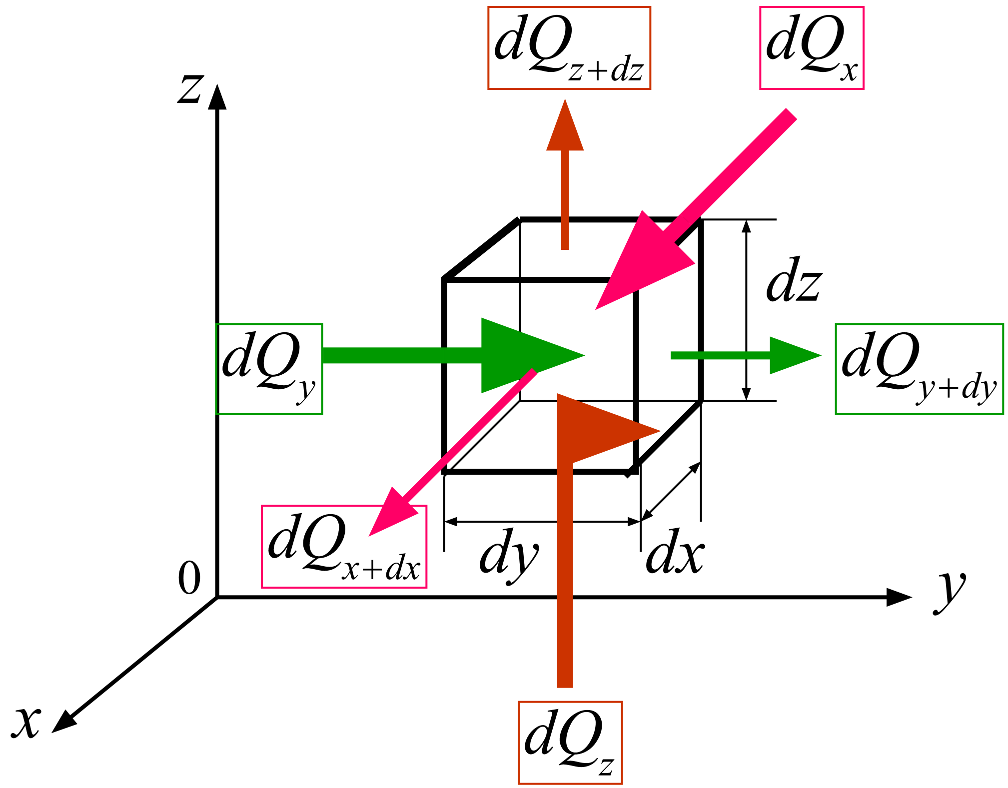
Математические модели процессов тепломассообмена

Теплопроводность:

- Дифференциальное уравнение теплопроводности
- Условия однозначности

Дифференциальное уравнение теплопроводности



Метод математической физики

Для вывода дифференциального уравнения теплопроводности используется
метод математической физики,
когда процесс изучается в элементарном объеме
dv за бесконечно малый промежуток времени $d\tau$,
что позволяет упростить вывод.

Принимаются допущения:

- тело – однородно и изотропно, то есть его физические свойства изменяются одинаково во всех направлениях;
- физические свойства тела постоянны;

Допущения

● изменение объема тела от температуры пренебрежимо мало, по сравнению с его объемом, как величина 2 порядка малости;

● распределение внутренних источников теплоты равномерно и может быть задано как $q_v = f(x, y, z, \tau)$

Тогда по закону сохранения энергии уравнение теплового баланса запишется в виде:

$$dQ = dQ_1 + dQ_2 \qquad (1)$$

где изменение внутренней энергии элементарного объема *dv* за бесконечно малый промежуток времени $d\tau$

$$dQ = c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} dv\, d\tau \qquad (2)$$

Уравнения (3 – 7)

тепловыделения внутренних источников:

$$dQ_2 = q_v dv d\tau \quad (3)$$

теплота, вошедшая теплопроводностью в элементарный объем *dv* за бесконечно малый промежуток времени $d\tau$ вдоль осей координат x, y, z:

$$dQ_1 = dQ_{x1} + dQ_{y1} + dQ_{z1} \quad (4)$$

Разность подведенной и отведенной теплоты вдоль оси *x*:

$$dQ_{x1} = dQ_x - dQ_{x+dx} \quad (5)$$

где:

$$dQ_x = q_x dydzd\tau \quad (6)$$

$$dQ_{x+dx} = q_{x+dx} dydzd\tau \quad (7)$$

Уравнения (8 - 11)

Функцию q_{x+dx} можно разложить в ряд Тейлора:

$$\boxed{q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}\frac{dx}{1!}} \boxed{+\frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2}\frac{dx^2}{2!} + \dots} \tag{8}$$

Пренебрегаем величиной 2 порядка малости в (8).

После подстановки (8) в (7), а (6) и (7) – в (5) имеем:

$$dQ_{x1} = \left(q_x - q_x - \frac{\partial q_x}{\partial x}dx\right)dydzd\tau = -\frac{\partial q_x}{\partial x}dxdydzd\tau = -\frac{\partial q_x}{\partial x}dvd\tau \tag{9}$$

Аналогично

по осям *y* и *z*:

$$dQ_{y1} = dQ_y - dQ_{y+dy} = -\frac{\partial q_y}{\partial y}dvd\tau \tag{10}$$

$$dQ_{z1} = dQ_z - dQ_{z+dz} = -\frac{\partial q_z}{\partial z}dvd\tau \tag{11}$$

Уравнения (12 – 13)

Уравнения (9), (10), (11) подставляем в (4):

$$dQ_1 = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dv d\tau \quad (12)$$

а уравнения (2), (3), (12) – в (1):

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} dv d\tau = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dv d\tau + q_v dv d\tau$$

После сокращения на $dvd\tau$ и деления на $c\rho$ получим:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = -\frac{1}{c\rho}\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + \frac{q_v}{c\rho} \quad (13)$$

По закону Фурье: $q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}; q_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y}; q_z = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z}$

Уравнения (14 – 17)

Производные от тепловых потоков по координатам:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = -\lambda\frac{\partial^2 t}{\partial x^2};\ \frac{\partial q_y}{\partial y} = -\lambda\frac{\partial^2 t}{\partial y^2};\ \frac{\partial q_z}{\partial z} = -\lambda\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \qquad (14)$$

После подстановки (14) в (13) дифференциальное уравнение теплопроводности будет иметь вид (15):

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c\rho}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) + \frac{q_v}{c\rho} \qquad (15)$$

Введя обозначения коэффициента температуропроводности $a = \lambda/(c\rho)$ и оператора Лапласа

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \qquad (16)$$

Получим окончательное выражение дифференциального уравнения теплопроводности:

$$\boxed{\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho}} \qquad (17)$$

Полярная (цилиндрическая) система координат

Оператор Лапласа в полярных координатах:

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

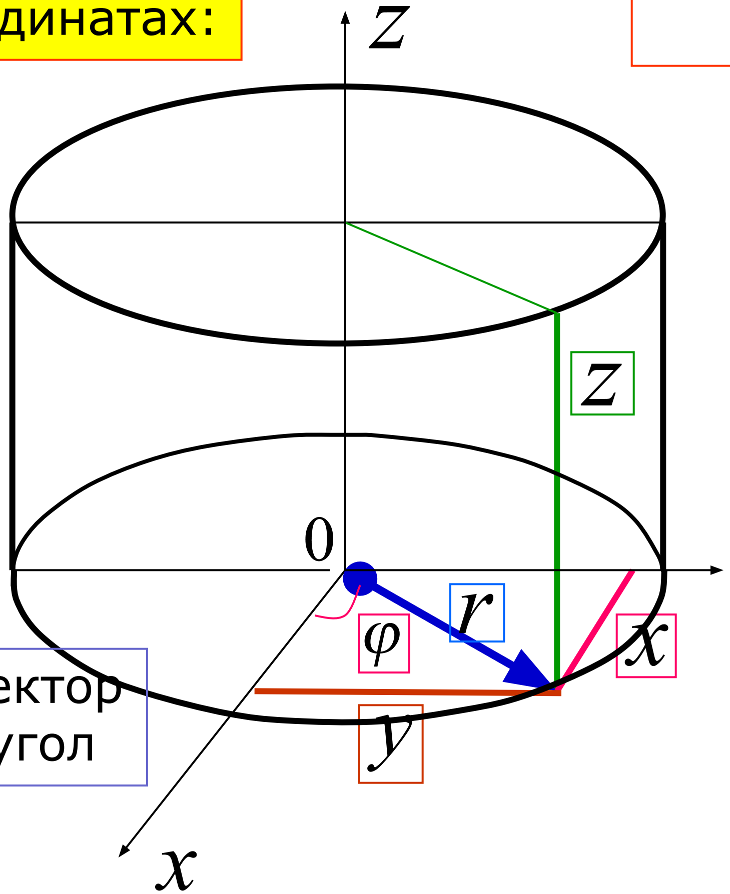
$$x = r Cos\varphi$$

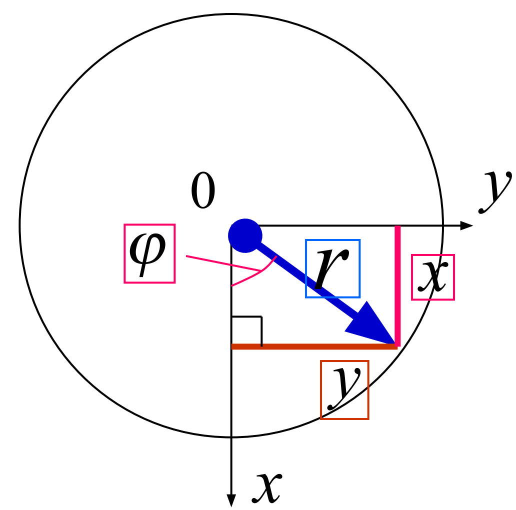
$$y = r Sin\varphi$$

$$z = z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = arctg(y/x)$$





r – радиус – вектор

φ - полярный угол

Условия однозначности

Дифференциальное уравнение теплопроводности (17) справедливо для ортогональных и полярных координат, с учетом выражений операторов Лапласа соответственно (16) и приведенного на предыдущем слайде.

Дифференциальное уравнение теплопроводности (17) описывает множество процессов теплопроводности.

Чтобы выделить конкретный процесс, надо задать условия однозначности. Их бывает 4 вида: геометрические (геометрия тела, его размеры, положение в пространстве); физические (физические свойства тела); начальные [при $\tau = 0$ $t = f(x, y, z)$] и граничные условия, которые бывают 4 родов.

Граничные условия

I рода: $t = f(x, y, z, \tau)$

для стационарных процессов они принимают вид: $t_c = Const$

II рода: $q = f(x, y, z, \tau)$

или для стационарных процессов: $q_c = Const$

III рода (для теплопроводности внутри ламинарного пограничного слоя и конвекции вне его):

$$q = \boxed{-\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_{ж} = \alpha(t_c - t\ )}$$

откуда:

$$\boxed{\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_{ж} = -\frac{\alpha}{\lambda}(t_c - t\ )}$$

IV рода (для теплопроводности при контакте двух твердых тел):

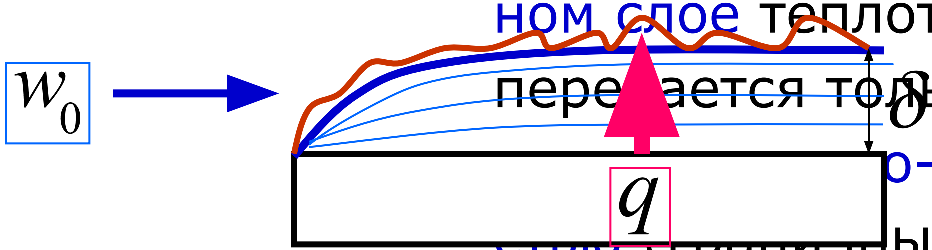
$$q = \boxed{-\lambda_1\left(\frac{\partial t_1}{\partial n}\right)_c = -\lambda_2\left(\frac{\partial t_2}{\partial n}\right)_c}$$

откуда:

$$\boxed{\lambda_1\left(\frac{\partial t_1}{\partial n}\right)_c = \lambda_2\left(\frac{\partial t_2}{\partial n}\right)_c}$$

К граничным условиям III и IV родов

Вне пограничного слоя движение жидкости турбулентное. Теплота передается конвекцией. В ламинарном погранич-ном слое теплота



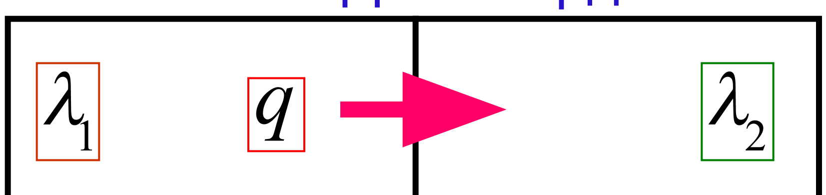
пере ается только

о-

стью (граничные

условия III рода).

Два твердых тела



IV рода).