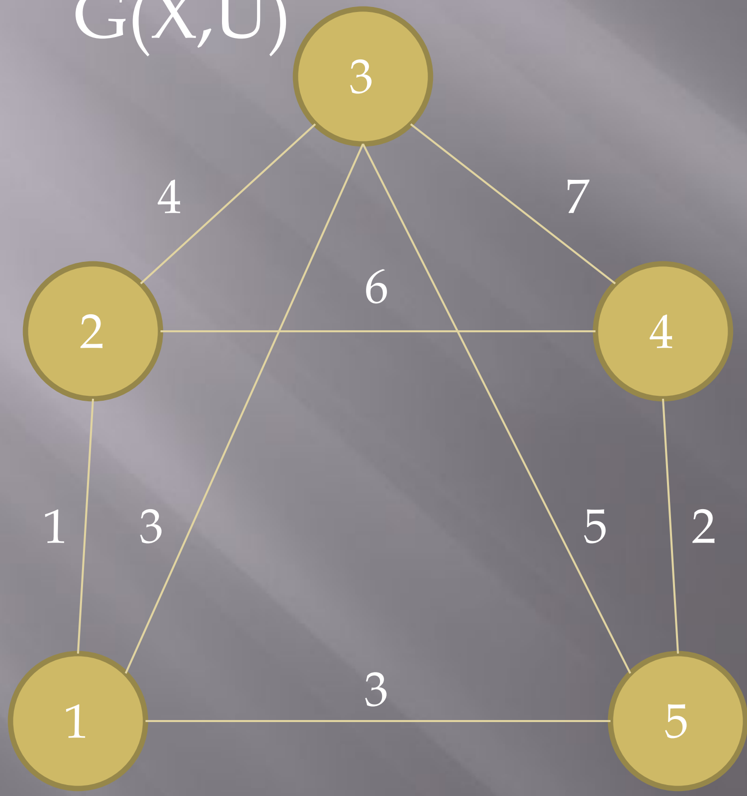
ЗАДАЧА И АЛГОРИТМ ПРИМА

МИНИМАЛЬНАЯ БАЗА РЕБЕР

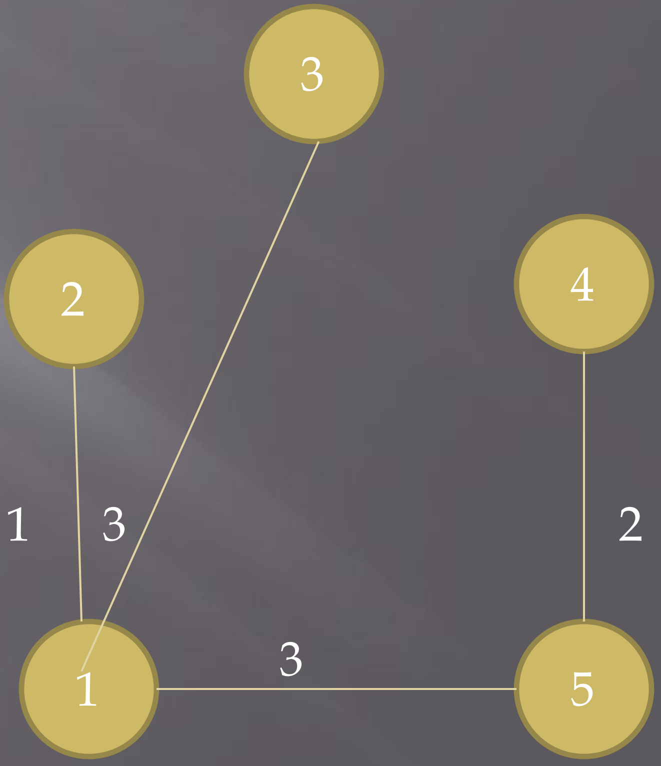
- **Содержательная постановка задачи**: на связном взвешенном неориентированном графе G(X,U) выделить подмножество $U' \subseteq U$ ребер таких, что:
- 1. Граф G(X,U′) является связным.
- 2. Суммарный вес ребер подмножества U′
- является минимальным.
- **Определение**: связным называется граф, между любой парой вершин которого существует маршрут.

ПРИМЕР 1

- Исходный граф G(X,U)



- Граф G(X,U’)



Формальная постановка задачи

$$\begin{cases} \sum_i \sum_j r(i,j)z(i,j) \to \min; \\ \forall p, \forall q \neq p : \sum_d \prod_{(i,j)\in L^d(p.q)} z(i,j) = 1; \\ \forall (i,j) \in U : z(i,j) = 1,0, \end{cases}$$

где $L^d(p,q)$ – маршрут, соединяющи й p - ю и q - ю вершины,

z(i, j) - булева переменная , равная единице, если ребро (i, j)

принадлежи т подмножест ву U' и равная нулю в противном случае,

r(i, j) - вес ребра (i, j).

Алгоритм Прима

Шаг 1. Выбирается произвольная i-я вершина.

Шаг 2. Выбирается инцидентное выбранной вершине ребро *(i,p)* с минимальным весом.

Шаг 3. Ребро *(i,p)* запоминается, а вершины i-я и p-я «стягиваются» в одну вершину.

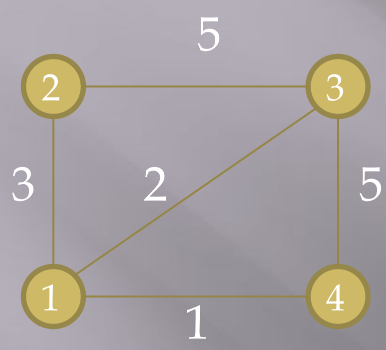
Шаг 4. Вес «стянутого» ребра добавляется к ранее накопленной сумме.

Шаг 5. Если образовались параллельные ребра, то из них остается то, вес которого минимален, а остальные удаляются.

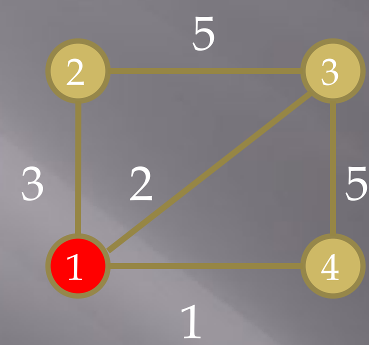
Шаг 6. Если все вершины графа стянуты в одну, то перейти к шагу 7, в противном случае – к шагу 1.

Шаг 7. Конец алгоритма. «Стянуты» искомые ребра.

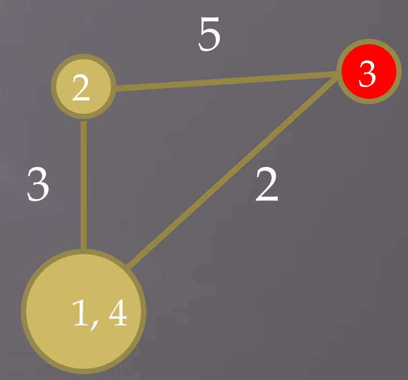
Пример 2



A) граф G(X,U) .



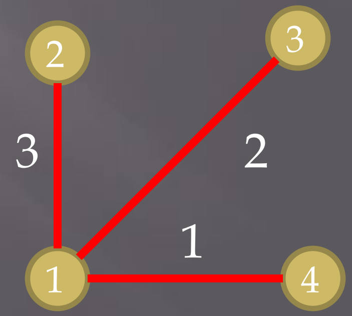
B) U′=(1,4); R(U′)=1.



C) U′={(1,4),(1,3)}; R(U′)=3.

D) U′={(1,4),(1,3),(1,2)}; R(U′)=6.

E) Конец алгоритма.



F) Граф G(X,U′)

Достоинства и недостатки алгоритма Прима

Достоинства:

1. Гарантия получения глобально оптимального решения.
2. Число итераций равно $|X| - 1$, где X – множество вершин.
3. Простота и наглядность.

Недостаток:

Алгоритм применим только к неориентированным графам.

САМОСТОЯТЕЛЬНО:

Пользуясь алгоритмом Прима, определить минимальную базу ребер графа G(X,U), заданного матрицей M:

0	5	1	0	6	3
5	0	0	4	0	8
1	0	0	3	7	0
0	4	3	0	0	9
6	0	7	0	0	0
3	8	0	9	0	0