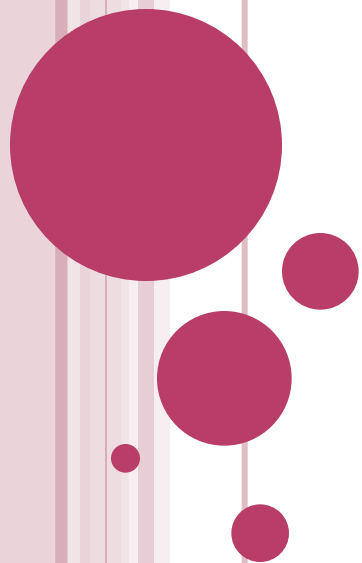


ПРИБЛИЖЕННОЕ
РЕШЕНИЕ
НЕЛИНЕЙНЫХ
УРАВНЕНИЙ

Метод хорд



ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дано $F(x)=0$, где $F(x)$ определена на $[a;b]$ и удовлетворяет следующим условиям:

Необходимое условие существования корня на отрезке $[a,b]$

$F(x)$ непрерывна и $F(a)F(b)<0$

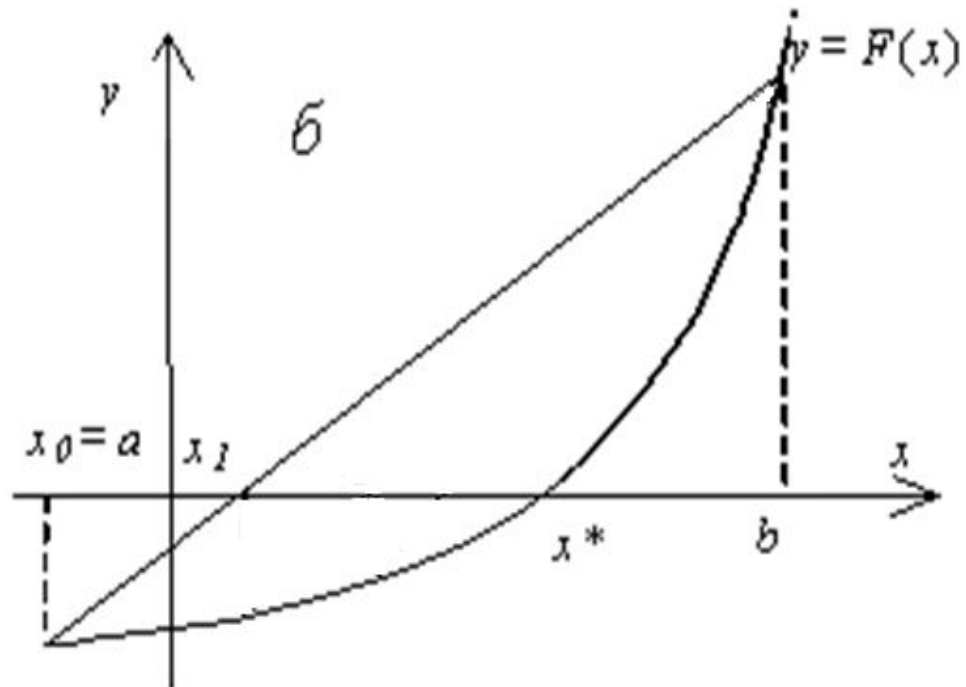
Достаточное условие единственности корня

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке $[a, b]$, т.е. $F(x)$ — монотонная функция

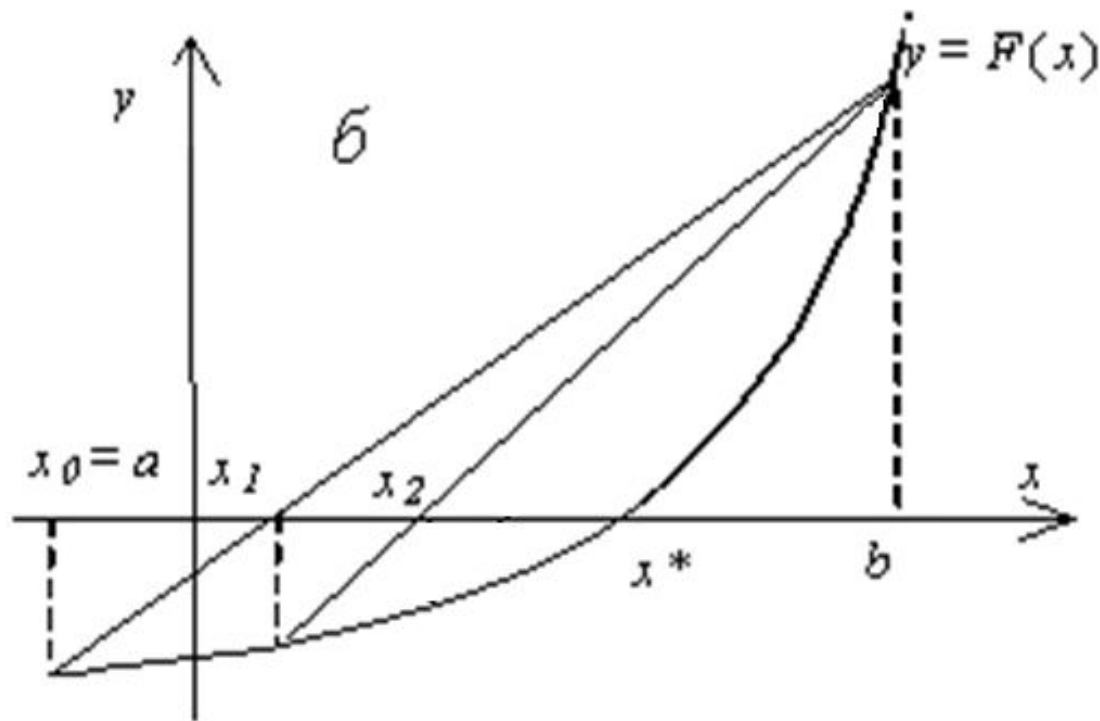


СУТЬ МЕТОДА ХОРД

1. Нелинейная функция $f(x)$ на отделенном отрезке заменяется прямой линией — хордой, стягивающей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

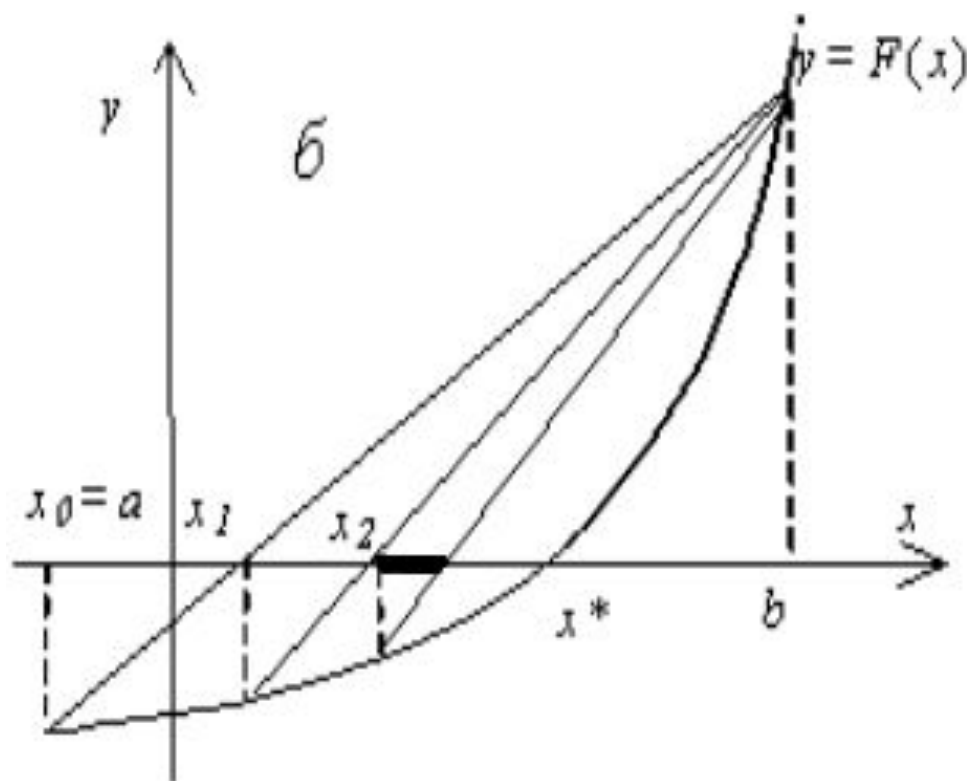


2. Находится точка пересечения хорды с осью ОХ. Эту точку принимают за новую границу отрезка приближение



$F'(x)$ не меняет знак на отрезке $[a, b]$, т.е. $F(x)$ – монотонная функция

верно,
итерации
повторяются



y

ГРАФИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МЕТОДА ХОРД

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке
[a, b], т.е. $F(x)$ – монотонная
функция

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке
[a, b], т.е. $F(x)$ – монотонная
функция

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке
[a, b], т.е. $F(x)$ – монотонная
функция

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке
[a, b], т.е. $F(x)$ – монотонная
функция

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке
[a, b], т.е. $F(x)$ – монотонная
функция

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке
[a, b], т.е. $F(x)$ – монотонная
функция

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке
[a, b], т.е. $F(x)$ – монотонная
функция

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке
[a, b], т.е. $F(x)$ – монотонная
функция

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке
[a, b], т.е. $F(x)$ – монотонная
функция

x

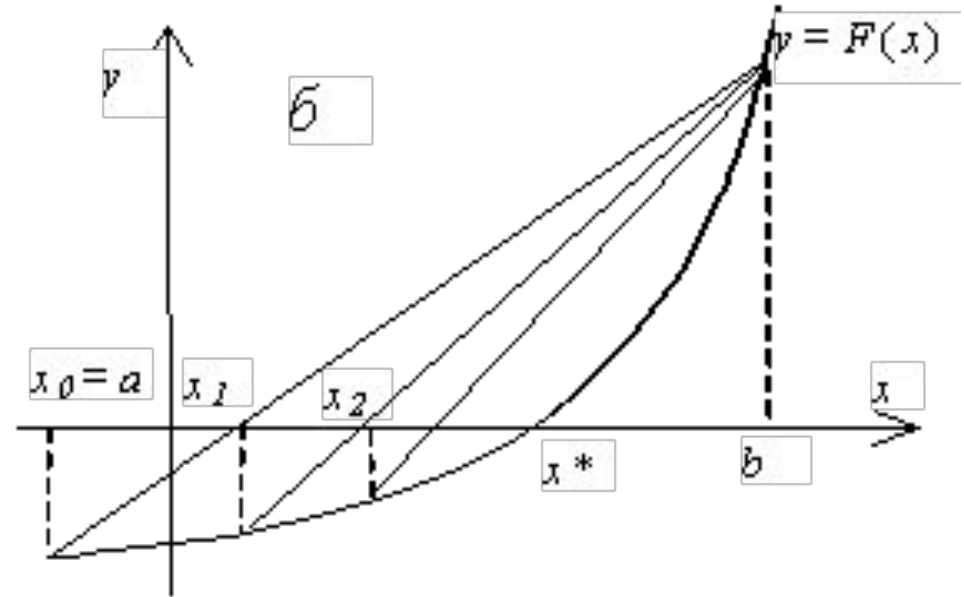
b



ВАРИАНТЫ АЛГОРИТМА МЕТОДА

$$f(b) f''(b) > 0$$

$F(x)$ не меняет знак на отрезке
[a, b], т.е. $F(x)$ – монотонная
функция

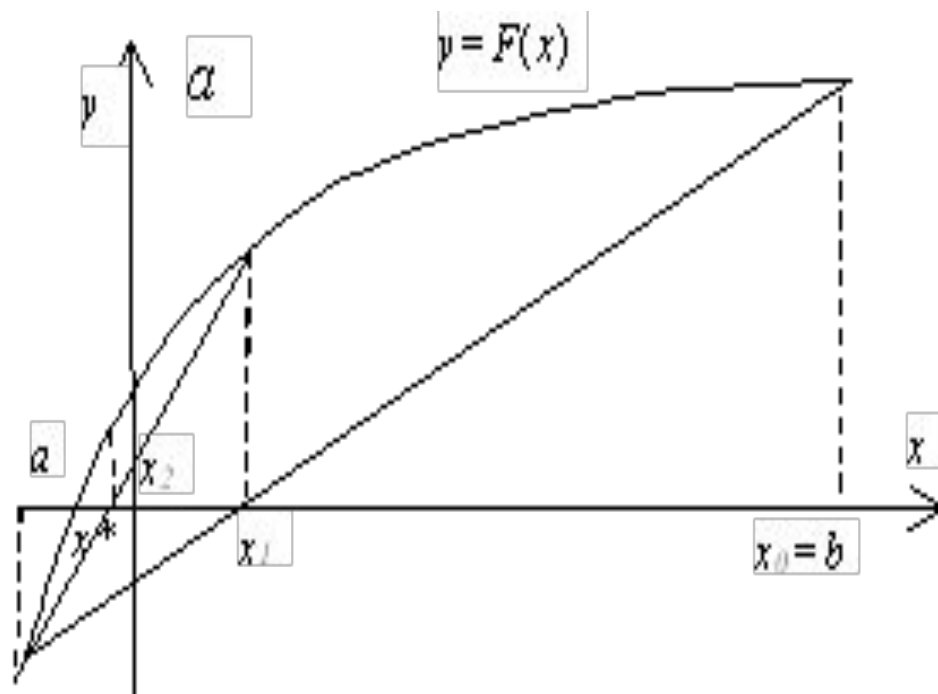


$F'(x)$ не меняет знак на отрезке
[a, b], т.е. $F(x)$ – монотонная
функция



$F'(x)$ не меняет знак на отрезке $[a, b]$, т.е. $F(x)$ – монотонная функция

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке $[a, b]$, т.е. $F(x)$ – монотонная функция



$F'(x)$ не меняет знак на отрезке $[a, b]$, т.е. $F(x)$ – монотонная функция



РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке $[a, b]$, т.е. $F(x)$ – монотонная функция



$F'(x)$ не меняет знак на отрезке $[a, b]$, т.е. $F(x)$ — монотонная функция

$$f'(x) = 6x - 0,4$$

$$f(-1) = -1 - 0,2 - 0,5 + 1,5 = -0,2 < 0;$$

$$f(0) = 1,5 > 0.$$

$$f'(-1) = -6 - 0,4 = -6,4 < 0;$$

$$f'(0) = -0,4 = -0,4 < 0.$$



$F'(x)$ не меняет знак на отрезке $[a, b]$, т.е. $F(x)$ — монотонная функция

Для вычислений применяем следующую формулу

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке $[a, b]$, т.е. $F(x)$ — монотонная функция



Все вычисления можно свести в таблицу

X_i	$f(X_i)$	$ X_i - X_{i+1} $		a	b	$f(a)$
0	1,5	1		-1,000	0,000	-0,200
-0,882	0,2162	0,882				
-0,943	0,0105	0,061				
-0,946	0,0005	0,003				
-0,946	0,0000	0,000				
-0,946	0,0000	0,000				



РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке $[a, b]$, т.е. $F(x)$ – монотонная функция



$F'(x)$ не меняет знак на отрезке
[a, b], т.е. $F(x)$ – монотонная
функция

$$f'(x) = 6x$$

$$f(-2) = -3 < 0;$$

$$f(-1) = 4 > 0.$$

$$f'(-2) = -12 < 0;$$

$$f'(-1) = -6 < 0.$$



$F'(x)$ не меняет знак на отрезке $[a, b]$, т.е. $F(x)$ — монотонная функция

Для вычислений применяем следующую формулу

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке $[a, b]$, т.е. $F(x)$ — монотонная функция



X_i	$f(X_i)$	$ X_i - X_{i+1} $		a	b	$f(a)$
-1	4			-2,000	-1,000	-3,000
-1,571	1,11953	0,571				
-1,688	0,19118	0,116				
-1,707	0,02959	0,019				
-1,709	0,00451	0,003				
-1,710	0,00069	0,000				



**Домашнее задание: решить
уравнение методом хорд**

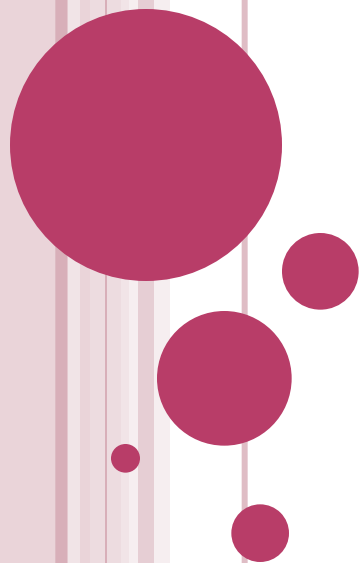
$$x^3 - 6x^2 + 3x + 11 = 0$$

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке
[a, b], т.е. $F(x)$ – монотонная
функция



ПРИБЛИЖЕННОЕ
РЕШЕНИЕ
НЕЛИНЕЙНЫХ
УРАВНЕНИЙ

Метод Ньютона
(касательных)



ИДЕЯ МЕТОДА

аналогична той, которая реализована в методе хорд, только в качестве прямой берется касательная, проводимая в текущей точке.

Метод применим к выпуклым и монотонным функциям



Выбор начальной точки

зависит от свойств функции:

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке $[a, b]$, т.е. $F(x)$ — монотонная функция

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке $[a, b]$, т.е. $F(x)$ — монотонная функция



Очередное приближение вычисляется по формуле:

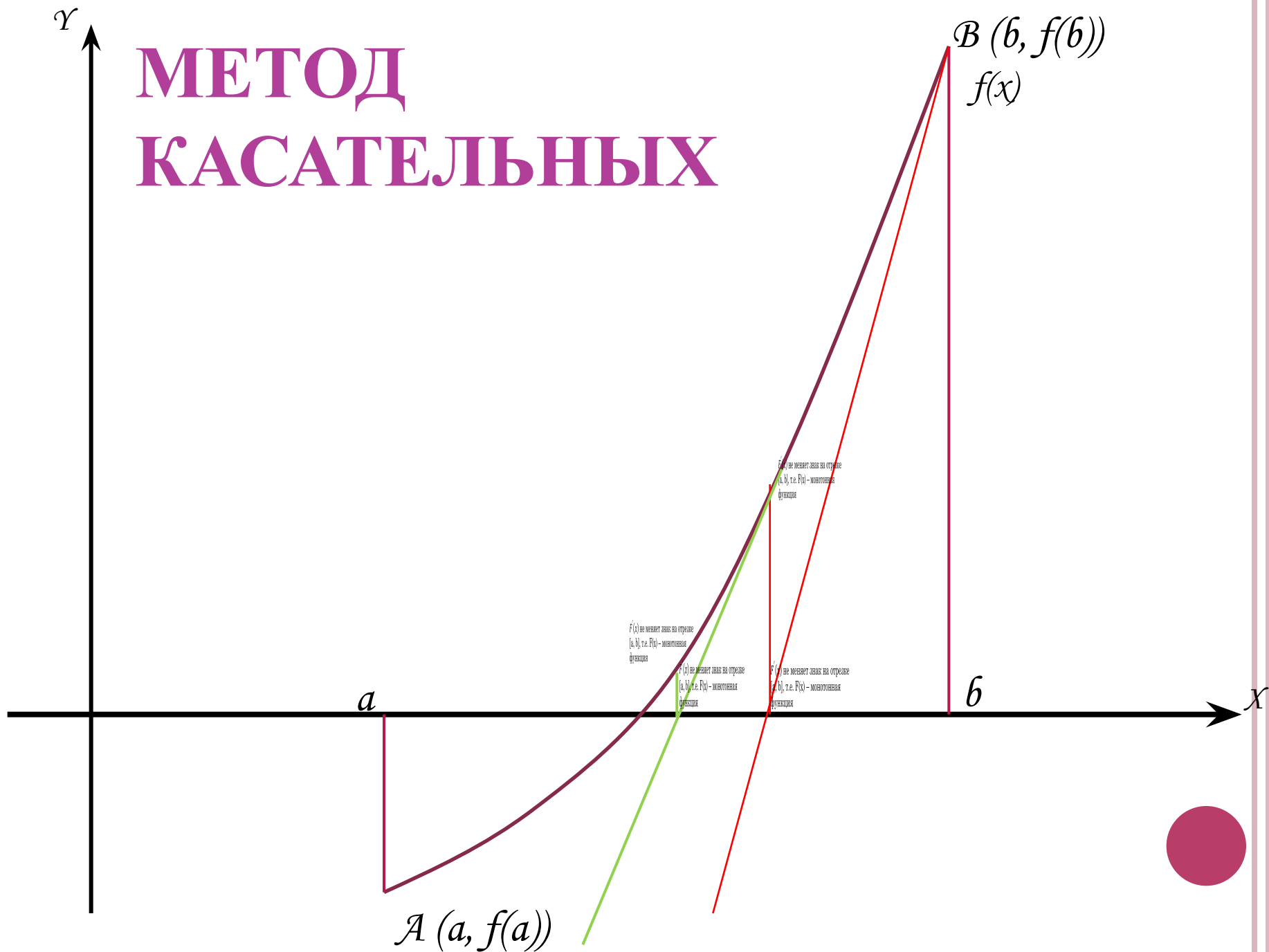
$F'(x)$ не меняет знак на отрезке
[a, b], т.е. $F(x)$ – монотонная
функция

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке
[a, b], т.е. $F(x)$ – монотонная
функция

Вычисления продолжаются до тех
пор, пока

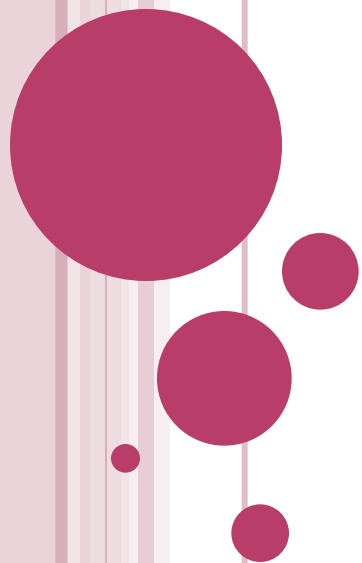


МЕТОД КАСАТЕЛЬНЫХ

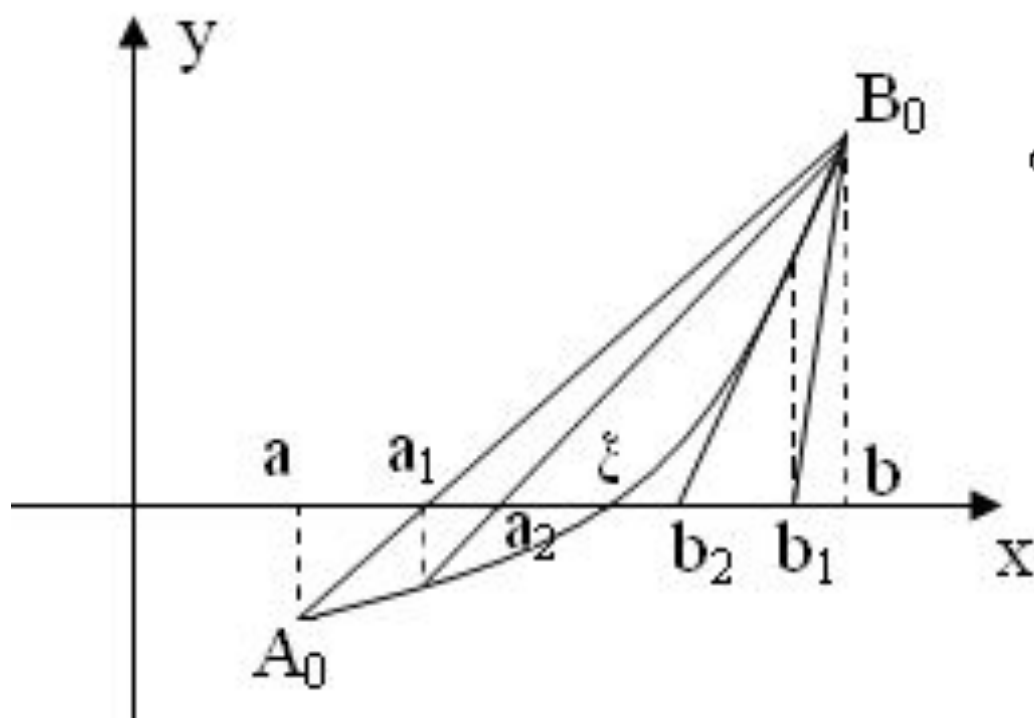


ПРИБЛИЖЕННОЕ
РЕШЕНИЕ
НЕЛИНЕЙНЫХ
УРАВНЕНИЙ

Комбинирован-
ный метод



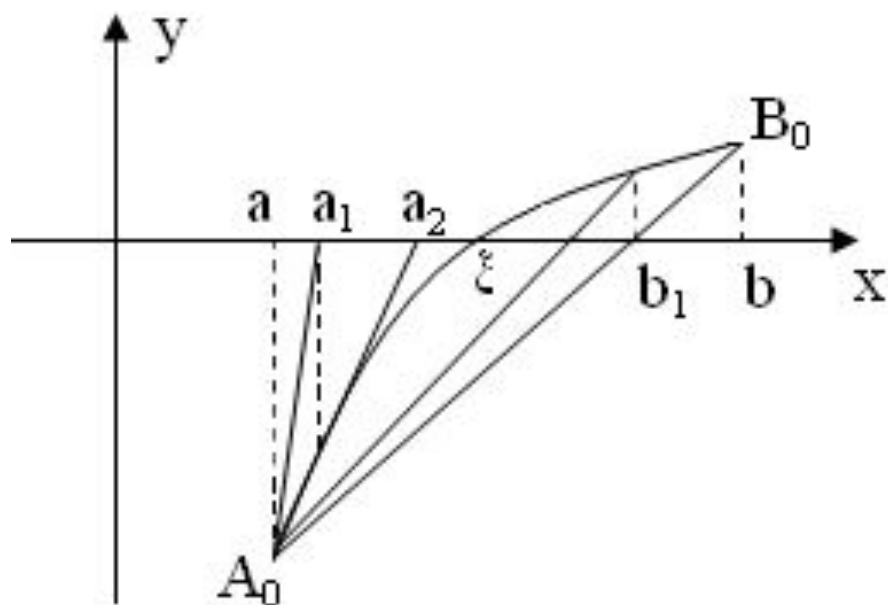
$F'(x)$ не меняет знак на отрезке $[a, b]$, т.е. $F(x)$ — монотонная функция



$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

$$b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)}$$

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке $[a, b]$, т.е. $F(x)$ — монотонная функция



$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

$$b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке $[a, b]$, т.е. $F(x)$ — монотонная функция

$F'(x)$ не меняет знак на отрезке $[a, b]$, т.е. $F(x)$ — монотонная функция



Пример

Дано уравнение: $x^3 - 2x^2 - 4x + 7 = 0$.

Найти корень на отрезке $[-2; -1]$ с погрешностью $\epsilon < 0,1$

Решение:

Проверим условие

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

$$f(-2)$$

$$=-1;$$

$$f(-1)=8$$

$$f''(-2)=-16$$

$$f''(-1)=-10$$



Вывод: условие выполняется для левой стороны отрезка, т.е. с правой стороны будем приближаться методом хорд, а с левой стороны - методом касательных

ai	bi	f(a)	f(b)	f'(a)	ai-bi
-2	-1	-1	8	16	1
-1,9375	-1,88889	-0,03101	0,680384	15,01172	0,048611

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

$$b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$



a_i	b_i	$f(a)$	$f(b)$	$f'(a)$	$a_i - b_i$
-2	-1	-1	8	16	1
-1,9375	-1,88889	-0,03101	0,680384	15,01172	0,048611

Корень=-1,91

