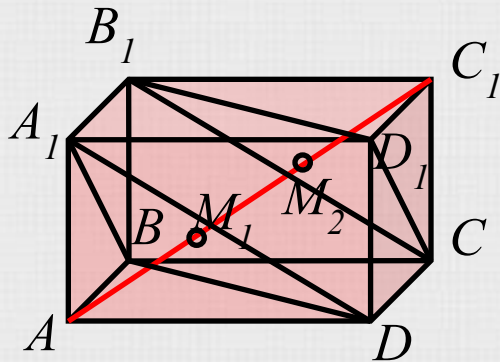
г) НЕТ (могут иметь разную длину)

д) ДА

е) ДА



Задача 1. Задача на доказательство



Дано :

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – пар – д

M_1, M_2 – точки пересечения

медиан $\triangle A_1 B D$ и $\triangle D_1 C B_1$

соответственно

Доказать :

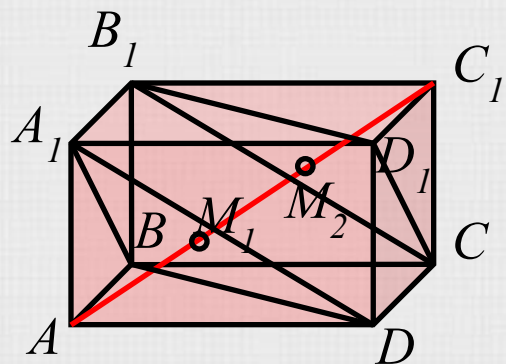
$$AM_1 = M_1 M_2 = M_2 C_1$$

Решени

е



Решение



Доказательство :

Рассм. тетраэдр AA_1BD

M_1 – центр оид $\triangle AA_1BD$

$$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \text{ по правилу пар – да}$$

$$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$$

$$M \in AC_1, AM_1 = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$$

$$\text{аналогично } M_2 \in AC_1, C_1M_2 = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$$

следовательно $AM_1 = M_1M_2 = M_2C_1$ ч.т.д.

Дано :

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – пар – д

M_1, M_2 – точки пересечения
медиан $\triangle A_1 BD$ и $\triangle D_1 CB_1$

соответственно

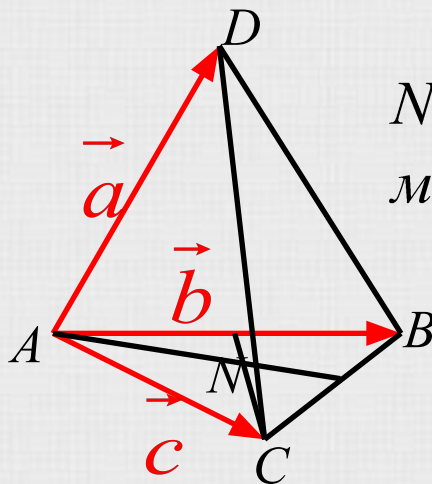
Доказать :

$$AM_1 = M_1M_2 = M_2C_1$$



Задача 2. Разложение векторов

Разложите вектор по $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:



N – точка пересечения
медиан $\triangle ABC$

- а) $\overrightarrow{DB}$
- б) $\overrightarrow{CB}$
- в) $\overrightarrow{DC}$
- г) $\overrightarrow{DN}$

Решение



Решение

$$a) \overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$б) \overrightarrow{CB} = \vec{b} - \vec{c}$$

$$в) \overrightarrow{DC} = \vec{c} - \vec{a}$$

$$г) \overrightarrow{DN} = -\vec{a} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AN} = -\vec{a} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} (\vec{b} + \vec{c}) \right) =$$
$$= -\vec{a} + \frac{1}{6} \vec{b} + \frac{1}{6} \vec{c}$$



Задача 3. Сложение и вычитание

Упростите выражения:

а) $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MK}$

б) $\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MA}$

в) $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{ST}$

г) $\overrightarrow{PL} - \overrightarrow{PK}$

д) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM}$

е) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{EP} - \overrightarrow{MD}$

Решение



Решение

$$a) \quad \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{CK}$$

$$б) \quad \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{DA}$$

$$в) \quad \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{TD}$$

$$г) \quad \overrightarrow{PL} - \overrightarrow{PK} = \overrightarrow{KL}$$

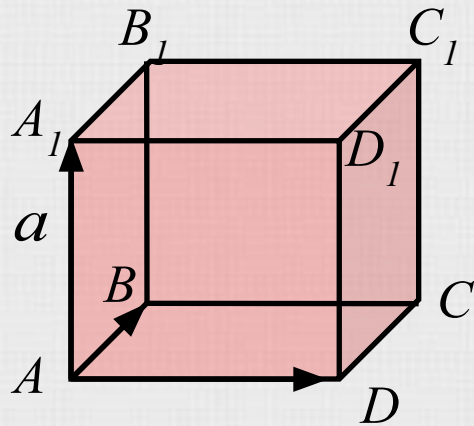
$$\begin{aligned} \delta) \quad & \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} = \\ & = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{BM} = \\ & = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) \quad & \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{EP} - \overrightarrow{MD} = \\ & = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EK} = \\ & = \overrightarrow{AK} \end{aligned}$$



Задача 4. Скалярное произведение

Вычислить скалярное произведение векторов:



Дано :
 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб
 $|\overrightarrow{AB}| = a$

а) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B_1 C_1}$

б) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{C_1 A_1}$

в) $\overrightarrow{D_1 B} \cdot \overrightarrow{AC}$

г) $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

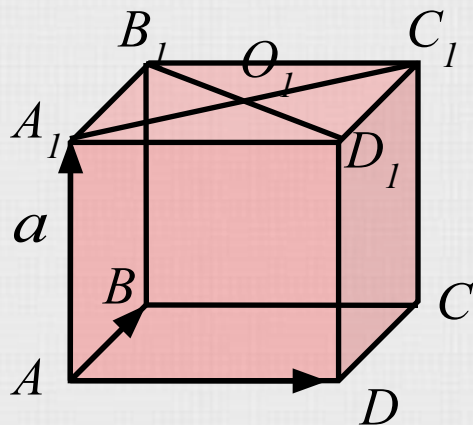
Решени

e



ENERGYPIXEL.COM

1


$$A_1 C_1 \cap B_1 D_1 = O_1$$

$$\text{ЖС)} \overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1B}$$

e



Решение

$$a) \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AD}^2 = AD^2 = a^2$$

б) AC – диагональ квадрата

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1} = -\overrightarrow{C_1A_1}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{C_1A_1} = \overrightarrow{AC} \cdot (-\overrightarrow{A_1C_1}) = -\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = -(a\sqrt{2})^2 = -2a^2$$

в) D_1B – диагональ куба

$$D_1B = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}a \text{ (т. Пифагора из } \triangle DD_1B)$$

$$\overrightarrow{D_1B} \cdot \overrightarrow{AC} = \sqrt{3}a^2 \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = a^3 \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^3 \sqrt{3}$$

г) BA_1, BC_1 – диагонали квадратов

$\triangle A_1BC_1$ – равносторонний, $\angle A_1BC_1 = 60^\circ$

$$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2a^2}{2} = a^2$$



Решение

д) A_1O_1 – половина диагонали квадрата

A_1C_1 – диагональ квадрата

$$\angle O_1A_1C_1 = 0^\circ$$

$$\overrightarrow{A_1O_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 0^\circ = a^2$$

е) D_1O_1, B_1O_1 – половины диагонали квадрата

$$\overrightarrow{D_1O_1} \cdot \overrightarrow{B_1O_1} = \overrightarrow{D_1O_1} \cdot (-\overrightarrow{O_1B_1}) = -\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = -\frac{a^2}{2}$$



Решение

ж) I способ – решение по определению:

$$BO_1 = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

C_1B – диагональ квадрата

$$\angle O_1BC_1 = \frac{1}{2} \angle A_1BC_1 = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$$

$$\overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1B} = \overrightarrow{BO_1} \cdot (-\overrightarrow{BC_1}) = -\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 30^\circ = -\frac{3}{2}a^2$$

II способ – разложение по базису:

$$\overrightarrow{BO_1} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{C_1B} = -\vec{b} - \vec{a}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1B} &= \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}\right) \cdot (-\vec{a} - \vec{b}) = -(\vec{a}^2 + \vec{a}\vec{b} - \\ &\quad - \frac{1}{2}\vec{a}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{b}^2) = -(\vec{a}^2 + \frac{1}{2}\vec{a}^2) = -\frac{3}{2}a^2 \end{aligned}$$

