

Системы счисления

1. Введение
2. Двоичная система
3. Восьмеричная система
4. Шестнадцатеричная система
5. Другие системы счисления

Системы счисления

Тема 1. Введение

Определения

Система счисления – это способ записи **чисел** с помощью специальных знаков – **цифр**.

Числа:

123, 45678, 1010011, CXL

Цифры:

0, 1, 2, ... I, V, X, L, ...

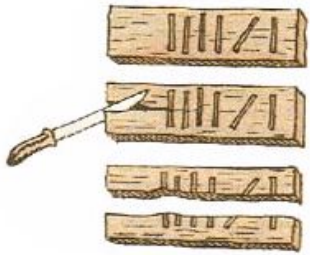
Алфавит – это набор **цифр**. {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Типы систем счисления:

- **непозиционные** – значение цифры не зависит от ее места (*позиции*) в записи числа;
- **позиционные** – зависит...

Непозиционные системы

Унарная – одна цифра обозначает единицу (1 день, 1 камень, 1 баран, ...)



Десятичная египетская система счисления:

чёрта	— 1	лотос	 — 1000	 — 1000000
хомут	∩ — 10	палец	 — 10000	человек
верёвка	☉ — 100	лягушка	 — 100000	



Непозиционные системы

Римская система счисления:

I – 1 (палец),

V – 5 (раскрытая ладонь, 5 пальцев),

X – 10 (две ладони),

L – 50,

C – 100 (*Centum*),

D – 500 (*Demimille*),

M – 1000 (*Mille*)



Римская система счисления

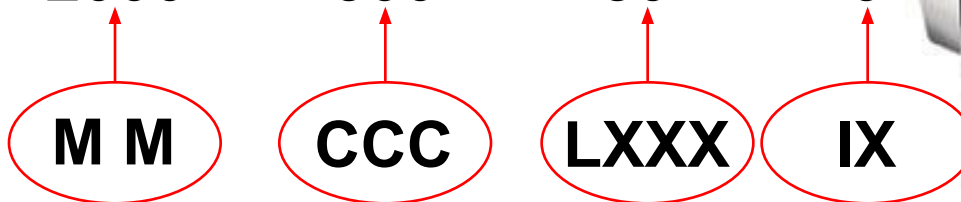
Правила:

- (обычно) не ставят больше **трех** одинаковых цифр подряд
- если **младшая** цифра (только **одна!**) стоит **слева** от старшей, она вычитается из суммы (*частично непозиционная!*)

Примеры:

$$\text{MDCXLIV} = 1000 + 500 + 100 - 10 + 50 - 1 + 5 = 1644$$

$$2389 = 2000 + 300 + 80 + 9$$



$$2389 = \text{M M C C C L X X X I X}$$



Примеры:

3768 =

2983 =

1452 =

1999 =

Римская система счисления

Недостатки:

- для записи **больших чисел** (>3999) надо вводить новые знаки-цифры (V, X, L, C, D, M)
- как записать дробные числа?
- как выполнять арифметические действия:
СССLIX + CLXXIV = ?

Где используется:

- номера глав в книгах:
- обозначение веков: «**Пираты XX века**»
- циферблат часов
- номера месяцев



Минута / Д. Е 1644 /
10 / X - 885.



Славянская система счисления

алфавитная система счисления (непозиционная)



Часы
Суздальского
Кремля

Позиционные системы

Позиционная система: значение цифры определяется ее позицией в записи числа.

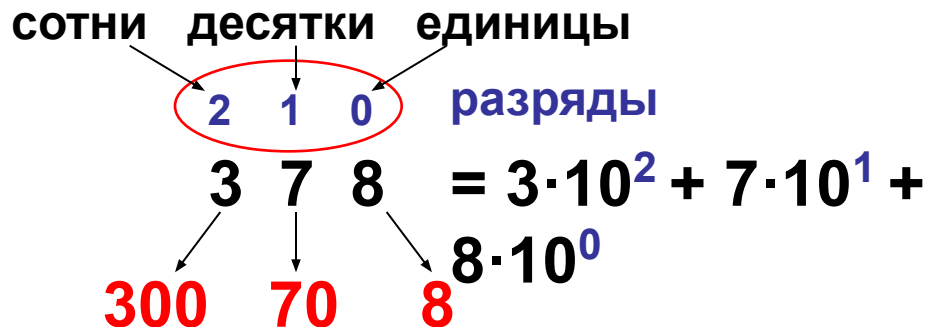
Десятичная система:

первоначально – счет на пальцах

изобретена в Индии, заимствована арабами, завезена в Европу

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Основание (количество цифр): 10



Другие позиционные системы:

- **двоичная**, восьмеричная, **шестнадцатеричная** (информатика)
- двенадцатеричная (1 фут = 12 дюймов, 1 шиллинг = 12 пенсов)
- двадцатеричная (1 франк = 20 су)
- шестидесятеричная (1 минута = 60 секунд, 1 час = 60 минут)

Позиционные системы

Задача: в какой системе счисления число 58 записывается как « 46_x »? Определите основание системы счисления X.

$$58 = 46_x$$

- в записи есть цифра 6, поэтому $x > 6$
- переводим правую часть в десятичную систему

$$58 = 4 \cdot x^1 + 6 \cdot x^0 = 4 \cdot x + 6$$

- решаем уравнение

$$58 = 4 \cdot x + 6$$

$$x = 13$$

Позиционные системы

Задача: найдите основание системы счисления, в которой выполняется равенство

$$16_x + 33_x = 52_x$$

- в записи есть цифра 6, поэтому $x > 6$
- переводим в десятичную систему

$$\overset{1}{1}\overset{0}{6}_x = x + 6$$

$$\overset{1}{5}\overset{0}{2}_x = 5 \cdot x + 2$$

$$33_x = 3 \cdot x + 3$$

- решаем уравнение

$$4 \cdot x + 9 = 5 \cdot x + 2$$

$$x = 7$$

Позиционные системы

Задача: перечислите через запятую все системы счисления, в которых выполняется неравенство

$$21_x + 32_x > 102_x$$

- в записи есть цифра 3, поэтому $x > 3$
- переводим в десятичную систему

$$\overset{1}{2}\overset{0}{1}_x = 2 \cdot x + 1 \quad \overset{2}{1}\overset{1}{0}\overset{0}{2}_x = x^2 + 2$$

$$32_x = 3 \cdot x + 2$$

- решаем неравенство (перебор $x = 4, 5, 6, \dots$)

$$5 \cdot x + 3 > x^2 + 2$$

$$x = 4, 5$$

Позиционные системы

Задача: найдите наименьшее основание системы счисления, в которой запись числа 30 имеет 3 значащих разряда.

- минимальное 3-разрядное число 100_x
- максимальное 3-х разрядное число?

$$1000_x - 1$$

- решаем неравенство

$$100_x \leq 30 \leq 1000_x - 1$$
$$x^2 \leq 30 \leq x^3 - 1$$

$$x = 4$$

(перебор $x = 2, 3, 4, \dots$)

Системы счисления

Тема 2. Двоичная система счисления

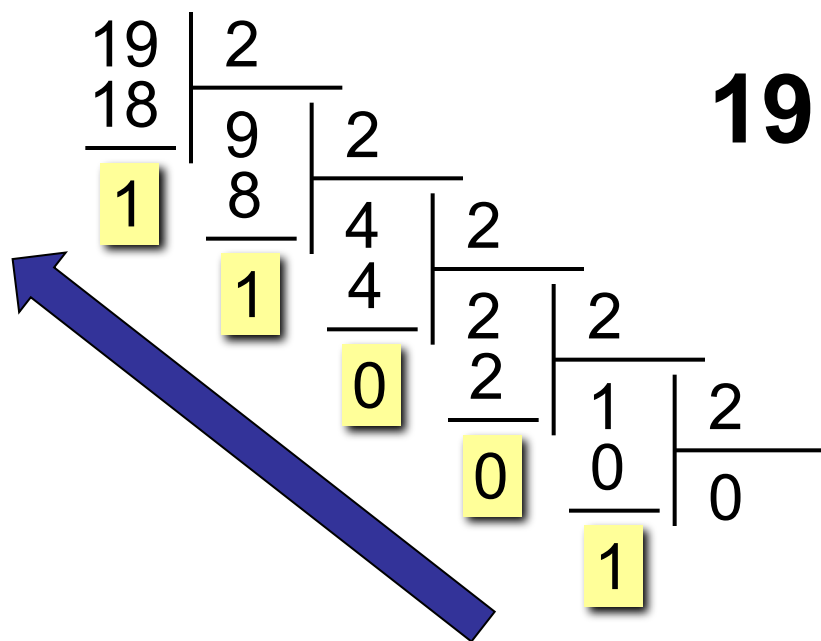
Перевод целых чисел

Двоичная система:

Алфавит: 0, 1

Основание (количество цифр): 2

10 → 2



$$19 = 10011_2$$

система
счисления

2 → 10

4 3 2 1 0 разряды

$$\begin{aligned} 10011_2 &= 1 \cdot 2^4 + \cancel{0 \cdot 2^3} + \cancel{0 \cdot 2^2} + 1 \cdot 2^1 + \\ &\quad 1 \cdot 2^0 \\ &= 16 + 2 + 1 = 19 \end{aligned}$$

Примеры:

131 =

79 =

Примеры:

$$101011_2 =$$

$$110110_2 =$$



Когда двоичное число четное? делится на 8?

Метод подбора

77 10 → 2

77

наибольшая степень двойки, которая
меньше или равна данному

13

5

1

1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

$$77 = 64 + 13 + 5 + 1$$

Разложение по степеням двойки:

$$77 = 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^0$$

$$77 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

6 5 4 3 2 1 0 разряды

$$77 = 1001101_2$$

Перевод дробных чисел

10 → 2

$$0,375 = 0,011_2$$

$$\begin{array}{r} \times \quad 2 \\ \hline \end{array}$$

$$0,750$$

$$0,75$$

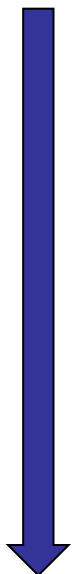
$$\begin{array}{r} \times \quad 2 \\ \hline \end{array}$$

$$1,50$$

$$0,5$$

$$\begin{array}{r} \times \quad 2 \\ \hline \end{array}$$

$$1,0$$



$$0,7 = ?$$

$$0,7 = 0,101100110...$$

$$= 0,1(0110)_2$$

Многие дробные числа нельзя представить в виде **конечных** двоичных дробей.

Для их точного хранения требуется **бесконечное** число разрядов.

Большинство дробных чисел хранится в памяти с ошибкой.

2 → 10

2 1 0 -1 -2 -3 разряды

$$101,011_2$$

$$= 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3}$$

$$= 4 + 1 + 0,25 + 0,125 = 5,375$$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = 0,25$$

Примеры:

0,625 =

3,875 =

Арифметические операции

сложение

$$0+0=0 \quad 0+1=1$$

$$1+0=1 \quad 1+1=\textcolor{red}{1}0_2$$

$$1 + 1 + 1 = \textcolor{red}{1}1_2$$

перенос

$\textcolor{red}{1} \textcolor{red}{1} \textcolor{red}{1} \textcolor{red}{1} \textcolor{red}{1}$

$1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0_2$

$+ \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1_2$

$1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1$

$\textcolor{red}{2}$

вычитание

$$0-0=0 \quad 1-1=0$$

$$1-0=1 \quad \textcolor{red}{1}0_2-1=1$$

заем

$\textcolor{blue}{0} \ \textcolor{blue}{1} \ \textcolor{blue}{1} \ \textcolor{red}{10_2} \ \textcolor{blue}{0} \ \textcolor{red}{10_2}$

$\textcolor{red}{\cancel{1}} \ \textcolor{red}{\cancel{0}} \ \textcolor{red}{\cancel{0}} \ \textcolor{red}{\cancel{0}} \ \textcolor{red}{\cancel{1}} \ 0 \ 1_2$

$- \quad \quad \quad 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1_2$

$\textcolor{red}{0} \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0$

$\textcolor{red}{2}$

Примеры:

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ + 11111_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10111_2 \\ + 101110_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ + 11011_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ + 10011_2 \\ \hline \end{array}$$

Примеры:

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ - 11111_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 110011_2 \\ - 10101_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11011_2 \\ - 110101_2 \\ \hline \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 110101_2 \\ - 11011_2 \\ \hline \end{array}$$

Арифметические операции

умножение

$$\begin{array}{r} 10101_2 \\ \times 10 \\ \hline 1_210101_2 \\ + 10101_2 \\ \hline 1101001_2 \end{array}$$

деление

$$\begin{array}{r} 10101_2 \big| 111_2 \\ - 111_2 \\ \hline 111_2 \\ - 111_2 \\ \hline 0 \end{array}$$

Плюсы и минусы двоичной системы

-  нужны устройства только с **двумя устойчивыми состояниями** (есть ток — нет тока, намагничен — не намагничен и т.п.);
 - **надежность** и помехоустойчивость двоичных кодов
 - выполнение операций с двоичными числами для компьютера намного проще, чем с десятичными
-
-  двоичные числа имеют **много разрядов**;
 - запись числа в двоичной системе **однородна**, то есть содержит только нули и единицы; поэтому человеку сложно ее воспринимать.

Двоично-десятичная система

BCD = *binary coded decimals* (десятичные цифры в двоичном коде)

10 → BCD

$$9024,19 = 1001 \text{ } 0000 \text{ } 0010 \text{ } 0100, 0001 \text{ } 1001_{\text{BCD}}$$

9 0 2 4 , 1 9

BCD → 10

$$1 \text{ } 0101 \text{ } 0011, 0111 \text{ } 1_{\text{BCD}} =$$
$$0001 \text{ } 0101 \text{ } 0011, 0111 \text{ } 1000_{\text{BCD}} = 153,78$$



Запись числа в BCD не совпадает с двоичной!

$$10101,1_{\text{BCD}} = 15,8$$
$$10101,1_2 = 16 + 4 + 1 + 0,5 = 21,5$$

Системы счисления

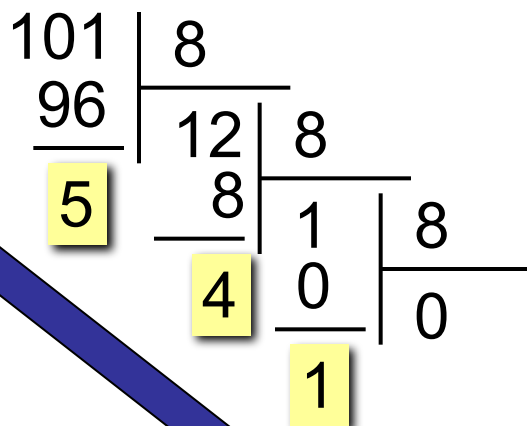
Тема 3. Восьмеричная система счисления

Восьмеричная система

Основание (количество цифр): 8

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

10 → 8



$$101 = 145_8$$

система
счисления

8 → 10

2 1 0 разряды

$$\begin{aligned} 145_8 &= 1 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 \\ &= 64 + 32 + 5 = 101 \end{aligned}$$

Примеры:

$$134 =$$

$$75 =$$

$$134_8 =$$

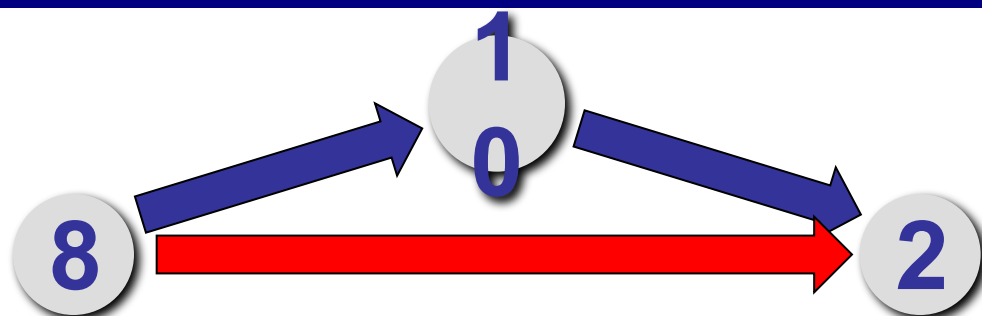
$$75_8 =$$

Таблица восьмеричных чисел

X_{10}	X_8	X_2
0	0	000
1	1	001
2	2	010
3	3	011

X_{10}	X_8	X_2
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111

Перевод в двоичную и обратно



- трудоемко
- 2 действия

$$8 = 2^3$$



Каждая восьмеричная цифра может быть записана как три двоичных (*триада*)!

$$1725_8 = \underbrace{001}_1 \underbrace{111}_7 \underbrace{010}_2 \underbrace{101}_5_2$$

Примеры:

$$3467_8 =$$

$$21\cancel{4}8_8 =$$

$$7352_8 =$$

$$1231_8 =$$

Перевод из двоичной системы

1001011101111_2

Шаг 1. Разбить на триады, начиная справа:

$001\ 001\ 011\ 101\ 111_2$

Шаг 2. Каждую триаду записать одной восьмеричной цифрой:

$001\ 001\ 011\ 101\ 111_2$
 $\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{5}\ \boxed{7}$

Ответ: $1001011101111_2 = 11357_8$

Примеры:

$$101101010010_2 =$$

$$11111101011_2 =$$

$$1101011010_2 =$$

Арифметические операции

сложение

1 1 1

$$\begin{array}{r} 156_8 \\ + 662_8 \\ \hline 1040_8 \end{array}$$

1 в перенос

$$6 + 2 = 8 = 8 + 0 \quad \text{1 в перенос}$$

$$5 + 6 + 1 = 12 = 8 + 4$$

$$1 + 6 + 1 = 8 = 8 + 0$$

1 в перенос

Пример

$$\begin{array}{r} 353_8 \\ + 736_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1353_8 \\ + 777_8 \\ \hline \end{array}$$

Арифметические операции

ВЫЧИТАНИЕ

■ ■

$$\begin{array}{r} 456_8 \\ - 277_8 \\ \hline 157_8 \end{array}$$

заем

$$(6 + 8) - 7 = 7$$

заем

$$(5 - 1 + 8) - 7 = 5$$

$$(4 - 1) - 2 = 1$$

Примеры

$$\begin{array}{r} 156_8 \\ - 662_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1156_8 \\ - 662_8 \\ \hline \end{array}$$

Системы счисления

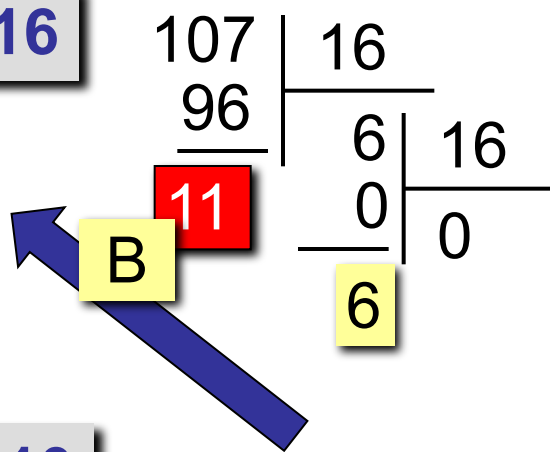
Тема 4. Шестнадцатеричная система счисления

Шестнадцатеричная система

Основание (количество цифр): 16

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**
10 11 12 13 14 15

10 → 16



$$107 = 6B_{16}$$

система
счисления

16 → 10

2 1 0 разряды

$$1C5_{16} = 1 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0$$

$$= 256 + 192 + 5 = 453$$

Примеры:

$$171 =$$

$$1BC_{16} =$$

$$206 =$$

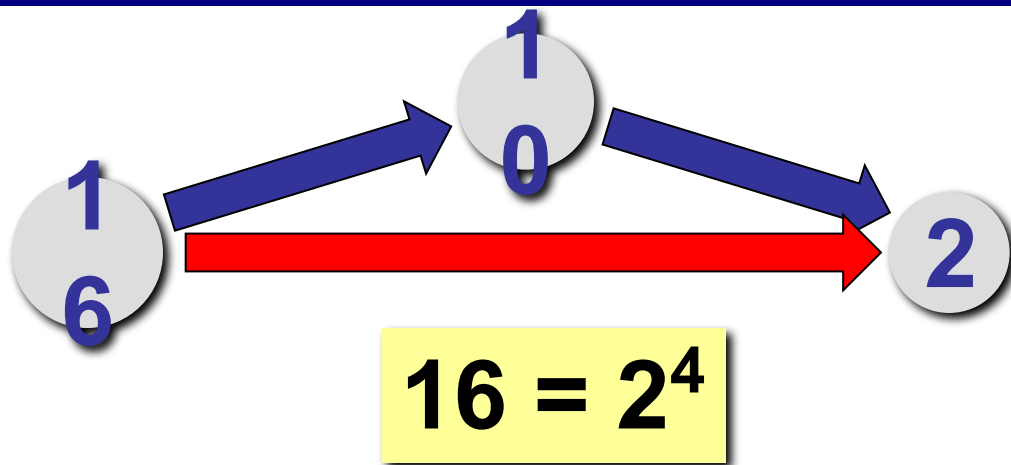
$$22B_{16} =$$

Таблица шестнадцатеричных чисел

X_{10}	X_{16}	X_2
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111

X_{10}	X_{16}	X_2
8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

Перевод в двоичную систему



- трудоемко
- 2 действия

! Каждая шестнадцатеричная цифра может быть записана как четыре двоичных (*тетрада*)!

$$7F1A_{16} = \underbrace{0111}_7 \underbrace{1111}_F \underbrace{0001}_1 \underbrace{1010}_A_2$$

Примеры:

$$\text{C73B}_{16} =$$

$$\text{2FE1}_{16} =$$

Перевод из двоичной системы

1001011101111_2

Шаг 1. Разбить на тетрады, начиная справа:

$0001\ 0010\ 1110\ 1111_2$

Шаг 2. Каждую тетраду записать одной шестнадцатеричной цифрой:

$0001\ 0010\ 1110\ 1111_2$
 $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{E}\ \boxed{F}$

Ответ: $1001011101111_2 = 12EF_{16}$

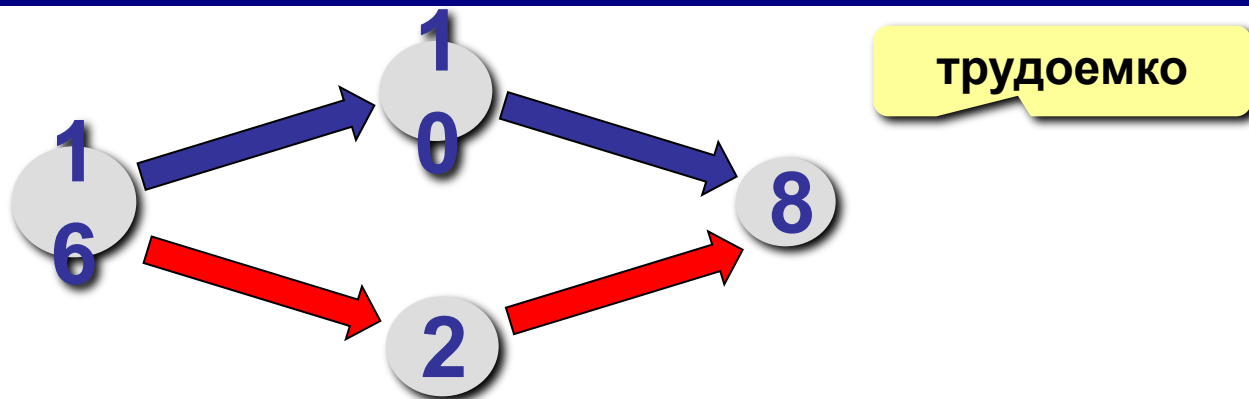
Примеры:

$$1010101101010110_2 =$$

$$111100110111110101_2 =$$

$$110110110101111110_2 =$$

Перевод в восьмеричную и обратно



Шаг 1. Перевести в двоичную систему:

$$3DEA_{16} = 11\ 1101\ 1110\ 1010_2$$

Шаг 2. Разбить на триады:

$$011\ 110\ 111\ 101\ 010_2$$

Шаг 3. Триада – одна восьмеричная цифра:

$$3DEA_{16} = 36752_8$$

Примеры:

$$A35_{16} =$$

$$765_8 =$$

Арифметические операции

сложение

$$\begin{array}{r} \text{A } 5 \text{ B}_{16} \\ + \text{C } 7 \text{ E}_{16} \\ \hline 1 \text{ 6 D } 9_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{10 } 5 \text{ 11} \\ + \text{12 } 7 \text{ 14} \\ \hline 1 \text{ 6 } \text{13} \text{ 9} \end{array}$$

1 в перенос

$$11 + 14 = 25 = \text{16} + 9$$

$$5 + 7 + \text{1} = \text{13} = \text{D}_{16}$$

1 в перенос

$$10 + 12 = 22 = \text{16} + 6$$

Пример:

$$\begin{array}{r} \text{C B A}_{16} \\ + \text{A 5 9}_{16} \\ \hline \end{array}$$

Арифметические операции

ВЫЧИТАНИЕ

заем

$$\begin{array}{r} \text{C } 5 \text{ B}_{16} \\ - \text{A } 7 \text{ E}_{16} \\ \hline 1 \text{ D } \text{D}_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{12 } 5 \text{ 11} \\ - \text{10 } 7 \text{ 14} \\ \hline 1 \text{ 13 } 13 \end{array}$$

заем

$$(11 + \textcolor{blue}{16}) - 14 = \textcolor{red}{13} = \text{D}_{16}$$

$$(5 - \textcolor{red}{1}) + \textcolor{blue}{16} - 7 = \textcolor{red}{13} = \text{D}_{16}$$

$$(12 - \textcolor{red}{1}) - 10 = 1$$

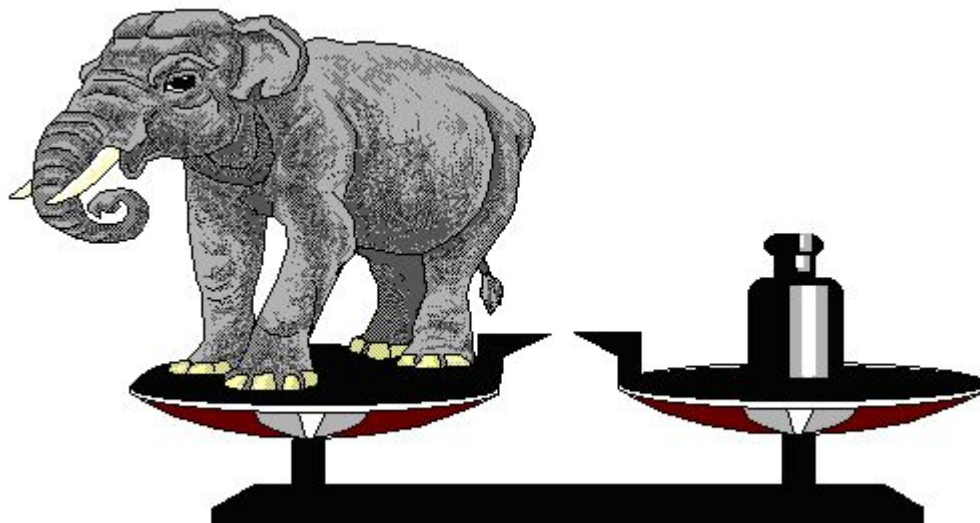
Пример:

$$\begin{array}{r} 1 \text{ B A}_{16} \\ - \text{ A 5 9}_{16} \\ \hline \end{array}$$

Системы счисления

Тема 5. Другие системы счисления

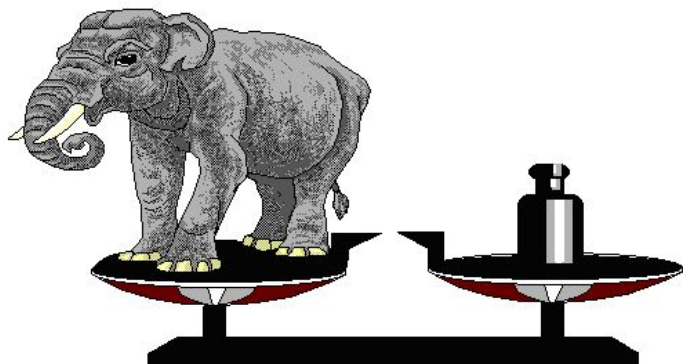
Троичная уравновешенная система



Задача Баше:

Найти такой набор из **4 гирь**, чтобы с их помощью на чашечках равноплечных весов можно было взвесить груз массой **от 1 до 40 кг** включительно. Гирь можно располагать на любой чашке весов.

Троичная уравновешенная система



+ 1 гиря справа
0 гиря снята
– 1 гиря слева

Веса гирь:

1 кг, 3 кг, 9 кг, 27 кг

Пример:

$27 \text{ кг} + 9 \text{ кг} + 3 \text{ кг} + 1 \text{ кг} = 40 \text{ кг}$

1 1 1 1_{зур} = 40

Реализация:

ЭВМ «Сетунь», Н.П. Брусенцов (1958)

50 промышленных образцов

! Троичная система!

Конец фильма
