Математический анализ
1 семестр

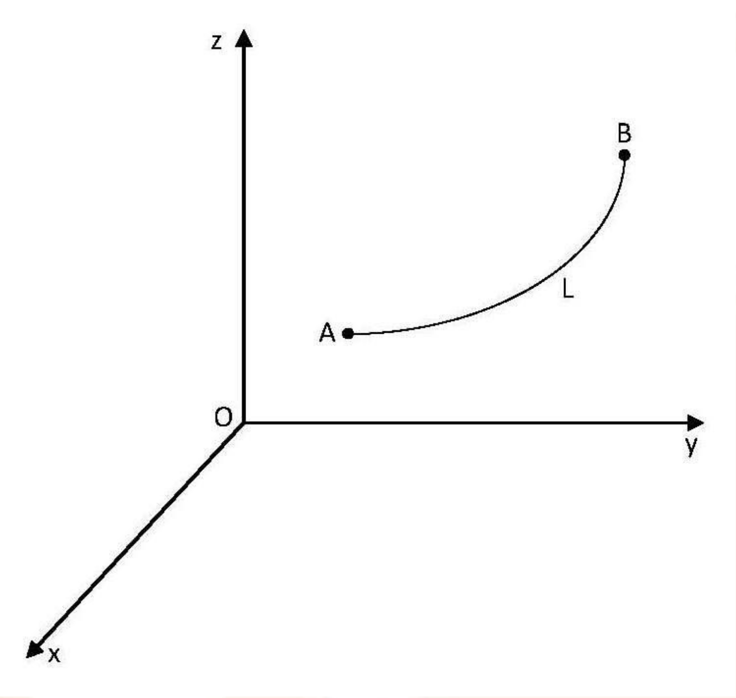
Лекция 13

Длина кривой. Касательная и кривизна. Приближенные методы решения уравнений.

11 декабря 2014 года

Лектор: Профессор НИЯУ МИФИ, д.ф.-м.н.
Орловский Дмитрий Германович

Длина кривой



$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t) \end{cases}$$

$$\alpha \le t \le \beta$$

Если функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ непрерывно дифференцируемы, то кривая L называется гладкой кривой (кривая класса C^1).

Условие регулярности

$$[f_1'(t)]^2 + [f_2'(t)]^2 + [f_3'(t)]^2 \neq 0$$

для спрямляемости кривой не обязательно.

Длина кривой

Теорема. Гладкая кривая спрямляема и ее длина удовлетворяет неравенствам

$$\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2}(\beta-\alpha)\le |L| \le \sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}(\beta-\alpha),$$

где

$$m_j=\operatorname*{Inf}_{[\alpha;\beta]}|f_j'(t)|, \quad (1\le j\le 3),$$

$$M_j=\operatorname*{Sup}_{[\alpha;\beta]}|f_j'(t)|, \quad (1\le j\le 3).$$

Длина кривой

Рассмотрим гладкую кривую

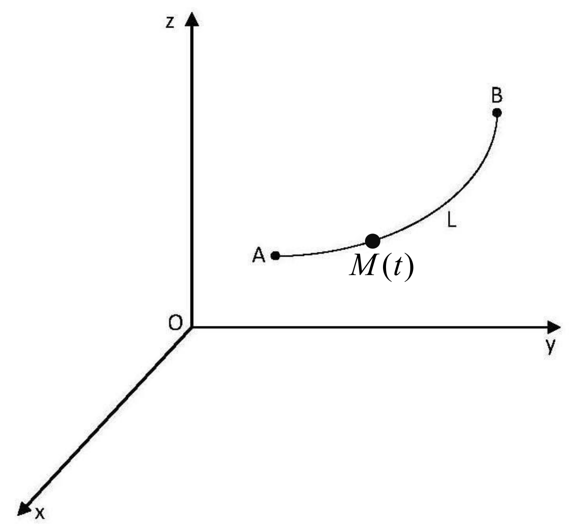
$$L = \{(x; y; z): \ x = f_1(t), \ y = f_2(t), \ z = f_3(t), \ \alpha \le t \le \beta\}$$

$$(f_1(t), \ f_2(t), \ f_3(t) \in C^1[\alpha; \beta]).$$

Пусть $M(t) = (f_1(t); f_2(t); f_3(t))$

$$(A = M(\alpha), \quad B = M(\beta)).$$

$$l(t) = |\cup AM(t)|$$



Теорема. Для любой гладкой кривой

$$l'(t) = \sqrt{[f_1'(t)]^2 + [f_2'(t)]^2 + [f_3'(t)]^2}.$$

Длина кривой

Доказательство. Пусть $t>t_0$, тогда по теореме об аддитивности длины

$$l(t)-l(t_0)=|\cup M(t_0)M(t)|$$

Согласно предыдущей теореме для отрезка $[t_0;t]$

$$\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2}(t-t_0)\le l(t)-l(t_0)\le\sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}(t-t_0)$$

$$\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2}\le\frac{l(t)-l(t_0)}{t-t_0}\le\sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}$$

$$m_i=|f_i'(\xi_i)|,\quad t_0\le\xi_i\le t,\quad 1\le i\le 3,$$

$$M_i=|f_i'(\eta_i)|,\quad t_0\le\eta_i\le t,\quad 1\le i\le 3.$$

$$\lim_{t\to t_0}\xi_i=\lim_{t\to t_0}\eta_i=t_0\quad\Rightarrow\quad\lim_{t\to t_0}|f_i'(\xi_i)|=\lim_{t\to t_0}|f_i'(\eta_i)|=|f_i'(t_0)|.$$

$$\lim_{t\to t_0+0}\frac{l(t)-l(t_0)}{t-t_0}=\sqrt{[f_1'(t_0)]^2+[f_2'(t_0)]^2+[f_3'(t_0)]^2}$$

Длина кривой

Если $t<t_0$, тогда

$$l(t_0)-l(t)=|\cup M(t)M(t_0)|$$

Согласно предыдущей теореме для отрезка $[t;\ t_0]$

$$\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2}\,(t_0-t)\le l(t_0)-l(t)\le\sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}\,(t_0-t)$$

$$\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2}\le\frac{l(t_0)-l(t)}{t_0-t}\le\sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}$$

$$m_i=|f_i'(\xi_i)|,\quad t\le\xi_i\le t_0,\quad 1\le i\le 3,$$

$$M_i=|f_i'(\eta_i)|,\quad t\le\eta_i\le t_0,\quad 1\le i\le 3.$$

$$\lim_{t\to t_0}\xi_i=\lim_{t\to t_0}\eta_i=t_0\quad\Rightarrow\quad\lim_{t\to t_0}|f_i'(\xi_i)|=\lim_{t\to t_0}|f_i'(\eta_i)|=|f_i'(t_0)|.$$

$$\lim_{t\to t_0-0}\frac{l(t)-l(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0-0}\frac{l(t_0)-l(t)}{t_0-t}=\sqrt{[f_1'(t_0)]^2+[f_2'(t_0)]^2+[f_3'(t_0)]^2}$$

Длина кривой

$$\lim_{t\to t_0+0}\frac{l(t)-l(t_0)}{t-t_0}=\sqrt{[f_1'(t_0)]^2+[f_2'(t_0)]^2+[f_3'(t_0)]^2}$$

$$\lim_{t\to t_0-0}\frac{l(t)-l(t_0)}{t-t_0}=\sqrt{[f_1'(t_0)]^2+[f_2'(t_0)]^2+[f_3'(t_0)]^2}$$

Отсюда следует, что

$$l'(t)=\lim_{t\to t_0}\frac{l(t)-l(t_0)}{t-t_0}=\sqrt{[f_1'(t_0)]^2+[f_2'(t_0)]^2+[f_3'(t_0)]^2}$$

Элемент длины дуги

Определение. Модуль дифференциала длины дуги называется элементом длины дуги.

$$ds = |l'(t)dt| = \sqrt{[f_1'(t)]^2 + [f_2'(t)]^2 + [f_3'(t)]^2}\,|dt| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

(теорема Пифагора в дифференциалах).

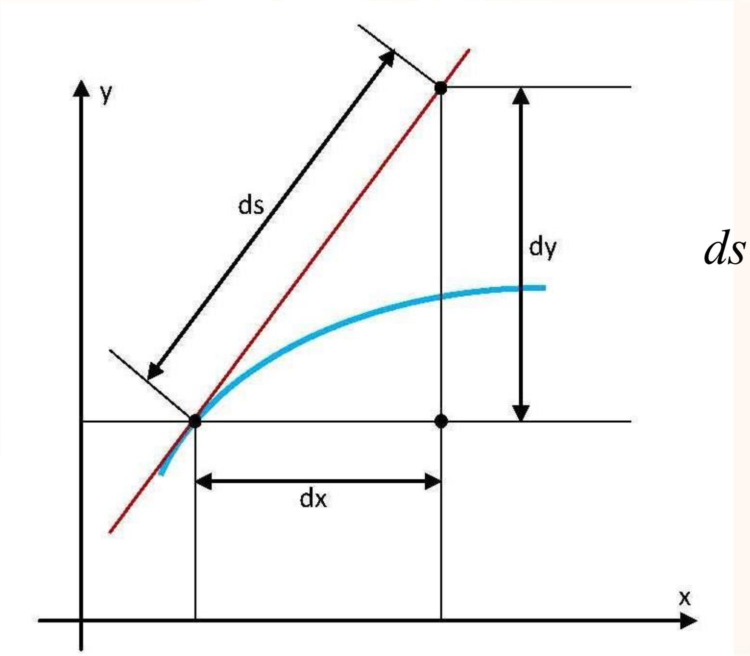
Особенно наглядное значение эта формула имеет для плоской кривой, являющейся графиком явно заданной функции y=f(x).

График явно заданной функции всегда можно представить в параметрической форме. Для этого достаточно взять в качестве параметра независимую переменную.

Длина кривой

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t), \\ z = 0. \end{cases}$$

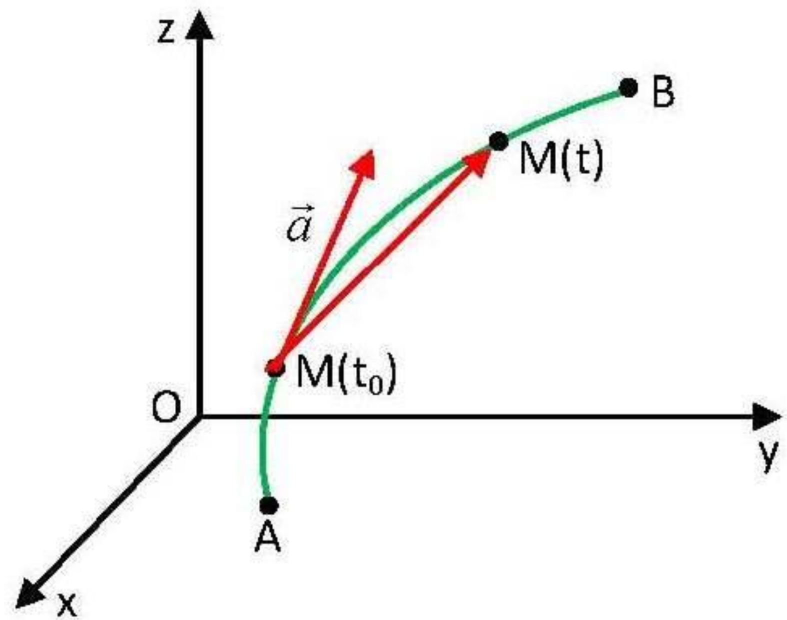
$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,|dt| =$$
$$= \sqrt{1 + [f'(t)]^2 + 0}\,|dt| = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,|dx| =$$
$$= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$



$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Касательная к кривой

$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t). \end{cases}$$



$$\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = \{f_1(t) - f_1(t_0); f_2(t) - f_2(t_0); f_3(t) - f_3(t_0)\}$$

$$\frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{t - t_0} = \left\{\frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0}; \frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{t - t_0}; \frac{f_3(t) - f_3(t_0)}{t - t_0}\right\}$$

Касательная к кривой

$$\frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{t-t_0} = \left\{ \frac{f_1(t)-f_1(t_0)}{t-t_0}; \frac{f_2(t)-f_2(t_0)}{t-t_0}; \frac{f_3(t)-f_3(t_0)}{t-t_0} \right\}$$

Предельное значение этого вектора при $t \to t_0$

$$\vec{a} = \{f_1'(t_0); f_2'(t_0); f_3'(t_0)\}$$

(в том случае, когда оно отлично от нулевого вектора) называется касательным вектором к кривой в точке t_0.
Прямая, проходящая через точку $M(t_0)$ с этим направляющим вектором, называется касательной к кривой в точке t_0.

Касательная к кривой

Особые и регулярные точки кривой

$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t). \end{cases}$$

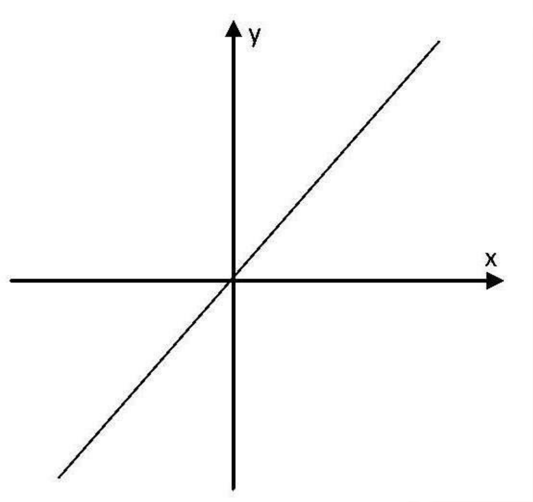
$$[f_1'(t)]^2 + [f_2'(t)]^2 + [f_3'(t)]^2 \neq 0 \ - \ \textit{регулярная точка}$$

$$[f_1'(t)]^2 + [f_2'(t)]^2 + [f_3'(t)]^2 = 0 \ - \ \textit{особая точка}$$

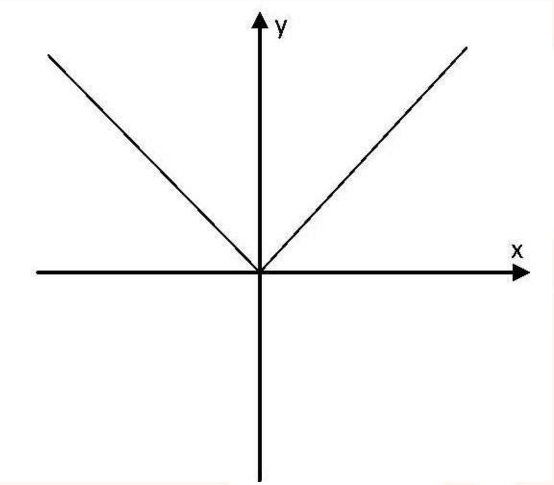
В регулярной точке кривая всегда имеет касательную.

Касательная к кривой

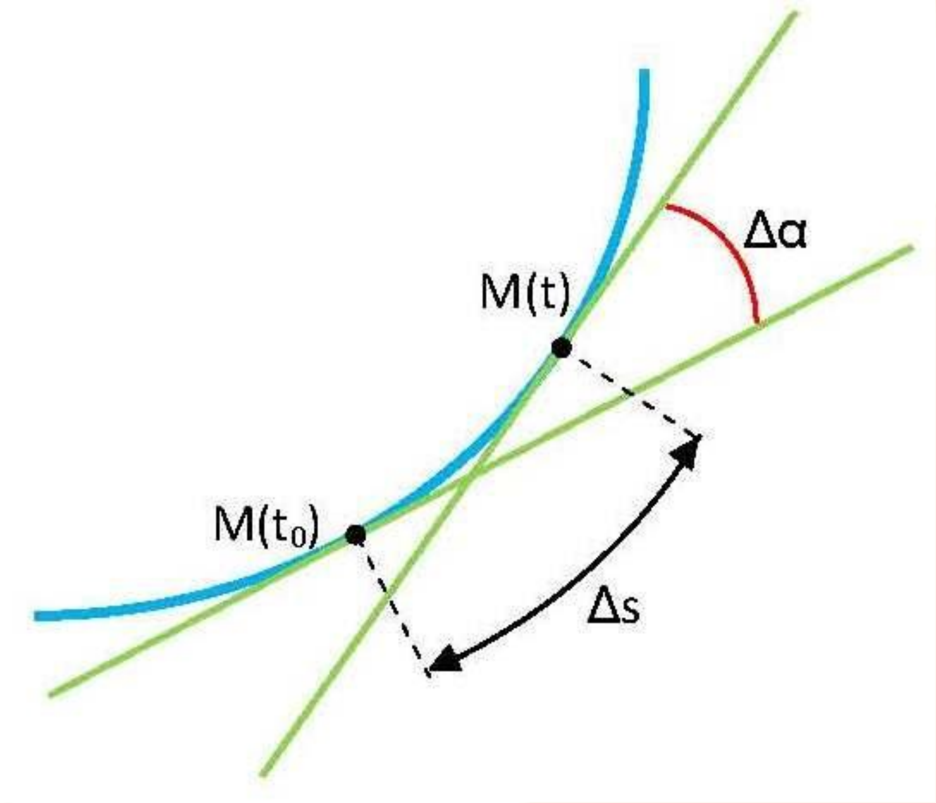
Пример 1. $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^3, \\ z = 0. \end{cases}$



Пример 2. $\begin{cases} x = t\,|\,t\,|, \\ y = t^2, \\ z = 0. \end{cases}$



Кривизна плоской кривой



Средняя кривизна на участке:

$$k_{cp} = \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|$$

Кривизна в точке $M(t_0)$:

$$k = \lim_{t \to t_0} k_{cp} = \lim_{t \to t_0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|$$

Кривизна плоской кривой

Теорема. Пусть на плоскости задана гладкая регулярная кривая

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Тогда ее кривизна в каждой точке t_0 определяется формулой

$$k = \frac{|\varphi'(t_0)\psi''(t_0) - \varphi''(t_0)\psi'(t_0)|}{(|\varphi'(t_0)|^2 + |\psi'(t_0)|^2)^{3/2}}$$

Замечание.

Гладкая: $\varphi, \psi \in C^1$

Регулярная: $|\varphi'(t)|^2 + |\psi'(t)|^2 \neq 0$

Кривизна плоской кривой

Доказательство. Так как кривая регулярна, то величина

$$|\varphi'(t)|^2 + |\psi'(t)|^2 \neq 0$$

Пусть для определенности

$$\varphi'(t) \neq 0$$

Касательный вектор к кривой

$$\vec{a} = \{\varphi'(t);\psi'(t)\}$$

образует с осью абсцисс угол

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Кривизна плоской кривой

По определению кривизны

$$k = \lim_{t\to t_0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \lim_{t\to t_0}\left|\frac{\alpha(t)-\alpha(t_0)}{s(t)-s(t_0)}\right| =$$

$$= \lim_{t\to t_0}\left|\frac{(\alpha(t)-\alpha(t_0))/(t-t_0)}{(s(t)-s(t_0))/(t-t_0)}\right| =$$

$$= \left|\frac{\lim\limits_{t\to t_0}(\alpha(t)-\alpha(t_0))/(t-t_0)}{\lim\limits_{t\to t_0}(s(t)-s(t_0))/(t-t_0)}\right| = \left|\frac{\alpha'(t_0)}{s'(t_0)}\right|$$

Кривизна плоской кривой

Так как

$$\alpha'(t) = \left(\operatorname{arctg}\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)' = \frac{1}{1+(\psi'(t)/\varphi'(t))^2}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)' =$$

$$= \frac{[\varphi'(t)]^2}{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\cdot\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}$$

$$s'(t) = \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2} = ([\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2)^{1/2}$$

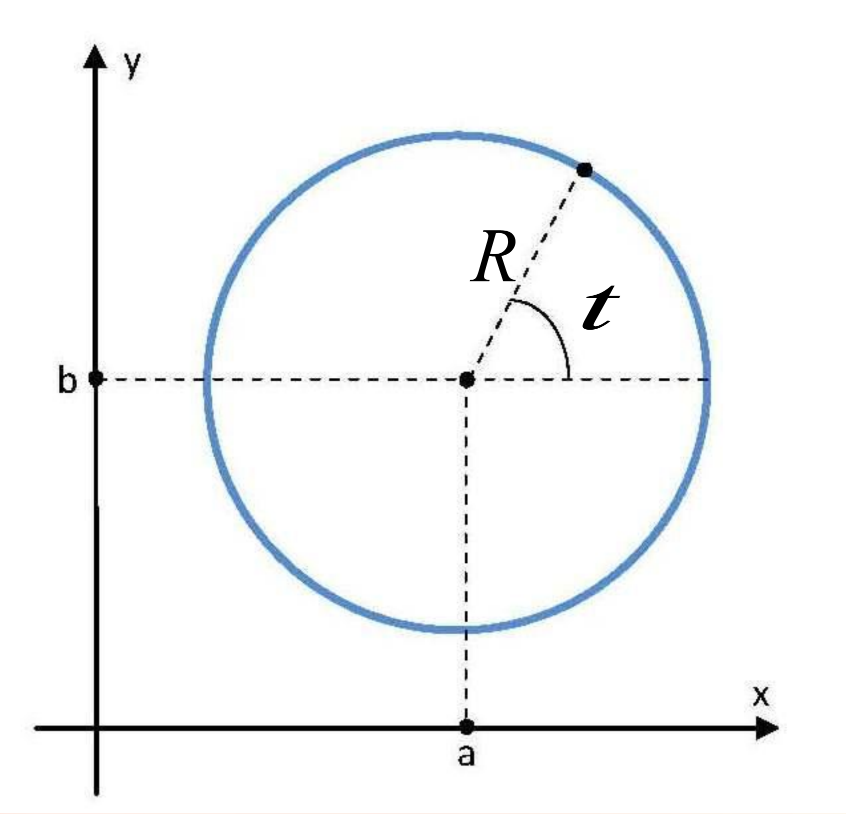
то

$$k = \left|\frac{\phi'(t)\psi''(t)-\phi''(t)\psi'(t)}{[\phi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2} / ([\phi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2)^{1/2}\right| =$$

$$= \frac{|\phi'(t)\psi''(t)-\phi''(t)\psi'(t)|}{(|\phi'(t)|^2+|\psi'(t)|^2)^{3/2}}$$

Пример. Найти кривизну окружности

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$



Параметрическое уравнение

$$\begin{cases} x=a+R\cos t, \\ y=b+R\sin t, \\ 0\le t\le 2\pi. \end{cases}$$

Кривизна плоской кривой

$$k=\frac{|\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)|}{(|\varphi'(t)|^2+|\psi'(t)|^2)^{3/2}}$$

$$\varphi(t)=a+R\cos t,\qquad \psi(t)=b+R\sin t$$

$$\varphi'(t)=-R\sin t,\qquad \psi'(t)=R\cos t$$

$$\varphi''(t)=-R\cos t,\qquad \psi'(t)=R\sin t$$

$$\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)=-(R\sin t)(R\sin t)-(R\cos t)(R\cos t)=-R^2$$

$$|\varphi'(t)|^2+|\psi'(t)|^2=R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t=R^2$$

$$k=\frac{R^2}{(R^2)^{3/2}}=\frac{R^2}{R^3}=\frac{1}{R}$$

Кривизна плоской кривой

Часто представляется удобным приближенно заменять кривую вблизи рассматриваемой точки – окружностью, имеющую ту же кривизну, что и кривая в данной точке.

Кругом кривизны кривой в данной точке M называется круг, который

1) касается кривой в точке M;

2) направлен выпуклостью вблизи этой точки в ту же сторону, что и кривая;

3) имеет ту же кривизну, что и кривая в точке M.

Центр круга кривизны называется центром кривизны, а радиус этого круга – радиусом кривизны (в данной точке). Для радиуса кривизны, очевидно, имеем формулу

$$R = \frac{1}{k} \quad (k - \textit{кривизна кривой})$$

Кривизна плоской кривой

Если кривая задана в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

то координаты центра кривизны кривой в точке (x,y) равны

$$\begin{cases} \xi = x - \dfrac{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)} \cdot \psi'(t), \\ \eta = y + \dfrac{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)} \cdot \varphi'(t). \end{cases}$$

Кривизна плоской кривой

Если кривая задана как график явной функции

$$y = f(x),$$

то параметрическое уравнение этой кривой имеет вид

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t). \end{cases}$$

Задача. Показать, что кривизна такой кривой

$$k = \frac{f''(x)}{(1+[f'(x)]^2)^{3/2}},$$

а координаты центра кривизны

$$\xi = x - \frac{1+[f'(x)]^2}{f''(x)} f'(x), \quad \eta = y + \frac{1+[f'(x)]^2}{f''(x)}.$$

Эволюта плоской кривой

Геометрическое множество центров кривизны данной кривой называется ее эволютой. Сама кривая по отношению к своей эволюте называется эвольвентой.

Пример. Найти эволюту параболы $y^2=2px$.

Дифференцируя уравнение, находим

$$2yy'=2p;\quad yy'=p,$$

$$(y')^2+yy''=0;\quad yy''=-(y')^2;\quad y^3y''=-(yy')^2;\quad y^3y''=-p^2.$$

Координаты центра кривизны

$$\xi=x-\frac{1+[y']^2}{y''}y'=x-\frac{(1+[y']^2)y^2}{y''y^3}yy'(x)=x+\frac{y^2+p^2}{p}=x+\frac{2px+p^2}{p}=3x+p=\frac{3y^2}{2p}+p,$$

$$\eta=y+\frac{1+[y']^2}{y''}=y+\frac{(1+[y']^2)y^2}{y''y^3}y=y-\frac{y^2+p^2}{p^2}y=-\frac{y^2}{p^2}.$$

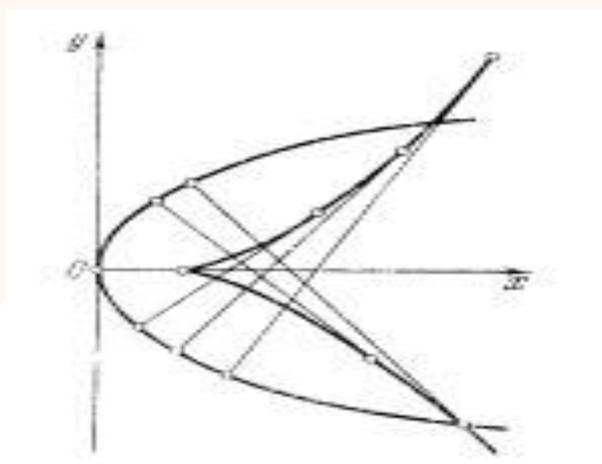
Эволюта плоской кривой

Из полученных уравнений

$$\xi = \frac{3y^2}{2p} + p, \quad \eta = -\frac{y^2}{p^2}.$$

Исключаем y и получаем уравнение эволюты

$$\eta^2 = \frac{8}{27p}(\xi - p)^3 \qquad (\textit{полукубическая} \quad \textit{парабола})$$



Метод итераций (последовательных приближений)

$$x = \varphi(x)$$

Замечание.

$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = x + cf(x) \;\Leftrightarrow\; x = \varphi(x) \;\; (\varphi(x) = x + cf(x))$$

$$x_1 = \varphi(x_0)$$

$$x_2 = \varphi(x_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = \varphi(x_{n-1})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Метод итераций

Принцип сжимающих отображений

Пусть выполнены следующие условия

$$(1)\quad \forall x \in [a,b] \;\; \varphi(x) \in [a,b],$$

$$(2)\quad \exists q \in (0,1) \;\; \forall x, y \in [a,b] \;\; |\varphi(x) - \varphi(y)| \le q\,|x - y|.$$

Тогда на отрезке [a,b] существует и притом единственное решение уравнения

$$x = \varphi(x).$$

При этом метод итераций для $x_0 \in [a,b]$ дает последовательность, сходящуюся к решению этого уравнения. Более того

$$|x_n - x| \le \frac{q^n}{1-q}\,|\varphi(x_0) - x_0|.$$

Метод итераций

Доказательство. В силу условия (1) последовательность итераций определена. Покажем, что она фундаментальна.

Лемма. При m≥n

$$\boxed{|x_m - x_n| \le q^n |x_{m-n} - x_0|}$$

В самом деле

$$|x_m - x_n| = |\varphi(x_{m-1}) - \varphi(x_{n-1})| \le q\,|x_{m-1} - x_{n-1}|$$

Применяя при m≥n полученное неравенство n раз, получаем

$$|x_m - x_n| \le q\,|x_{m-1} - x_{n-1}| \le q^2 |x_{m-2} - x_{n-2}| \le \ldots \le q^n |x_{m-n} - x_0|$$

Следствие:

$$\boxed{|x_{n+1} - x_n| \le q^n |x_1 - x_0|}$$

Метод итераций

Оценим, теперь, величину

$$|x_k - x_0| = |(x_k - x_{k-1}) + (x_{k-1} - x_{k-2}) + \ldots + (x_1 - x_0)| \le$$

$$\le q^{k-1}|x_1 - x_0| + q^{k-2}|x_1 - x_0| + \ldots + |x_1 - x_0| =$$

$$= (q^{k-1} + q^{k-2} + \ldots + 1)|x_1 - x_0| = \frac{1-q^k}{1-q}|x_1 - x_0| \le \frac{|x_1 - x_0|}{1-q}.$$

Итак, мы имеем два неравенства

$$|x_m - x_n| \le q^n |x_{m-n} - x_0|, \quad |x_k - x_0| \le \frac{|x_1 - x_0|}{1-q},$$

Из которых следует, что при m≥n

$$|x_m - x_n| \le q^n \frac{|x_1 - x_0|}{1-q}$$

Метод итераций

$$|x_m - x_n| \le q^n \frac{|x_1 - x_0|}{1-q} \quad (m \ge n)$$

$\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} q^n \frac{|x_1 - x_0|}{1-q} = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists N \ \forall n > N \ \ q^n \frac{|x_1 - x_0|}{1-q} < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\forall n > N, m \ge n \ \ |x_m - x_n| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\forall m, n > N \ \ |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Метод итераций

$$\exists x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

$$(1)\quad a \le x_n \le b \ \Rightarrow\ x \in [a,b]$$

$$(2)\quad 0 \le |\varphi(x_n) - \varphi(x)| \le q\,|x_n - x| \ \Rightarrow\ \varphi(x_n) \to \varphi(x)$$

$$(3)\quad x_n = \varphi(x_{n-1}) \ \Rightarrow\ x = \varphi(x)$$

$$|x_m - x_n| \le q^n \frac{|x_1 - x_0|}{1-q}\ ,\ m \to \infty \ \Rightarrow\ |x - x_n| \le q^n \frac{|x_1 - x_0|}{1-q}$$

$$|x - x_n| = |x_n - x|,\ \ |x_1 - x_0| = |\varphi(x_0) - x_0|$$

$$\Downarrow$$

$$|x_n - x| \le \frac{q^n}{1-q}\,|\varphi(x_0) - x_0|$$

Метод итераций

Единственность решения.

$$x = \varphi(x),\ y = \varphi(y)$$

$$|x - y| = |\varphi(x) - \varphi(y)| \le q\,|x - y|$$

$$(1 - q)\,|x - y| \le 0$$

$$|x - y| \le 0$$

$$x = y$$

Иоганн Кеплер

27.12.1571 – 15.11.1630

Немецкий математик, астроном и оптик, первооткрыватель законов движения планет Солнечной системы.

В 1591 поступил в университет в Тюбингене, в 1594 приглашен для чтения лекций по математике в университет города Граца (Австрия).

На протяжении нескольких лет Кеплер в результате тщательного анализа приходит к выводу, что траектория движения Марса представляет собой не круг, а эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце — положение, известное сегодня как *первый закон Кеплера*.

Дальнейший анализ привёл ко *второму закону*: радиус-вектор, соединяющий планету и Солнце, в равное время описывает равные площади. Это означало, что чем дальше планета от Солнца, тем медленнее она движется.

Иоганн Кеплер

В 1612 году Кеплер переезжает в Линц, где прожил 14 лет. За ним сохранена должность придворного математика и астронома, но в деле оплаты новый император ничем не лучше старого. Некоторый доход приносят преподавание математики и гороскопы.

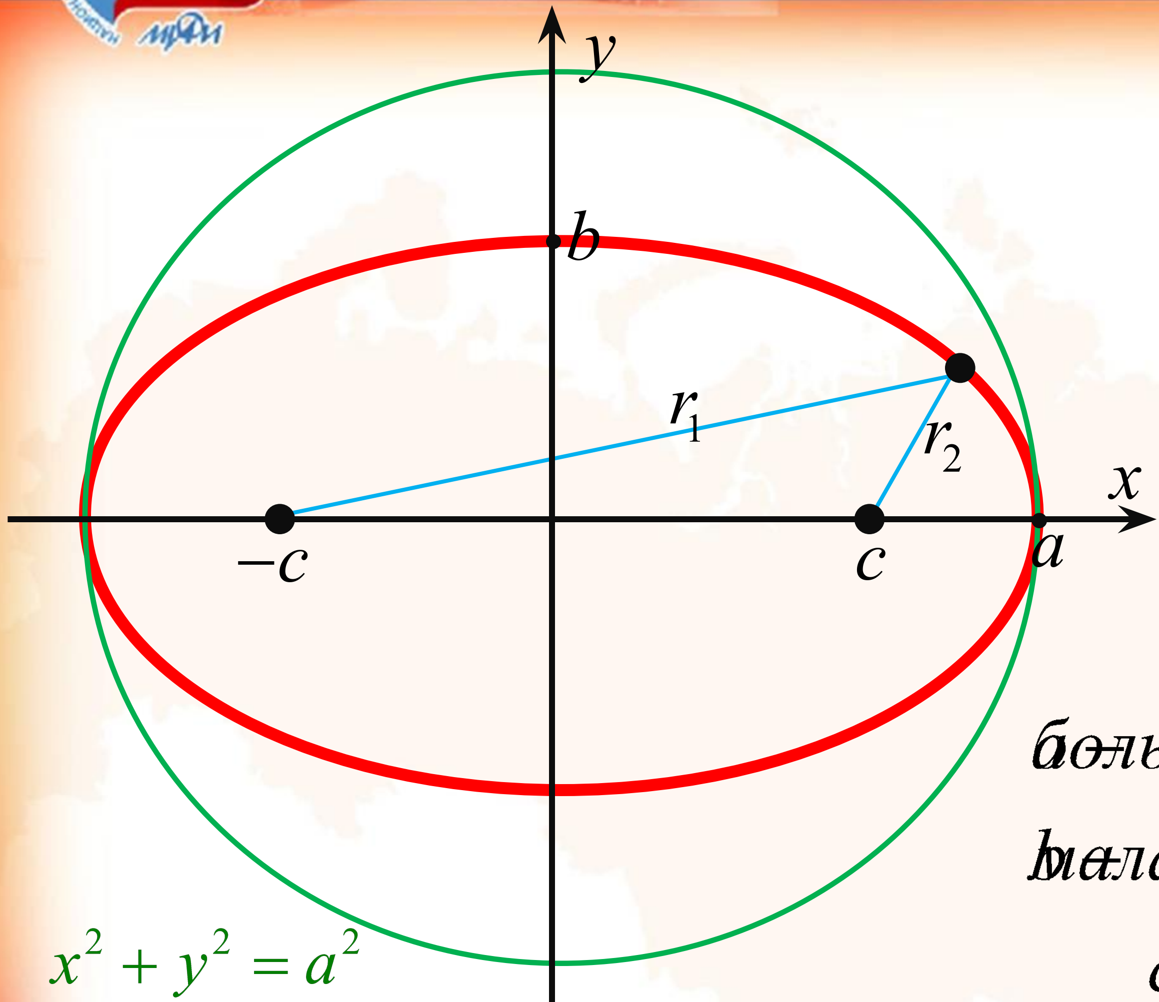
Продолжая астрономические исследования, Кеплер в 1618 году открывает *третий закон*: отношение куба среднего удаления планеты от Солнца к квадрату периода обращения её вокруг Солнца есть величина постоянная для всех планет: $\mathbf{a^3/T^2 = const}$. Этот результат Кеплер публикует в завершающей книге «Гармония мира», причём применяет его уже не только к Марсу, но и ко всем прочим планетам, включая, естественно, и Землю.

В 1626 году в ходе Тридцатилетней войны Линц осаждён и вскоре захвачен. Начинаются грабежи и пожары. Кеплер переезжает в Ульм.

В 1630 году отправляется к императору в Регенсбург, чтобы получить хотя бы часть жалованья. По дороге сильно простужается и вскоре умирает.

Законы планетной кинематики, открытые Кеплером, послужили позже Ньютону основой для создания теории тяготения. Ньютон математически доказал, что все законы Кеплера являются следствиями закона тяготения.

Эллипс



$$r_1 + r_2 = 2a$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

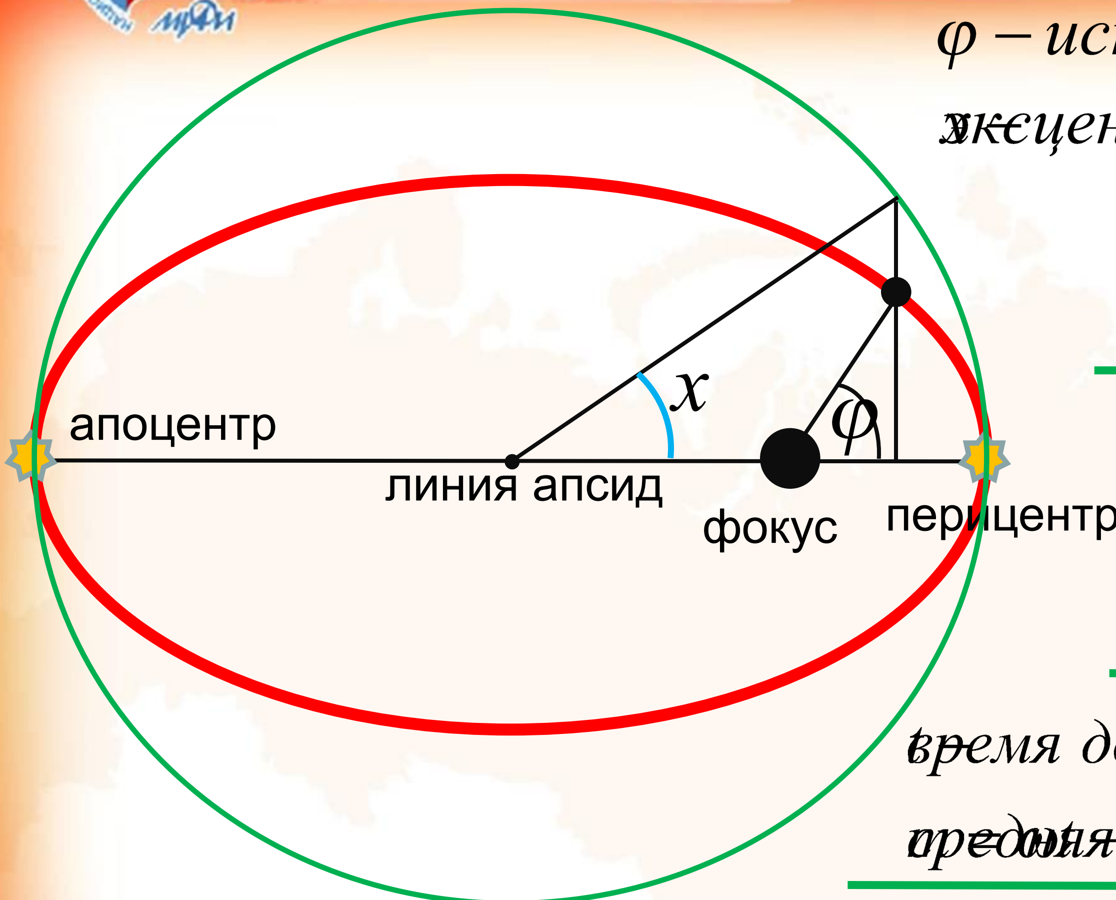
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a \geq b)$$

a – большая полуось

b – малая полуось

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \text{ – эксцентриситет}$$

Уравнение Кеплера



φ – *истинная аномалия*

x – *эксцентрическая аномалия*

T – *период обращения*

$$\mu = m_1 + m_2$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g\mu}{a^3}}$$

(среднее движение)

t – *время движения от перицентра*

$m = \omega t$ – *средняя аномалия*

$$\boxed{m = x - \varepsilon \sin x}$$

Метод итераций (пример)

Уравнение Кеплера

$$x = m + \varepsilon \sin x \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

$$\varphi(x) = m + \varepsilon \sin x$$

$$[a, b] = [m-1, m+1]$$

$$\varphi'(x) = \varepsilon \cos x \quad |\varphi'(x)| \le \varepsilon$$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)|\,|x - y| \le \varepsilon |x - y|$$

Таким образом, итерации

$$x_n = m + \varepsilon \sin x_{n-1}$$

сходятся к единственному решению этого уравнения.

Метод итераций (пример)

Оценка погрешности:

$$|x_n - x| \le \frac{\varepsilon^n}{1-\varepsilon}\,|\varphi(x_0) - x_0|.$$

1619

$$x = 2 + 0{,}1\sin x \quad (\text{точность до } 0{,}001)$$

$$m = 2 \qquad \varepsilon = 0{,}1 \qquad\qquad d = \frac{(0{,}1)^n}{0{,}9}\,|\varphi(x_0) - x_0|$$

$$x_0 = 2, \qquad d = 0{,}1$$

$$x_1 = 2{,}09093, \quad d = 0{,}01$$

$$x_2 = 2{,}08678, \quad d = 0{,}001$$

$$x_3 = 2{,}08698, \quad d = 0{,}0001$$

Ответ:

$$x \approx 2{,}087$$

Математический анализ.
Приближенные методы
решения уравнений.
Лекция 13
завершена.

Спасибо за внимание!

Тема следующей лекции:
Обзорная лекция.
Лекция состоится в четверг 18 декабря
В 10:00 по Московскому времени.