

ВУНЦ ВВС «ВВА» (филиал, г. Краснодар)

Кафедра физики и электротехники

Учебная дисциплина

Электротехника и электроника

Тема 2/1

Цепи синусоидального тока

Лекция № 3

Учебные вопросы:

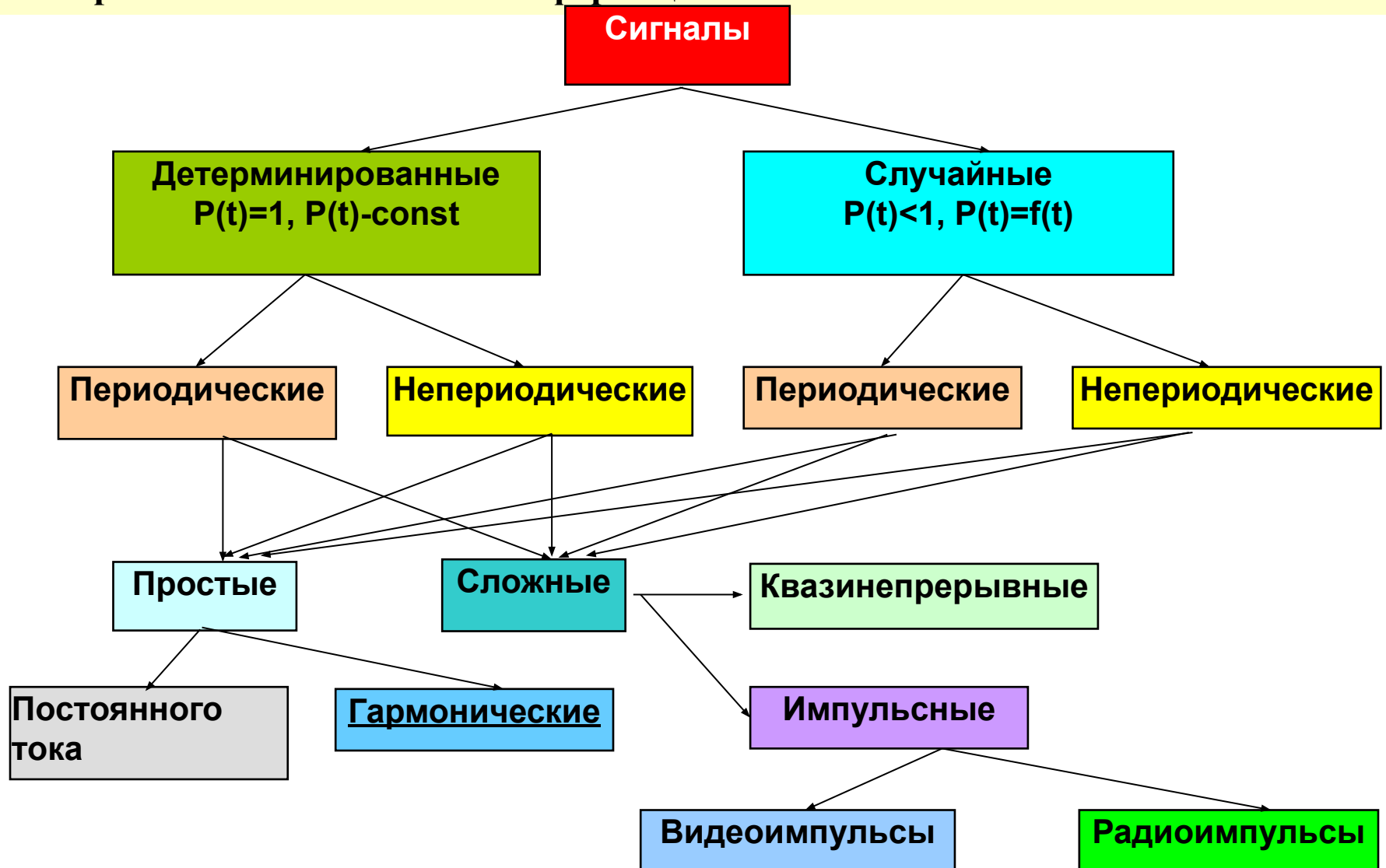
- 1. Электрические цепи при гармоническом воздействии.
Гармонические колебания. Основные понятия и определения. Действующее и среднее значения гармонической функции**
- 2. Способы представления гармонических колебаний**
- 3. Гармонические колебания в пассивных элементах электрической цепи. Методы анализа линейных электрических цепей с двуполюсными элементами**
- 4*. Мощность электрической цепи переменного тока**

Литература:

Бухонский М.И., Найдёнов С.В., Тельнов Г.В. Электротехника и электроника. Аналоговая схемотехника. Часть 1: Учебное пособие.— Краснодар: Филиал ВУНЦ ВВС «ВВА имени проф. Н.Е.Жуковского и Ю.А.Гагарина» (г. Краснодар), 2011.— с. 53-71.

1. Электрические цепи при гармоническом воздействии. Гармонические колебания. Основные понятия и определения. Действующее и среднее значения гармонической функции

Сигналы - физические процессы, параметры которых содержат информацию: используются постоянные токи (напряжения), их колебания или импульсы, которые рассматриваются как носители информации



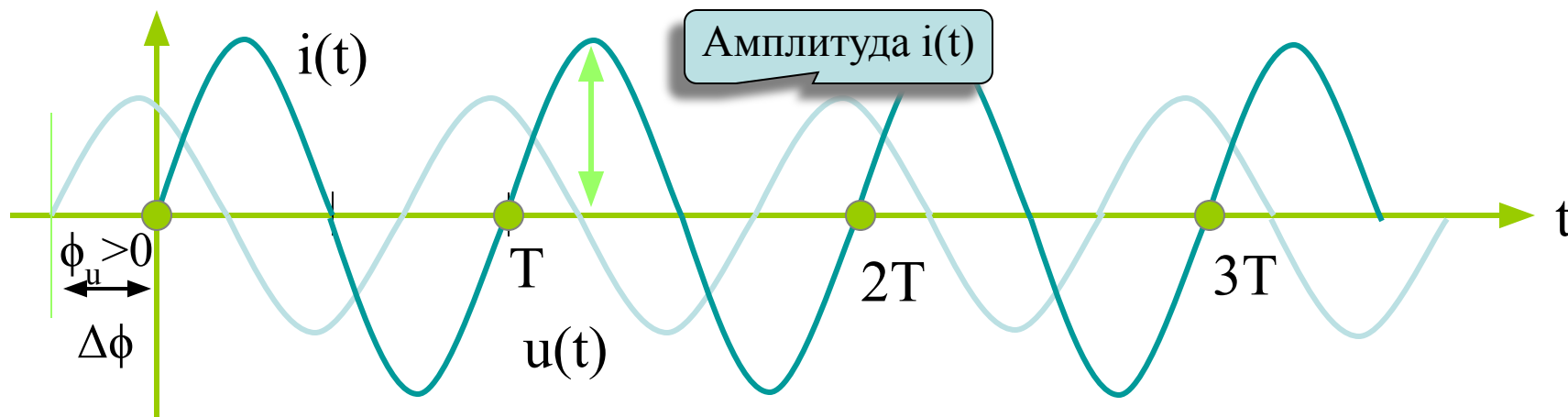
Гармонические колебания широко используются в электротехнике и электронике для передачи электрической энергии и сигналов, а также могут применяться в качестве простейшего испытательного сигнала.

Гармоническим колебанием называют колебания, изменяющиеся по закону синуса или косинуса. Далее рассматривается только синусоидальный закон

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i)$$



$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u)$$



Параметры гармонических колебаний

I_m, U_m – амплитуда тока или напряжения (I_m, U_m) = const

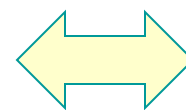
$(\omega t + \varphi_i), (\omega t + \varphi_u)$ – полная фаза (фазовый угол), фаза, рад

$$f = \frac{1}{T}, \Gamma u$$

$$\omega = \frac{d(\omega \cdot t + \varphi_u)}{dt}$$

Угловая частота, рад/с.

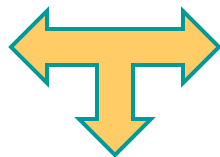
$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$



$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

При совместном рассмотрении двух гармонических колебаний одинаковой частоты разность их фаз, равную разности их начальных фаз обычно называют сдвигом фаз и обозначают $\Delta\phi$ или ϕ .

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u)$$



$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i)$$

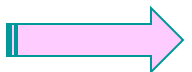
$$\Delta\varphi = \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

$$\Delta\varphi = \varphi = 0$$



Колебания синфазные (совпадают по фазе)

$$\Delta\varphi = \varphi = \pm\pi$$



Колебания противофазные

$$\Delta\varphi = \varphi = \pm\pi/2$$



Колебания находятся в квадратуре

$$\Delta\varphi = \varphi \boxtimes 0, \rightarrow m.e. \rightarrow \varphi_u \boxtimes \varphi_i$$

Напряжение опережает ток по фазе

Напряжение отстает от тока по фазе

$$\Delta\varphi = \varphi \boxtimes 0, \rightarrow m.e. \rightarrow \varphi_u \boxtimes \varphi_i$$

Для питания различных электроэнергетических установок в России принята промышленная частота $f = 50$ Гц. В качестве источников гармонических колебаний промышленной частоты используются электромашинные генераторы

$$f = p_p \cdot n / 60$$

где p_p число пар полюсов ротора, n – (об.мин) – скорость вращения ротора.

В практической электротехнике для оценки прежде всего энергетических возможностей переменного тока вводятся понятия действующего (среднеквадратического) и среднего значения переменного тока за период.

Определение 1. Действующим (его также называют эффективным или среднеквадратическим) значением периодического тока $i(t)$ называют такой постоянный ток I , который в одном и том же сопротивлении R за время одного периода T тока $i(t)$ выделяет равное с переменным током количества тепла

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$I = 0,707 I_m$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

$$U = 0,707 U_m$$

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

Определение 2. Средним значением I_{CP} периодического тока $i(t)$ называют среднее значение тока за положительный полупериод, совпадающее со средним значением по модулю.

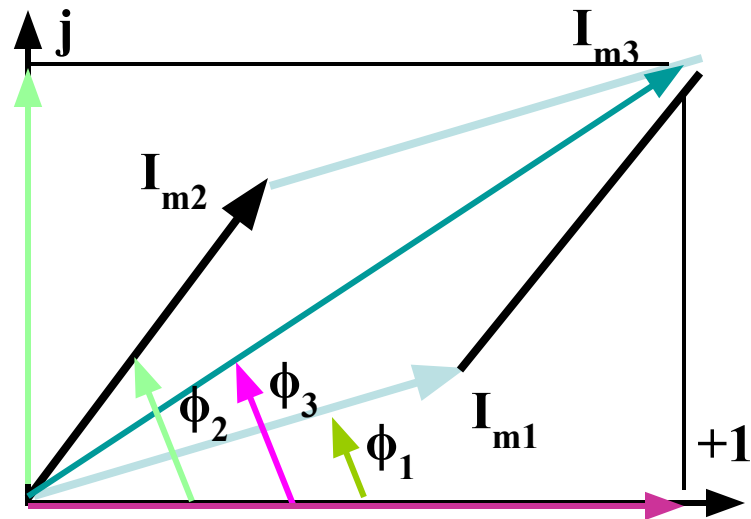
$$I_{CP} = 0,637 \cdot I_m$$

$$U_{CP} = 0,637 \cdot U_m$$

$$E_{CP} = 0,637 \cdot E_m$$

2. Способы представления гармонических колебаний.

Гармонические колебания можно представить различными способами: функциями времени (*временное представление*), вращающимися векторами (*векторное представление*), комплексными числами, амплитудными и фазовыми спектрами (*спектральное представление*).

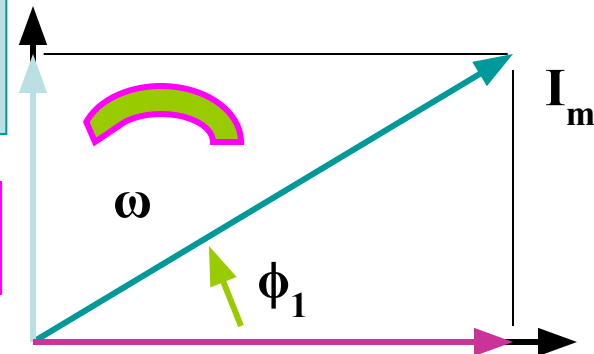


$$I_{m3} = \sqrt{I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + 2I_{m1}I_{m2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)};$$

$$\varphi_3 = \arctg \frac{I_{m1} \sin \varphi_1 + I_{m2} \sin \varphi_2}{I_{m1} \cos \varphi_1 + I_{m2} \cos \varphi}$$

Наиболее распространенными являются представление гармонических колебаний с помощью **КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ**

$$\text{Im} \left\{ \dot{I}_m \cdot e^{j\omega t} \right\}$$



$$i(t) = I_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)} = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) + jI_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\varphi_i}$$

Комплексная амплитуда тока

$$\text{Re} \left\{ \dot{I}_m \cdot e^{j\omega t} \right\}$$

Действительная часть

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел

$$\dot{U} = x + jy = r[\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)]$$



$$x = r \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\varphi)$$

Показательная (экспоненциальная) форма записи комплексных чисел

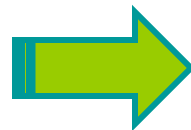
$$\dot{U} = a + jb = r \cdot e^{j\varphi} = r \cdot \exp(j\varphi)$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$$

$$\varphi = \arctg \frac{b}{a}$$

$$\dot{u}(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi) + jU_m \sin(\omega t + \varphi) = U_m e^{j(\omega t + \varphi)} = U_m e^{j\omega t} e^{j\varphi} = \dot{U}_m \cdot e^{j\omega t}$$

Комплексное действующее
значение



$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi} = U \cdot e^{j\varphi}$$

Комплексная форма записи законов Ома и Кирхгофа

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{\dot{Z}}; \dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}}$$

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_{mk} = 0$$

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^n \dot{Z}_k \cdot \dot{I}_k = \sum_{k=1}^n \dot{E}_k$$

Пример: Комплексная амплитуда напряжения

$$\text{В,} \quad \dot{U}_m = -100 + j100$$

частота $f = 1 \text{ кГц}$. Записать выражение для мгновенного напряжения.

Решение. Угловая частота ω рад/с,

амплитуда $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10^3 = 6280$

$\text{tg}\phi = 100/(-100) = -1$, т.к. действительная часть комплексной амплитуды отрицательная, а мнимая часть положительная, то

$$U_m = \sqrt{(-100)^2 + 100^2} = 100\sqrt{2}$$

вектор во второй четверти и, следовательно, $\phi = 3\pi/4$.

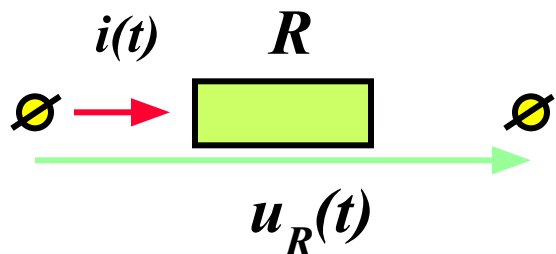
Таким образом, мгновенное значение напряжения

В.

$$u(t) = 100\sqrt{2} \cdot \sin(6280t + 3\pi / 4)$$

3. Гармонические колебания в пассивных элементах электрической цепи.

3.1 Резистивный элемент и его характеристики



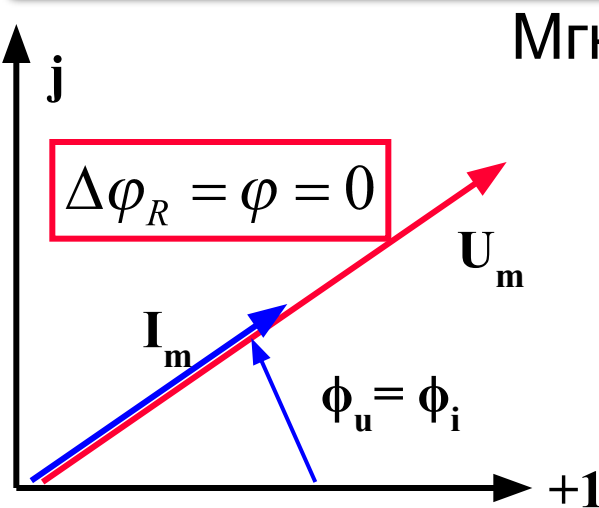
Пусть через резистор протекает ток $i(t)$:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \dot{I}_m e^{j\omega t}$$

$$u(t) = R \cdot i(t) = R \cdot I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = U_{mR} \sin(\omega t + \varphi_i) = U_{mR} \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$\dot{u}(t) = R \dot{I}_m e^{j\omega t} = \dot{U}_{mR} e^{j\omega t} = U_{mR} e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} = U_{mR} e^{j\varphi_u} e^{j\omega t}$$

комплексная
форма записи



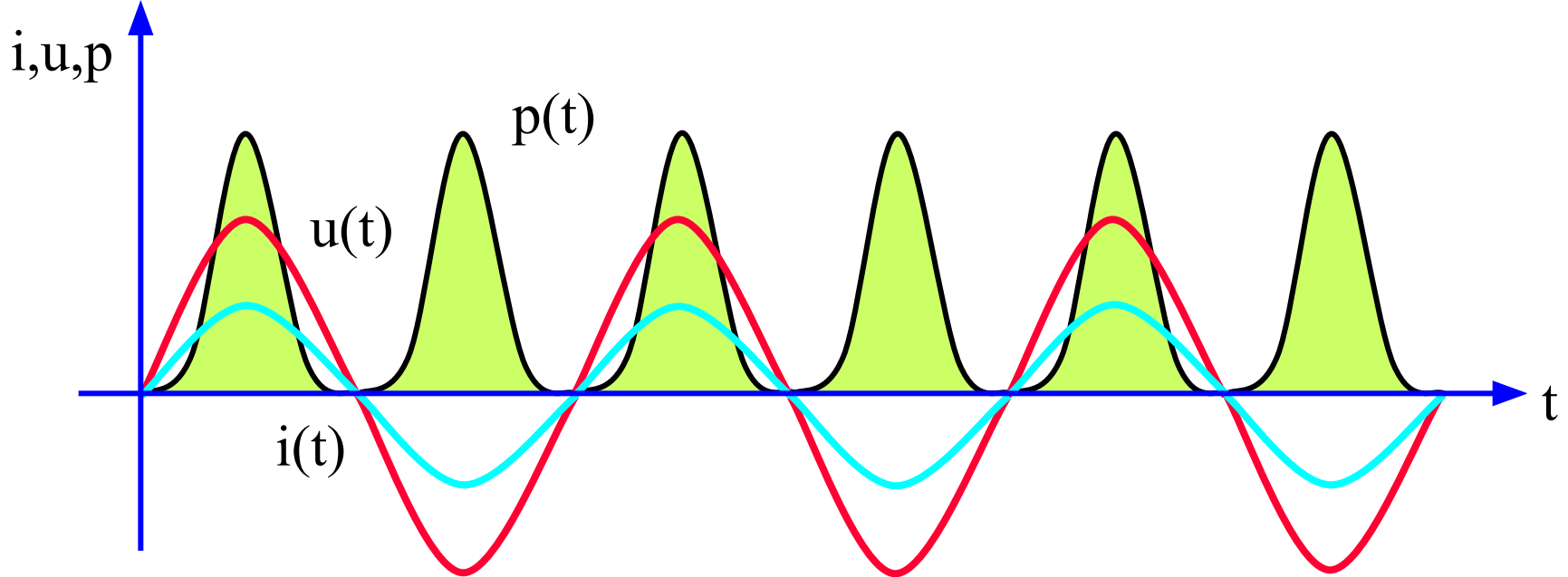
Колебания синфазные

$$U_{mR} = R \cdot I_m$$

$$U_R = R \cdot I$$

Мгновенная мощность колебания в резисторе

$$\begin{aligned} p(t) &= u \cdot i = R I_m \sin(\omega t + \varphi_i) \cdot I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = \\ &= R I_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi_i) = U_{mR} I_m \sin^2(\omega t + \varphi_i) = \\ &= \frac{2 U_{mR} I_m}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \sin^2(\omega t + \varphi_i) = 2 U_R I \sin^2(\omega t + \varphi_i) = \\ &= U_R \cdot I [1 - \cos 2(\omega t + \varphi_i)] \geq 0 \end{aligned}$$



**Средняя
мощность
колебаний**



$$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R \neq 0$$

Резистор – активное сопротивление

$$p_R(t) = U \cdot I \cdot (1 - \cos 2\omega t)$$

$$P = U \cdot I$$

$$Q = 0$$

$$S = P$$

$$R = \frac{P}{I^2}$$

$$Z_R = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{U_m \cdot e^{j\varphi_u}}{\frac{U_m \cdot e^{j\varphi_u}}{R}} = R$$

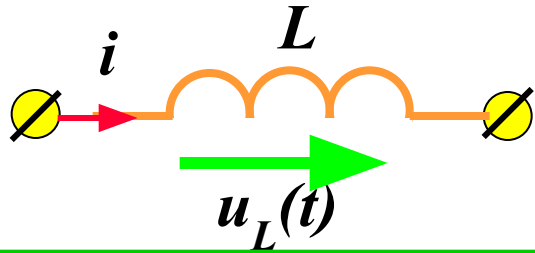
$$\Delta\varphi_R = \varphi = 0$$

$$Y_R = \frac{1}{Z_R} = \frac{1}{R} = G$$

$$\operatorname{Re}[Y] = R$$

$$\operatorname{Im}[Y] = 0$$

3.2 Индуктивный элемент и его характеристики



$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d(I_m \sin(\omega t + \varphi_i))}{dt} = \omega \cdot L \cdot I_m \cos(\omega t + \varphi_i) =$$

$$= U_{mL} \cos(\omega t + \varphi_i) = U_{mL} \sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}) = U_{mL} \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$\varphi_u = \varphi_i + \frac{\pi}{2}; \Rightarrow \Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}$$

$$U_{mL} = \omega \cdot L \cdot I_m$$

$$X_L(\omega) = \omega \cdot L$$

$$\dot{Z}_L = \frac{\dot{U}_{mL}}{\dot{I}_m} = \frac{\omega \cdot L \cdot I_m \cdot e^{j(\varphi_i + 90^\circ)}}{I_m \cdot e^{j\varphi_i}} = \omega \cdot L \cdot e^{j90^\circ} = j\omega \cdot L$$

**Комплексное
сопротивление
L-элемента**

$$Z_L(j\omega) = j \cdot \omega \cdot L = j \cdot X_L$$

$$\operatorname{Re}[Z_L] = 0$$

$$\operatorname{Im}[Z_L] = \omega \cdot L = X_L$$

Комплексная проводимость L-элемента

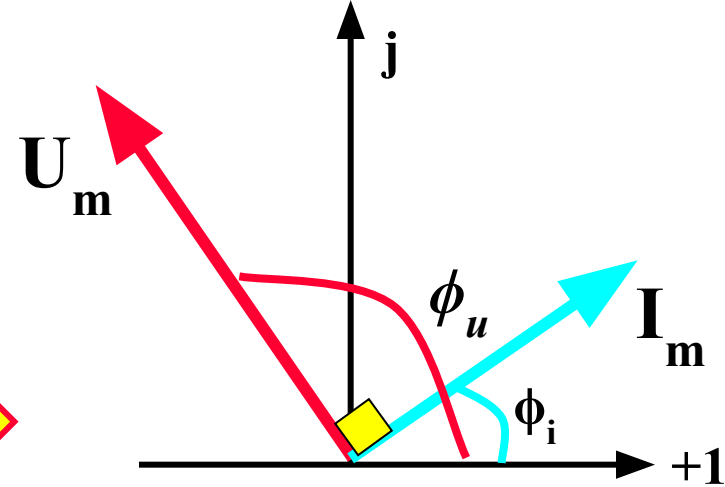
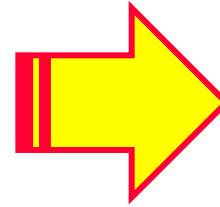
$$\dot{Y}_L = \frac{1}{\dot{Z}_L} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot L} = -j \frac{1}{\omega \cdot L}$$

$$\operatorname{Re}[Y_L] = 0$$

$$\operatorname{Im}[Y_L] = -\frac{1}{\omega \cdot L} = b_L$$

Напряжение на индуктивности имеет форму гармонического колебания и опережает по фазе колебания тока на угол $+\pi/2$.

Колебания тока и напряжения находятся в квадратуре



Мгновенная мощность изменяется во времени

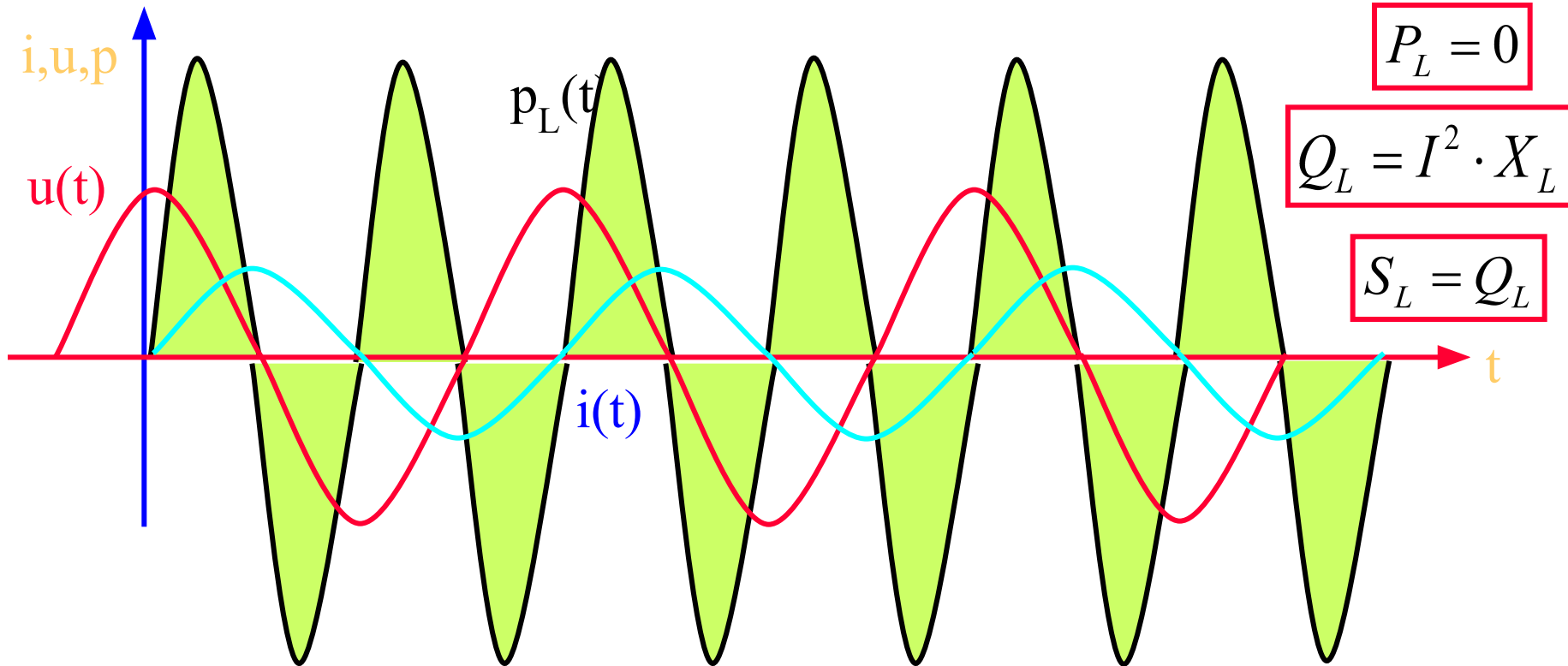
$$\begin{aligned}
 p_L &= u_L \cdot i = U_m \sin\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = \\
 &= \frac{1}{2} I_m U_m \left[\cos\left(\omega t + \varphi_i - \omega t - \varphi_i - \frac{\pi}{2}\right) \right] + \frac{1}{2} I_m U_m \left[-\cos\left(\omega t + \varphi_i + \omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} I_m U_m \left[-\cos\left(2\omega t + 2\varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{1}{2} I_m U_m [\sin(2\omega t + 2\varphi_i)] = \underline{\underline{IU \sin 2(\omega t + \varphi_i)}}
 \end{aligned}$$

по синусоидальному закону с частотой в два раза большей частоты тока

Мгновенная мощность положительна при нарастании по абсолютному значению тока в индуктивном элементе $\rightarrow 0 < t < T/4$ (накопление энергии в магнитном поле катушки индуктивности).

Энергия поступающая в индуктивный элемент за четверть периода ($p > 0$)

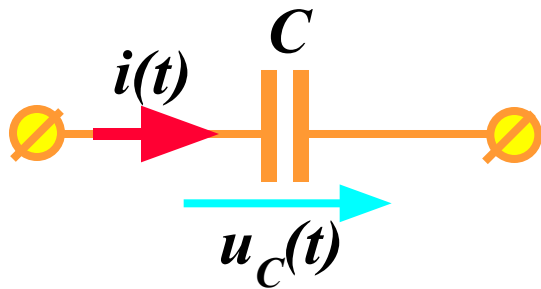
$$W_L = \int_0^{T/4} p_L(t) dt = \int_0^{T/4} u_L \cdot i dt = \int_0^{T/4} L \frac{di}{dt} i dt = \int_0^{T/4} L \cdot i \cdot di = \frac{LI_m^2}{2}$$



Средняя за период
мощность в
индуктивном
элементе

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_L(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} [I_m U_m \sin(2\omega t + 2\varphi_i)] dt = 0$$

3.3 Емкостной элемент и его характеристики

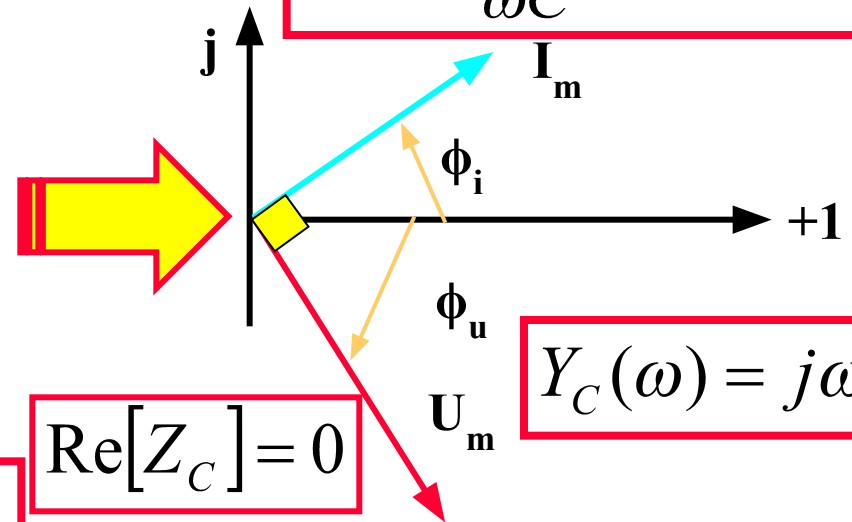


$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$\begin{aligned} u_C &= \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{C} \int I_m \sin(\omega t + \varphi_i) dt = \\ &= \frac{-I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \varphi_i) = \frac{-I_m}{\omega C} \sin(-\omega t - \varphi_i + \frac{\pi}{2}) = \\ &= U_{mC} \sin(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}) = U_{mC} \sin(\omega t + \varphi_u) \end{aligned}$$

$$\varphi_u = \varphi_i - \frac{\pi}{2}; \Rightarrow \Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}$$

Напряжение на емкостном элементе имеет форму гармонического колебания и отстает по фазе от колебания тока на угол $\pi/2$.



$$U_{mC} = \frac{I_m}{\omega C} = X_C(\omega) \cdot I_m$$

$$Y_C(\omega) = j\omega C$$

$$\operatorname{Re}[Z_C] = 0$$

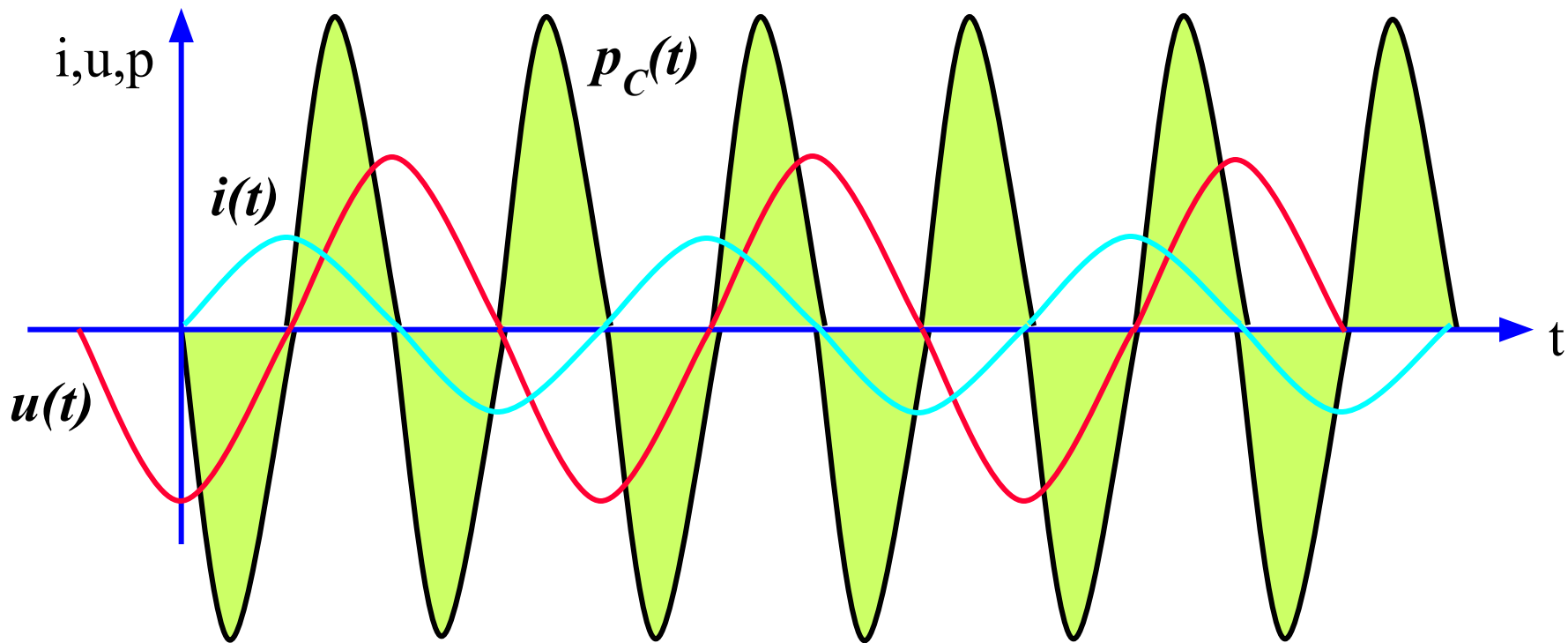
$$\operatorname{Im}[Z_C] = \frac{1}{\omega \cdot C} = X_C$$

$$Z_C(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = -jX_C$$

Мгновенная мощность изменяется во времени

$$\begin{aligned} p_C &= u_C \cdot i = U_m \sin(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}) I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = \\ &= \frac{1}{2} I_m U_m \left[\cos(2\omega t + 2\varphi_i - \frac{\pi}{2}) \right] = -\frac{1}{2} I_m U_m [\sin(2\omega t + 2\varphi_i)] = \underline{\underline{-IU \sin 2(\omega t + \varphi_i)}} \end{aligned}$$

по синусоидальному закону с частотой в два раза большей частоты тока.
Мгновенная мощность положительна при нарастании по абсолютному значению напряжения на емкостном элементе $\rightarrow T/4 < t < T/2$ (накопление энергии в электрическом поле конденсатора).



Энергия поступающая в емкостной элемент за четверть периода
($p_c > 0$)

$$W_C = \int_{T/4}^{T/2} p_L(t) dt = \int_{T/4}^{T/2} u_C \cdot i dt = \int_{T/4}^{T/2} C U_m \frac{du}{dt} dt = \int_0^{U_m} C \cdot U_m \cdot du = \frac{C U_m^2}{2}$$

**Средняя за период
мощность в
емкостном элементе**

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_C(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T -\frac{1}{2} [I_m U_m \sin(2\omega t + 2\varphi_i)] dt = 0$$

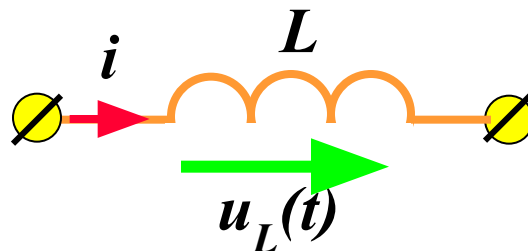
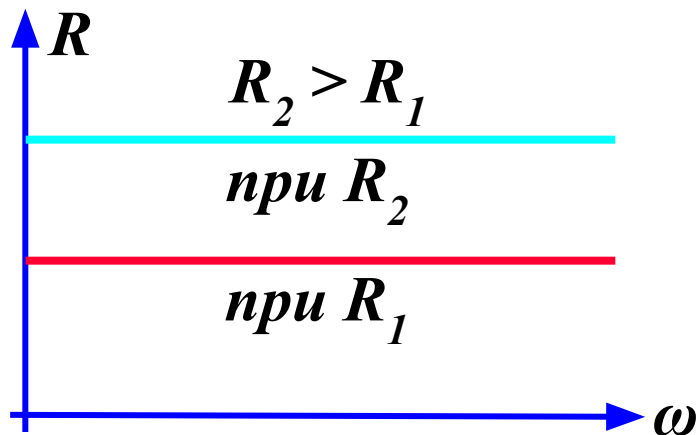
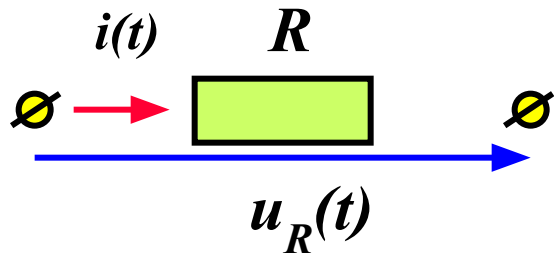
В чисто емкостной цепи, как и в чисто индуктивной цепи потери энергии отсутствуют. Вначале происходит заряд конденсатора, энергия при этом накапливается в электрическом поле конденсатора. Затем происходит разряд конденсатора, энергия, запасенная в электрическом поле, поступает к источнику.

$$P_C = 0$$

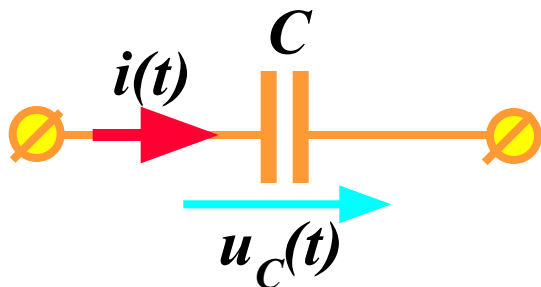
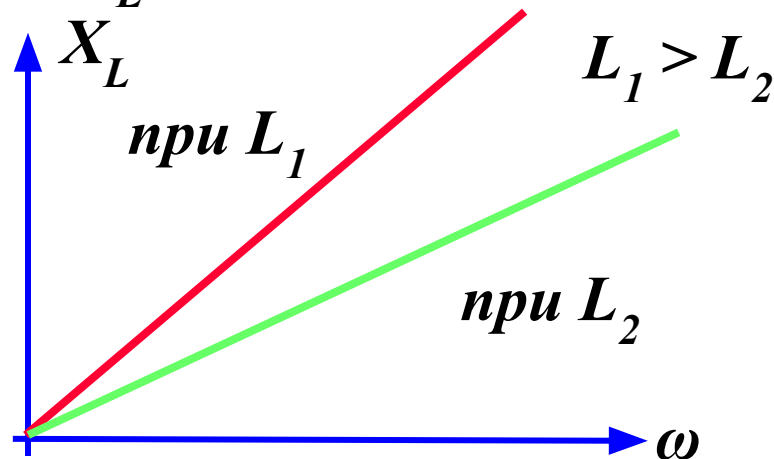
$$Q_C = -U \cdot I = -I^2 \cdot X_L$$

$$S_L = |Q_L|$$

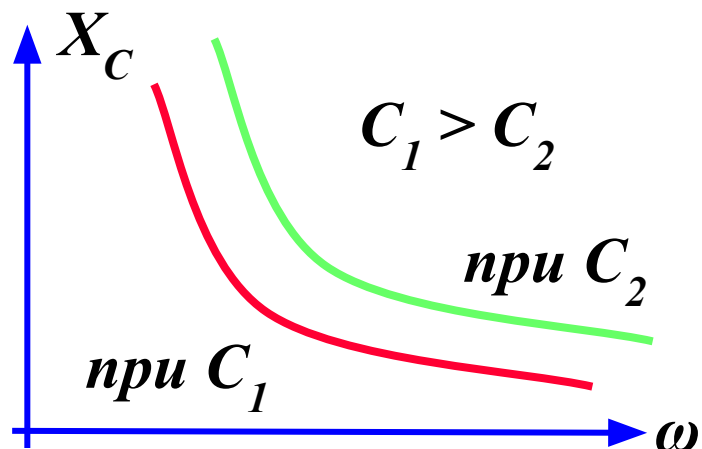
❖ Зависимость сопротивлений пассивных элементов электрической цепи от частоты переменного тока



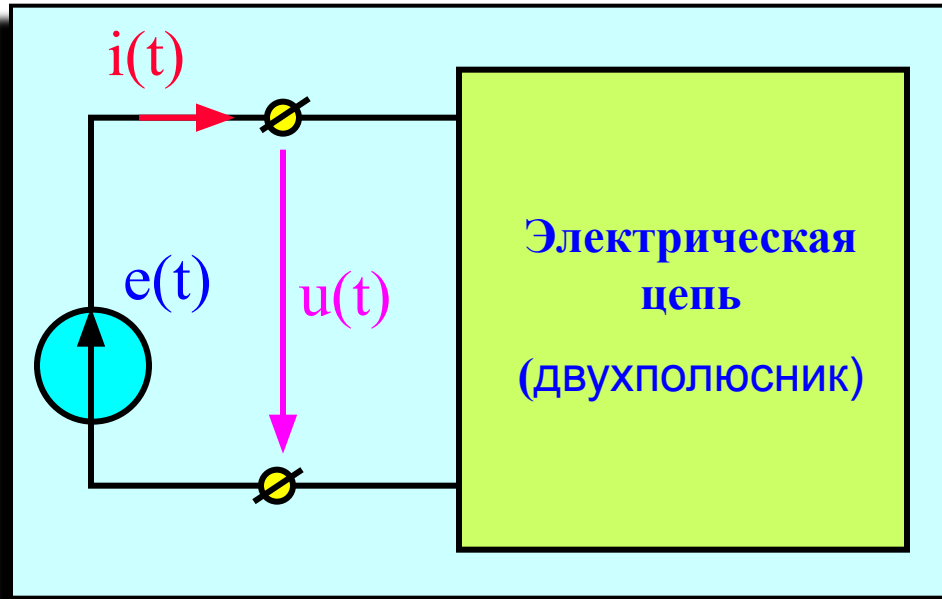
$$X_L = \omega \cdot L = X_L(\omega)$$



$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = X_C(\omega)$$



4. Мощность электрической цепи переменного тока



$$u(t) = U_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_u)$$

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i)$$

$$P = P_{CP} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = U \cdot I \cdot \cos \varphi = \\ = U^2 \cdot G = I^2 \cdot R \quad 0 \rightarrow [Bm]$$

Активная мощность

$$S = U \cdot I = E \cdot I = I^2 \cdot Z = U \cdot I^* \rightarrow$$

$$\dot{S} = S \cdot e^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ = \sqrt{P^2 + Q^2} \cdot e^{j\varphi} \rightarrow [B \cdot A]$$

[Полная мощность] = [Активная мощность] + [Реактивная мощность]

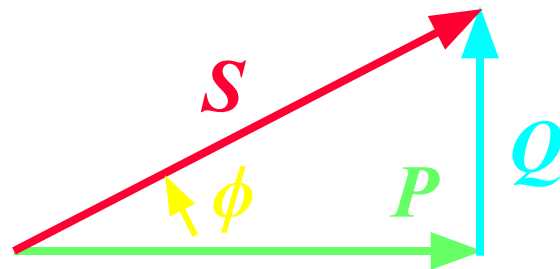
Полная мощность определяет эксплуатационные возможности многих электротехнических устройств (генераторов, трансформаторов, электрических машин) для которых она указывается в качестве номинальной: $S_{НОМ} = U_{НОМ} I_{НОМ}$

Реактивная мощность может быть как положительной, так и отрицательной

Если электрическая цепь имеет индуктивный характер, $\Delta\phi > 0$ и $P_Q > 0$, если – емкостной характер, то $\Delta\phi < 0$ и $P_Q < 0$.

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{P}{U \cdot I}$$

Коэффициент мощности



$$S = P + jQ$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi$$

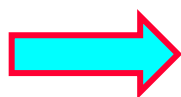
$$I = \frac{P}{U \cdot \cos \varphi}$$

Чем больше $\cos \varphi$, тем больше степень использования полной мощности, тем меньшим током при заданном напряжении можно доставить к потребителю активную

МОЩНОСТЬ

От значения $I \rightarrow$ сечения подводящих энергию проводов, кабелей, линий передач. Потери энергии в подводящих проводах пропорциональны I^2

$$P_{\text{ПОТ}} = I^2 \cdot R_{\text{ПОТ}}$$



$$\Downarrow (\text{ток}) \rightarrow (\Uparrow \Uparrow \cos \varphi)$$

Для увеличения $\cos \varphi$ необходимо уменьшать реактивную мощность. При $Q = 0$ имеем $\cos \varphi = 1$. Так как $Q_L > 0$, а $Q_C < 0$, то для компенсации реактивной мощности параллельно нагрузке, имеющей как правило, индуктивный характер, подключают компенсирующую емкость, значение которой выбирают из условия: $Q = Q_L + Q_C = 0$, т.е. $Q_L = -Q_C$

Общие выводы

1. В режиме холостого хода, т.е. при $R_H = \infty$ (разомкнутая электрическая цепь)

$$\eta_{XX} = \frac{R_H}{R_I + R_H} = 1$$

2. В режиме короткого замыкания, т.е. при $R_H = 0$ (короткозамкнутая электрическая цепь)

$$\eta_{KЗ} = \frac{R_H}{R_I + R_H} = 0$$

3. В согласованном режиме работы
 $R_I = R_H$

$$\eta_{CP} = 0,5$$

◆ В случае, когда необходимо обеспечить

максимальную мощность независимо от экономических затрат (значения КПД) источники работают в согласованном режиме (устройства автоматики – *мощности управляющих сигналов малы*)

◆ Для силовых установок ($R_H \gg R_I$) → режим близкий к режиму холостого хода важен КПД