

Лекция 4

Многомерность («проклятие размерностей», т.Эйлера на поверхностях рода ≥ 0 , знаковые графы и др.)

Шведовский В.А. д.соц.н., к.ф.-м.н.

Спецкурс ВМК «Математическое
моделирование в социологии»

Преодоление «проклятья размерности» и его цена

- Теорема. Для любого конечного графа $G_p = \{V, E\}$, $|V| < \infty$, $|E| < \infty$ существует его реализация в трёхмерном пространстве R^3 .
- Док-во. Возьмём в R^3 –пространстве прямую и расположим на ней все вершины $V_1, V_2, \dots, V_p$. Пусть число рёбер $|E| = q$. Проведём через прямую связку плоскостей в количестве q . Получится «книга с q страницами», на каждой из которых разместится по одному ребру, концы которых будут упираться в свою пару вершин $v_i v_j$. ЧТД.

Теорема Турана о существовании у графа G треугольника

Теорема Наибольшее число ребер у графов, имеющих p вершин и не содержащих треугольников, равно $\lfloor p^2/4 \rfloor$.

Док. во. Отношение $\lfloor \cdot \rfloor$ означает ближайшее целое число, меньшее вычисленного в скобках. Для малых p , например, 3 или 4, утверждение очевидно: для $p=3$ $\lfloor p^2/4 \rfloor = 2$, для $p=4$ $\lfloor p^2/4 \rfloor = 3$. Будем доказывать методом индукции (для чётных p , - для нечётных доказываете сами). Итак, пусть утверждение справедливо для всех чётных

$p \leq 2n$. Докажем его для $p = 2n + 2$.

Тогда возьмём граф G с $2n + 2$ – вершинами и не содержащий треугольников. Из факта связности графа вытекает существование у него пары смежных вершин u, v .

В подграфе $G_1 = G - \{u, v\}$ имеется $2n$ вершин и нет треугольников, так что по предположению индукции в графе G_1 самое большее $\lfloor 4n^2/4 \rfloor = n^2$ рёбер.

Подсчитаем,

сколько рёбер может быть в графе G .

В графе G не существует такой вершины w , смежной с u, v , ибо тогда в нём был бы треугольник. Таким образом, если вершина u смежна с k вершинами, то вершина v может быть смежна самое большее с $2n - k$ вершинами. Поэтому в

Планарные и плоские графы

Граф называется *планарным*, если его можно уложить на плоскости; *плоский граф* — это граф, уже уложенный на плоскости. Например, кубический граф, показанный на рис. 11.1, а, планарный, поскольку он изоморфен плоскому графу, изображенному на рис. 11.1, б.



Рис. 11.1. Планарный граф и его укладка.

Области, определяемые плоским графом, назовем его *гранями* (или *внутренними гранями*); неограниченную область будем называть *внешней гранью*. Если границей грани плоского графа является простой цикл, то иногда под гранью будем понимать этот цикл. Плоский граф, представленный на рис. 11.2, имеет две внутренние грани f_1 , f_2 и одну внешнюю f_3 . Из этих граней только f_2 ограничена простым циклом.

Изучение планарных графов было начато Эйлером в его исследованиях полиэдров. С каждым полиэдром связан граф, состоящий из точек и линий полиэдра; этот граф называется *1-скелетом*. Например, граф Q_3 есть 1-скелет куба.

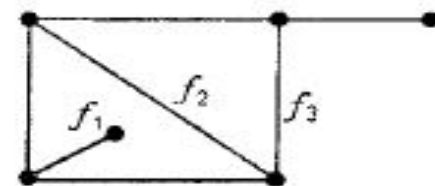


Рис. 11.2. Плоский граф.

Теорема Эйлера (для плоскости – сферы и 2-мерной поверхности рода $\gamma \geq 1$)

- Формула Эйлера: $V-E+F = 2 - 2\gamma$, для сферы $\gamma = 0$

Теорема 1 (формула Эйлера для полиэдров). Для любого полиэдра, расположенного на сфере и имеющего V точек, E линий и F граней,

$$V-E+F=2. \quad (1)$$

Для 3-куба имеем $V=8$, $E=12$ и $F=6$, так что равенство (1) выполняется; для тетраэдра $V=F=4$ и $E=6$. Прежде чем доказывать равенство (1) в общем случае, переформулируем его в теоретико-графовых терминах. *Плоской картой* называется связный плоский граф вместе со всеми его гранями. Уравнение (1) для плоской карты (с p вершинами, q ребрами и r гранями) будет иметь вид

$$p-q+r=2. \quad (1')$$

Теорема Эйлера (продолжение)

- Возьмём остов (дерево) любого плоского n -графа, в котором имеются циклы. В таком графе число вершин $p=n$, а число рёбер $q=n-1$ и число граней $r=1$, ибо циклов нет, а есть только одна внешняя грань, т.е.
 - $p - q + r = 2$
- Будем достраивать по 1 ребру остов до его первоначального графа, и тогда каждое новое ребро доставляет ещё и одну новую грань, что оставляет справедливой приведённую формулу, ч.т.д.

Теорема о плоской карте

- Если графу G соответствует плоская (p, q) - карта, в которой каждая грань является n – циклом, т.е. содержит n – рёбер, то

$$\bullet \quad q = n \cdot (p - 2) / (n - 2) \quad (\&)$$

- Д-во: Поскольку каждая грань графа G есть n – цикл, то любое ребро принадлежит двум граням, а каждая грань содержит n – рёбер. Отсюда: $n \cdot r = 2q$.
- Подставим это выражение в $p - q + r = 2$:
- $p - q + 2q/n = 2 \rightarrow p - 2 = q \cdot (1 - 2/n)$ Отсюда $(\&)$ Ч.т.д.
- **Для максимальных планарных графов:**
- **Следствие 1: Если длина цикла $n = 3$, то $q = 3p - 6$;**
- **Следствие 1: Если длина цикла $n = 4$, то $q = 2p - 4$;**

Теорема Куратовского - Понтрягина

Теорема *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного K_5 или $K_{3,3}$.*

- Д-во. 1) Проверим планарность графа K_5 : $p=5$, q —число рёбер
- Условие планарности: $q \leq 3p-6$, т.е. $q_{\text{план}} = 9$, но в K_5 $q = 10$,
- Аналогично для $K_{3,3}$: $q_{\text{план}} = 12$, а по факту для $K_{3,3}$ $q = 16$
- 2)Так как графы K_5 и $K_{3,3}$ непланарны, то это значит, что содержащие их в качестве подграфов графы также непланарны, ч.т.д.

Фрагмент из книги Ф.Харари «Теория графов», М.: МИР, 1973

Теория графов в двадцатом веке

В 1936 г. психолог Левин [1] высказал предположение, что «жизненное пространство» индивидуума можно представить с помощью планарной карты ¹⁾. На такой карте области представляют различные типы деятельности человека, например, то, что он делает на работе, дома, или же его хобби.

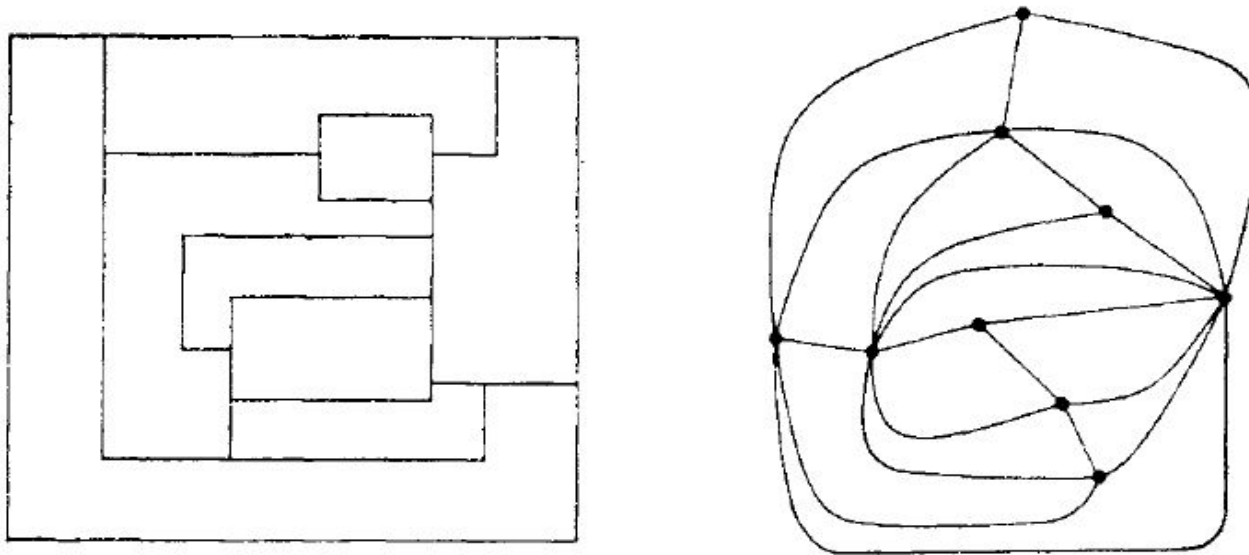
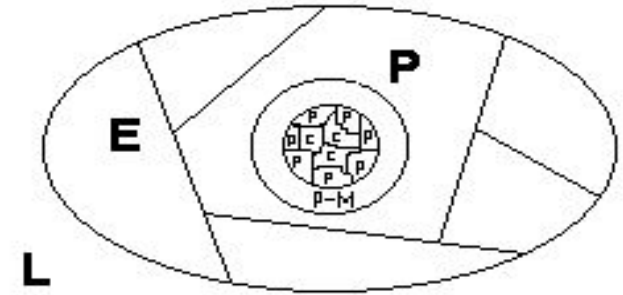
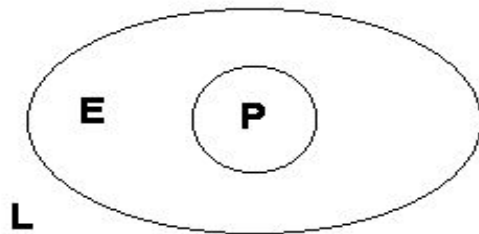


Рис. 1.6. Карта и соответствующий ей граф.

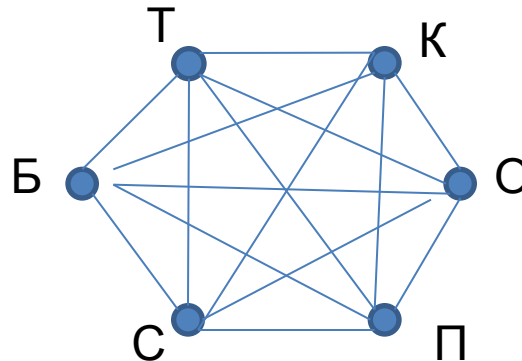
Модель К.Левина жизненного пространства ЛИЧНОСТИ

L – жизненное пространство,
 p – сама личность с её ячеистой структурой,
 E – психологическая среда, I – информация
 Движение фокуса психической активности по ячейкам структуры личности есть процесс её самоидентификации и считывания требуемой I



$$\varpi = \{\omega_n\}_{-\infty}^{+\infty}$$

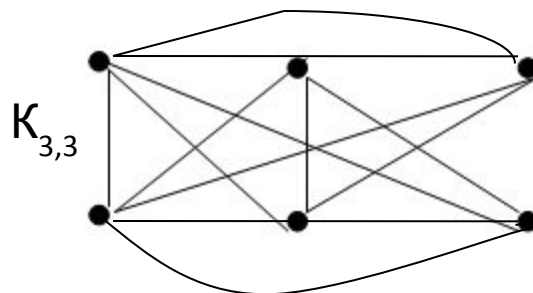
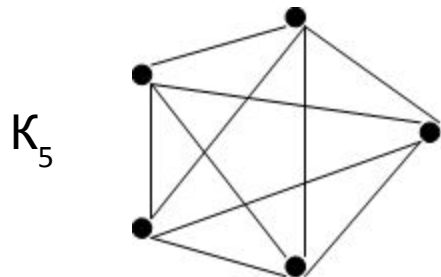
$$\sigma \{\omega_n\} = \{\omega_{n+1}\}$$



$$\notin \{T, B, K, O, C, \Pi\}$$

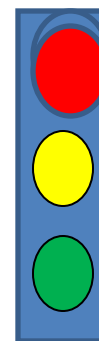
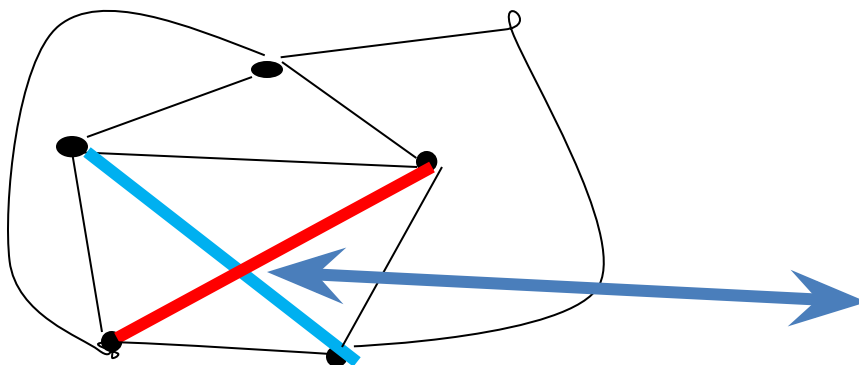
$$\Psi(x) = \varpi = \{\omega_n\} \leftrightarrow f^n x \in E\omega_n \leftrightarrow x \in \bigcap_n f^{-n} E\omega_n$$

Теорема Куратовского - Понтрягина



$D = 4$

$D=5$



Построение многомерной сети

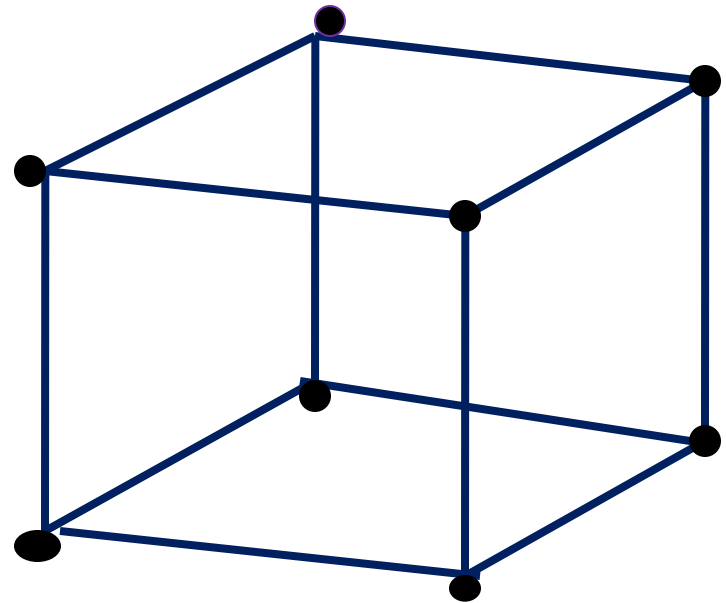
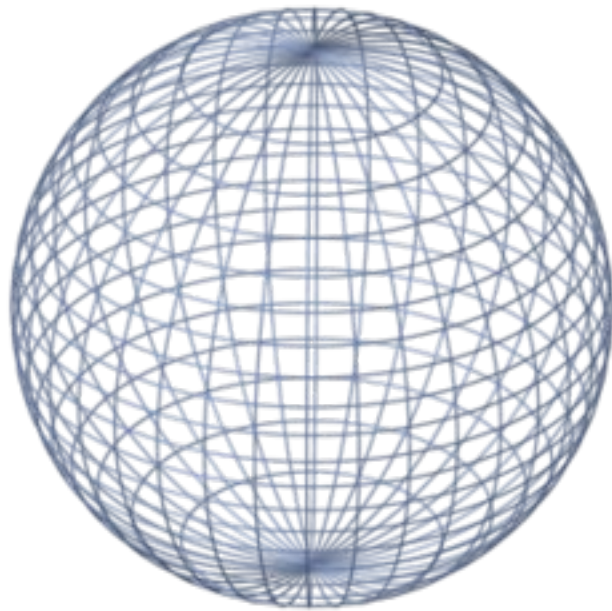
- Рассмотрим **граф n – мерного куба**, т.е. удалим все грани и оставим только вершины и рёбра (такой граф не является полным). Тогда минимальный род двумерных поверхностей, на которых такой граф будет представлен без пересечений ребер, записывается формулой:

$$\gamma(n) = (n-4) * 2^{(n-3)} + 1$$

Байнеке Л.В., Харари Ф. (1974)

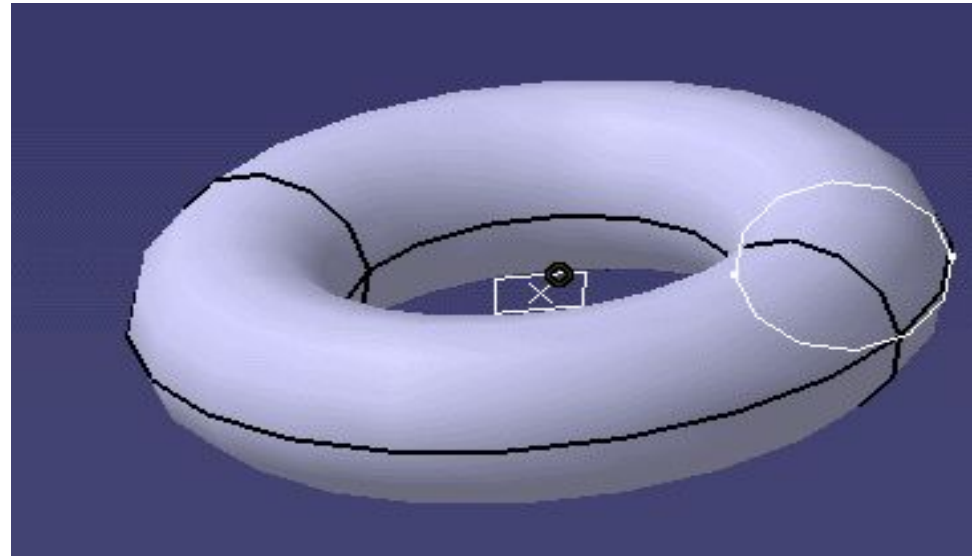
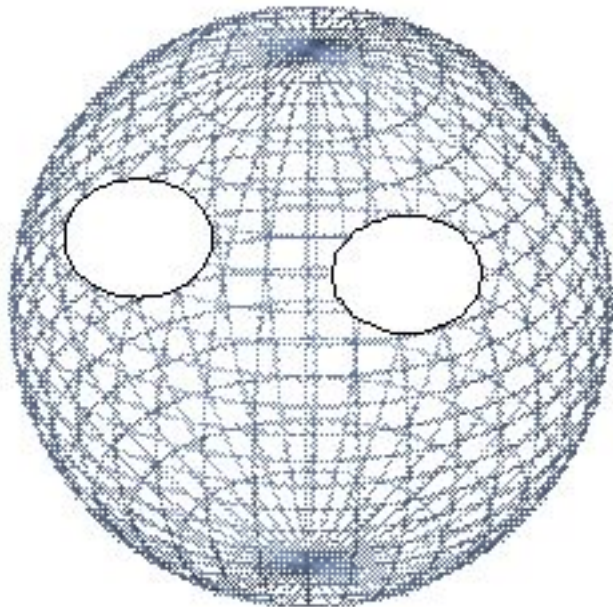
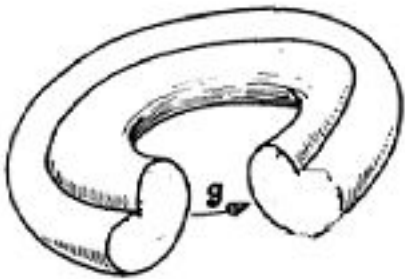
Сферическая поверхность - род « $\gamma=0$ » и граф 3-х куба, образующего сеть на сфере без рёберных пересечений (аналог планарного графа)

Отличие от плоскости: компактность поверхности, т.е. допускает конечное покрытие поверхности многоугольниками



Теорема Эйлера: $2 - 2 * \gamma = V - E + F = 8 - 12 + 6 = 2$

Метод построения поверхностей рода $\gamma > 0$ -
приклеивание «ручек» к вырезанным отверстиям

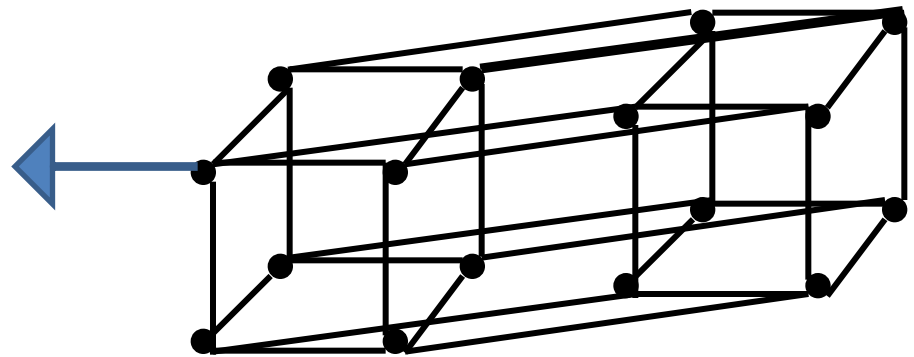
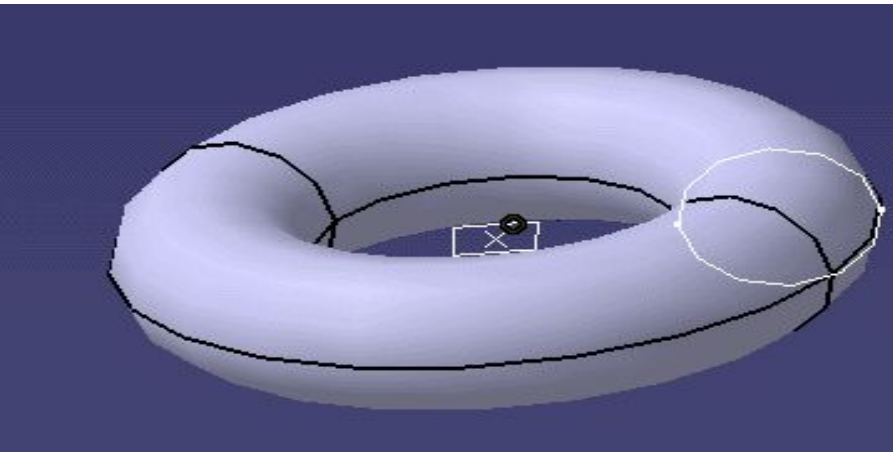


$$\gamma = 1$$

Минимальная сеть - граф 4-х куба для поверхности тора

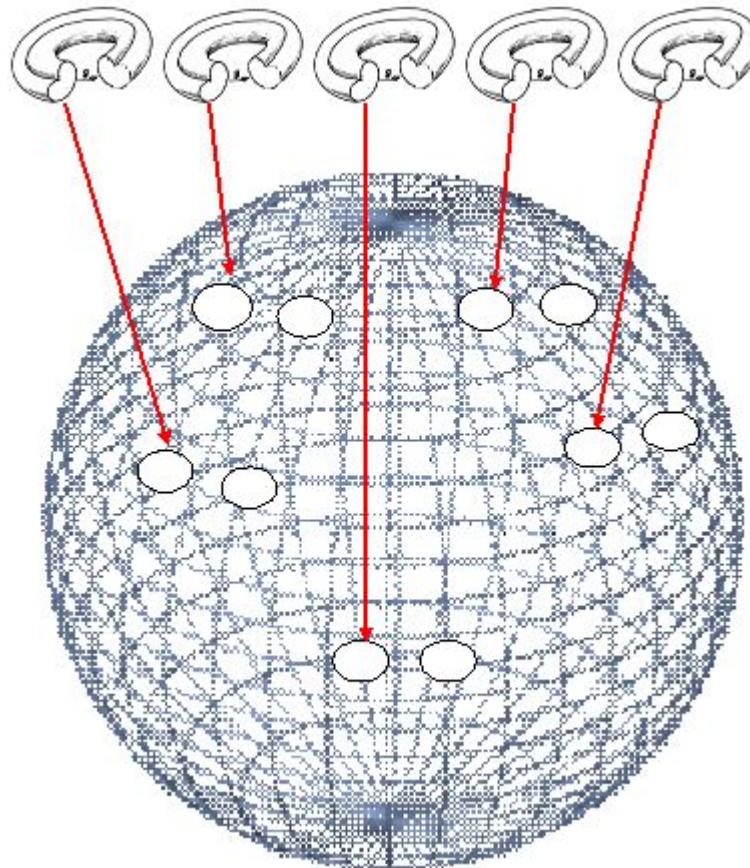
$$\gamma(n) = (n-4)*2^{(n-3)} + 1$$

$$\gamma(4) = (4-4)*2^{(4-3)} + 1 = 1$$

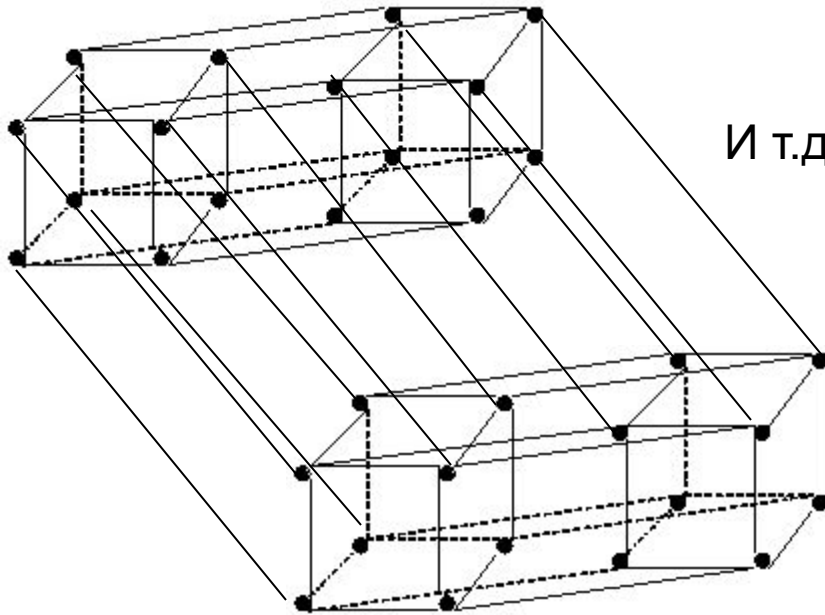


Каков род поверхности для графа 5-мерного куба?

$$\gamma(5) = (5-4) * 2^{(5-3)} + 1 = 5$$



Вид минимальной «безсветофорной» сети для пространства личности с $\gamma(5)$



И т.д.

Побочный продукт-
32-х вершинный классификатор:
В каждой вершине совмещаются
полюса шкал семантического
дифференциала, например,
вариант выбора идеала Спутника

Душевный – чёрствый
Аккуратный – неряшливый
Волевой – безвольный
Трудолюбивый – ленивый
Спокойный - нервный

Оценки **min** числа **неустраимых** **рёберных** **пересечений** для обыкновенных графов, расположенных на плоскости

- это наименьшее число, согласно Т.Саати (1964), не превосходит
- $1/64 * n * (n-2)^2 * (n-4)$ - при n чётном
-
- и не превосходит
-
- $1/64 * (n-1)^2 * (n-3)^2$ - при n нечётном

К объяснению смысла «7» в законе « 7 ± 2 »

Табл.1. Зависимость эффективности построения «безсветофорной» сети посредством усложнения топологии поверхности от её рода

Степень вершин графа $G(X, U)$	Число «свето – форов»	Число ручек	Число светофоров на 1 ручку	Число вершин $G(X, U)$	
				Абсолют ное	Относитель. - на 1 ручку
n	m	$\gamma(n)$	$m/\gamma(n)$	 X 	$X /\gamma(n)$
4	0	1	0	16	16
5	0.5	5	0.1	32	6.4
6	3	17	0.17	64	3.76
7	9	49	0.18	128	2.61
8	18	129	0.13	256	1.98
9	36	321	0.11	512	1.59
10	60	769	0.07	1024	1.33
11	100	1793	0.055	2048	1.14

Характеристика Эйлера-Пуанкаре χ графа многомерной сети на поверхности рода p

- Эта характеристика в данном контексте – « $p = \gamma(n)$ » - определяется как

$$\chi = 2 - 2p = 2 - (n-4)*2^{(n-2)} - 2 = (4-n)*2^{(n-2)}$$

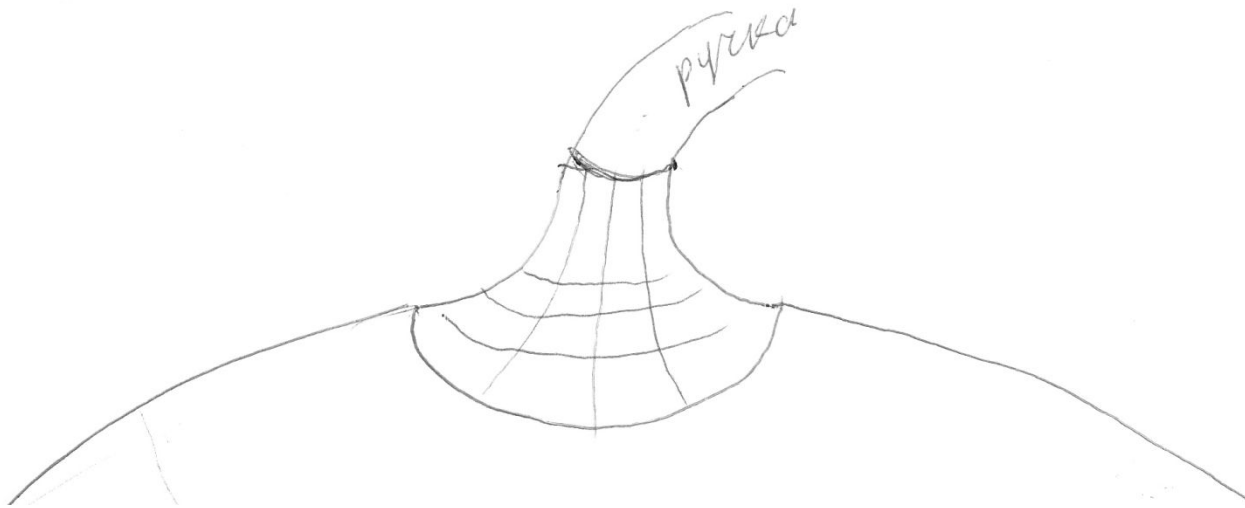
n	p	χ	$\Delta\chi$
3	0	2	
4	1	0	- 8
5	5	-8	-24
6	17	-32	-128
7	49	-160	-96
8	129	-256	-384

Связь с гауссовой кривизной

- характеристика Эйлера-Пуанкаре связана со средним по поверхности от величины гауссовой кривизны:

$$\bullet \int K dS = 2\pi \chi$$

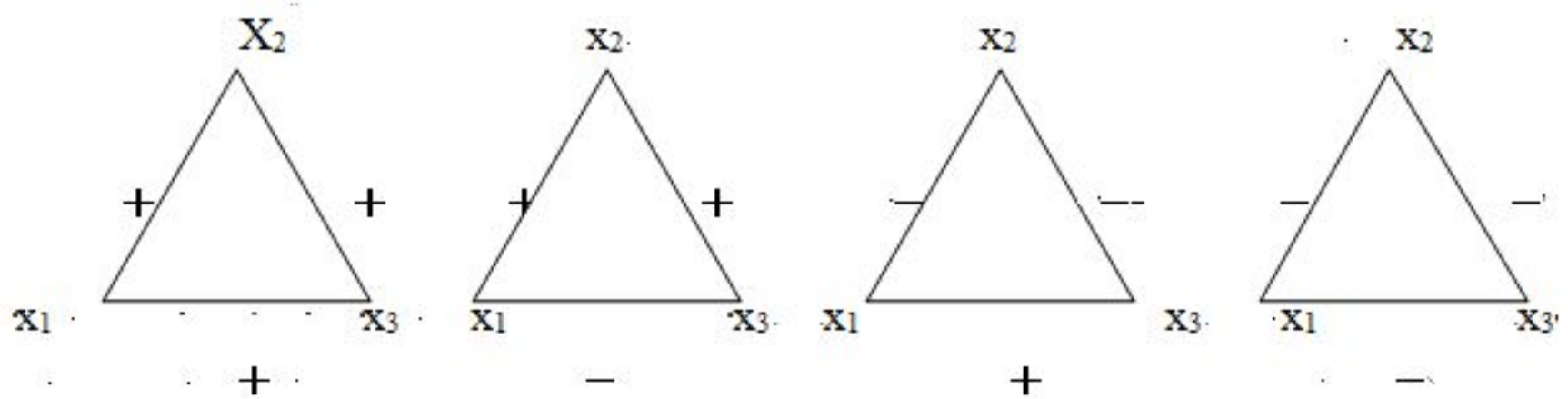
$\int K ds$ -интеграл по поверхности сопряжения ручки со сферой



$$\int K^- ds =$$

Пробл $\int_{3\pi/2}^{\pi} \cos(\varphi) \cdot \sqrt{(r^2 + R^2 - 2Rr \cos(\varphi)) / (R + r \cos(\varphi))} d\varphi \int_{2\pi}^0 d\psi$ кривизны в
 среднем отрицательной к кривизне отрицательной в почти
 каждой точке

Знаковые графы и структурная теорема



Второй и четвертый графы отношений — напряженные, неустойчивые ситуации.

Первый и третий — стабильное равновесие.

Структурная теорема Хайдера, Харари и Картрайта.

Знаковый граф сбалансирован, если и только если все множество его вершин может быть разбито на два подмножества таких, что в каждом из них вершины соединены ребром с положительным знаком, а вершины, принадлежащие разным подмножествам соединены между собой ребром с отрицательным знаком.

Пример применения т. Хайдера – Картрайта - Харари

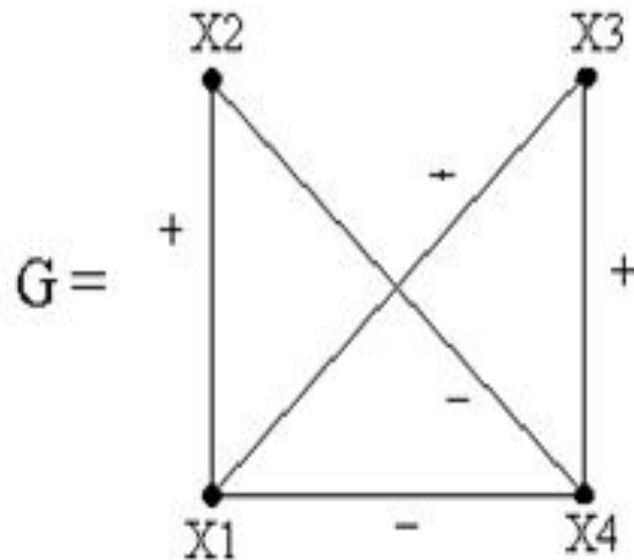


Рис. 1. Граф отношений взаимных симпатий и антипатий в группе из 4-х субъектов.

Литература

- 1. Емеличев В.А. Мельников О.И. и др. Лекции по теории графов: Учебное пособие. Изд. 4-е. М.: ЛЕНАНД, 2015.- 390 с.
- 2. Оре О. Теория графов. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ»/URSS, 2009. – 352 с.
- 3. Харари Ф. Теория графов. – М.: КомКнига /URSS, 2006. – 296 с.
- 4. Панюкова Т.А. Комбинаторика и теория графов: Учебное пособие. Изд. 3-е. испр. М.: ЛЕНАНД. 2014.- 216 с.