

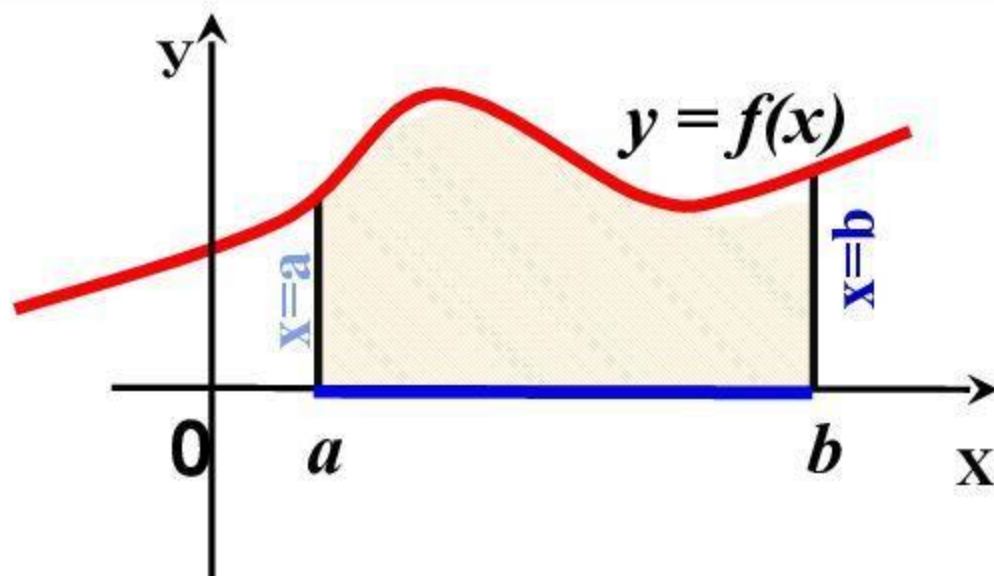
Применение определенного интеграла для нахождения площади криволинейной трапеции



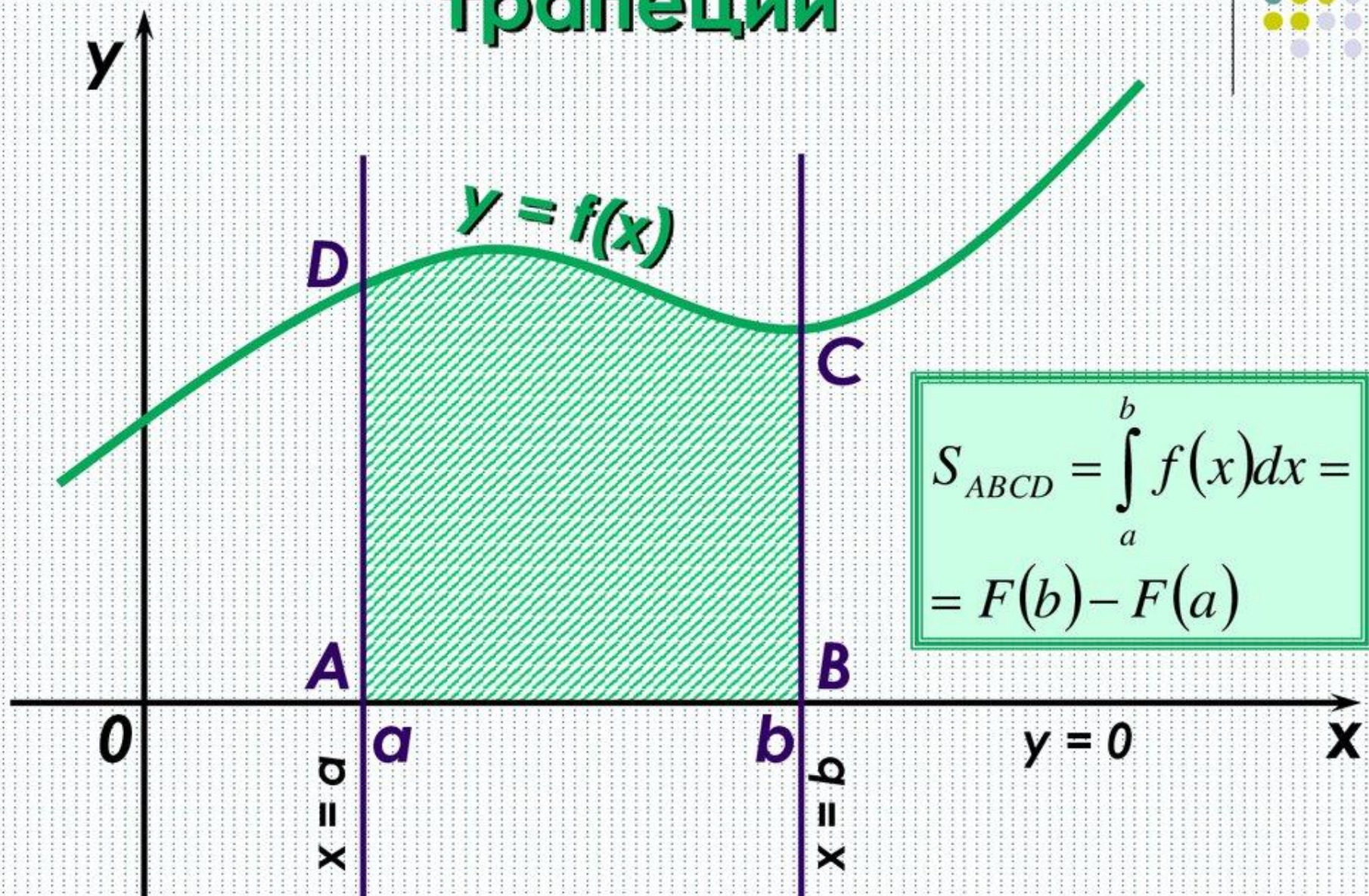
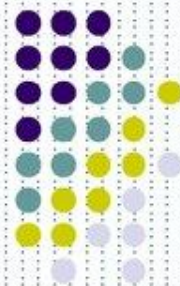


Криволинейная трапеция

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком одной непрерывной функцией $f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком $[a;b]$ на оси Ox .



Площадь криволинейной трапеции



задание 1

Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной :
графиком функции $f(x) = x^2$ и прямыми $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Алгоритм решения:

1. Начертим все линии. Заштрихуем образованную ими криволинейную трапецию. Сделаем запись:
Фигура является криволинейной трапецией

2. Найдём одну из первообразных функции $f(x) = x^2$:

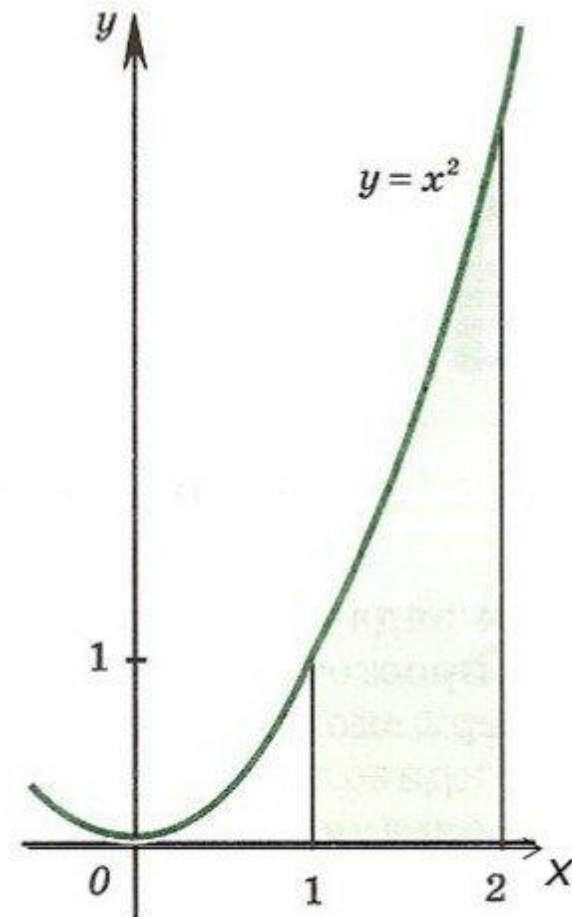
$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

3. По чертежу определим значения a и b

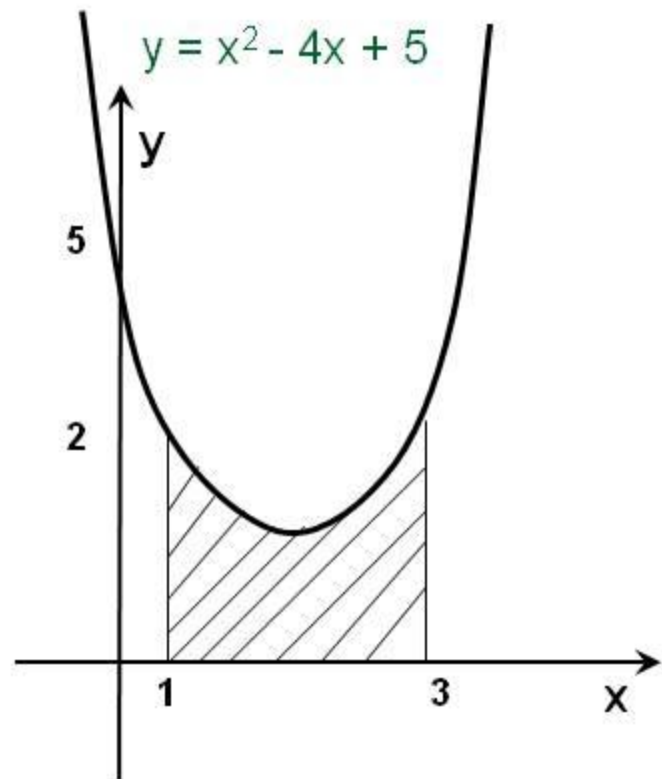
$$a = 1 \quad b = 2$$

4. Подставим полученные значения в формулу для нахождения площади криволинейной трапеции и вычислим

$$S_{\text{к.т.}} = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3} \quad (\text{кв.ед.})$$



Пример 1. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=x^2-4x+5$, $y=0$, $x=1$, $x=3$.

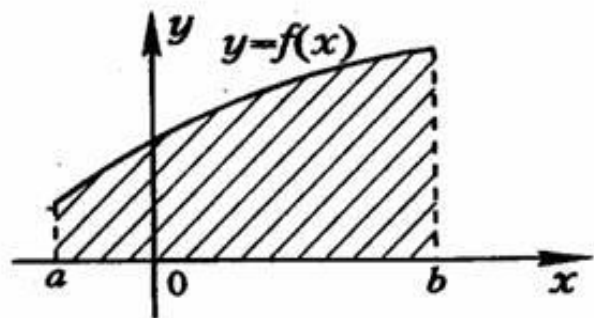


Решение

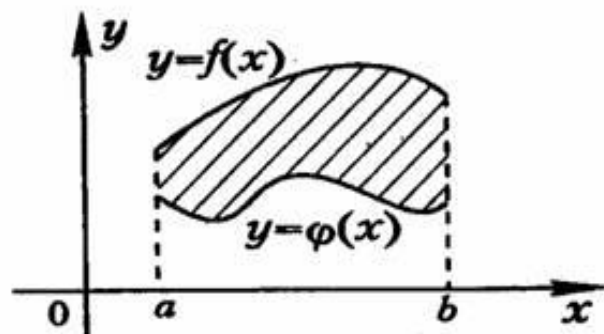
$$S = \int_1^3 (x^2 - 4x + 5) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x \right) \bigg|_1^3$$
$$= 9 - 18 + 15 - \left(\frac{1}{3} - 2 + 5 \right) = 6 - 3 - \frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Ответ: $S = 2\frac{2}{3}$

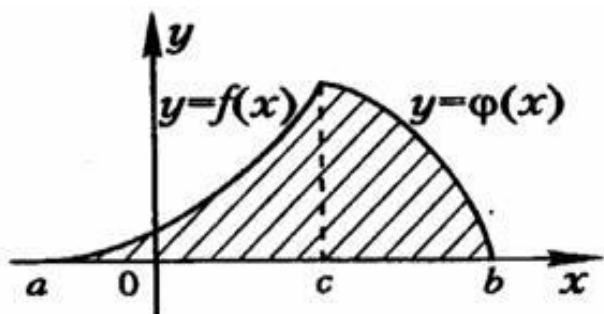
Вычисление площади криволинейной трапеции



$$S = \int_a^b f(x) dx$$



$$S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) dx$$



$$S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b \varphi(x) dx$$

Пример: №2

Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y = 0$

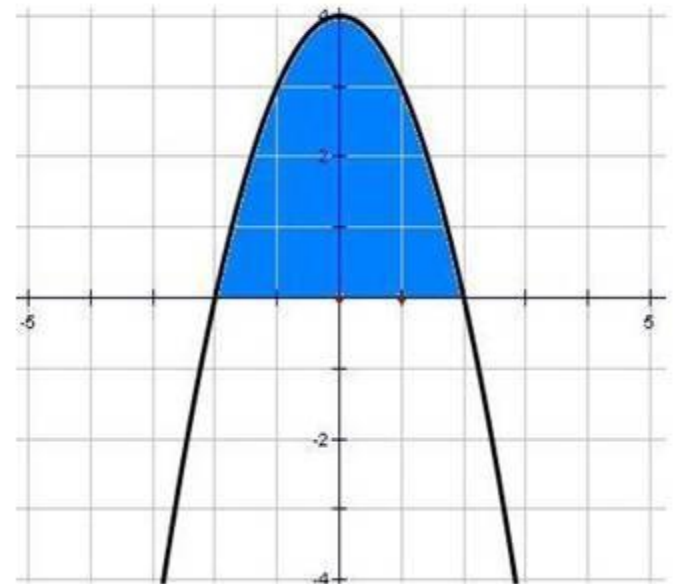
Решение:

1. $y = 4 - x^2$ – квадратичная функция, график – парабола, ветви направлены вниз, вершина (0;4)
 $y = 0$ – ось абсцисс.

2. Найдём точки пересечения параболы с осью X: $4 - x^2 = 0$;
 $x^2 = 4$
 $x = -2$ или $x = 2$

3. Найдём площадь криволинейной трапеции по формуле:

$$S = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = 10 \frac{2}{3} \text{ Кв ед.}$$



Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

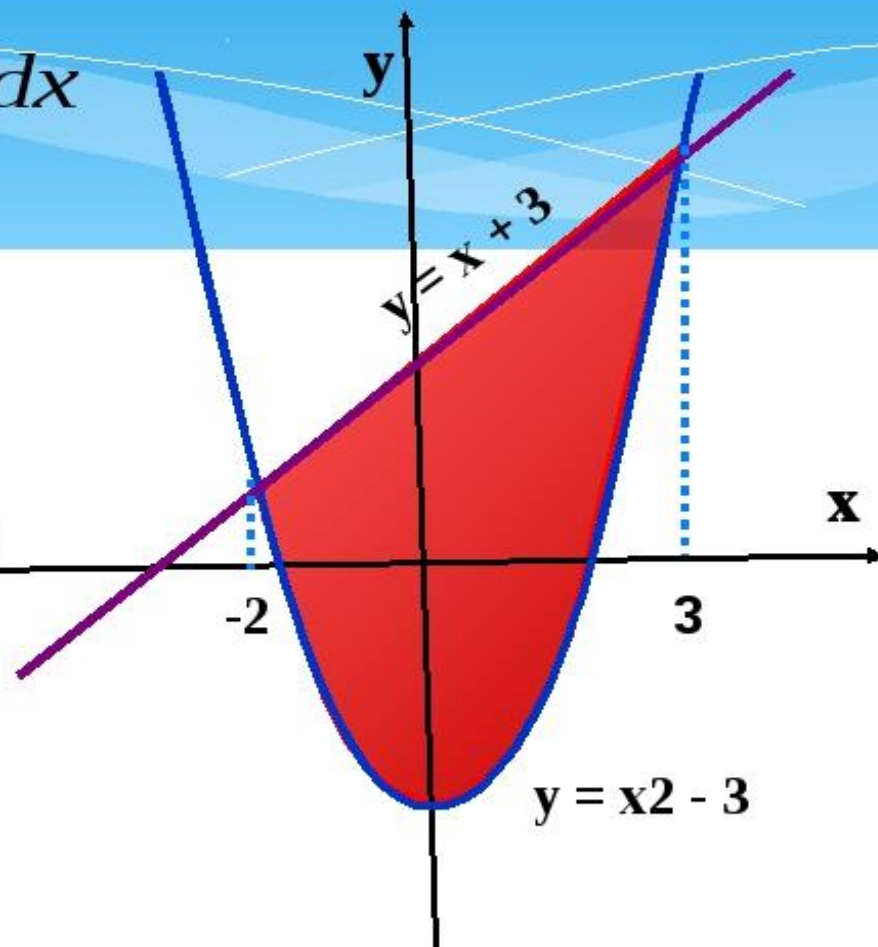
$$y = x - 3, \quad y = x^2 - 3$$

$$S = \int_{-3}^3 (x + 3 - (x^2 - 3)) dx$$

$$S = \int_{-2}^3 (x - x^2 + 6) dx$$

$$S = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 6x \right) \Big|_{-2}^3$$

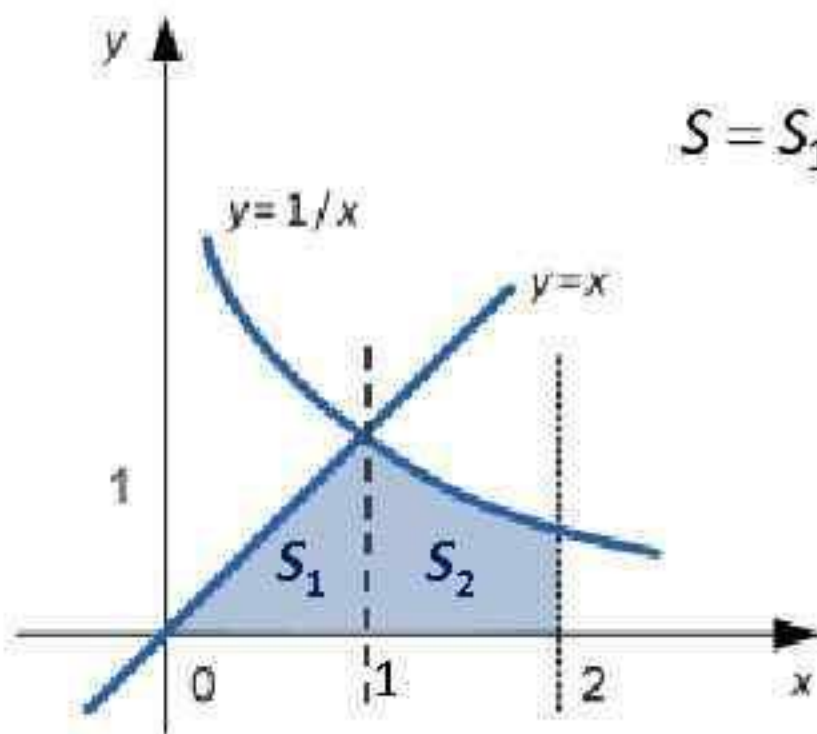
$$S = 11\frac{5}{6}$$





Иногда криволинейную трапецию приходится разбивать на несколько частей. Площадь всей трапеции есть сумма площадей всех частей

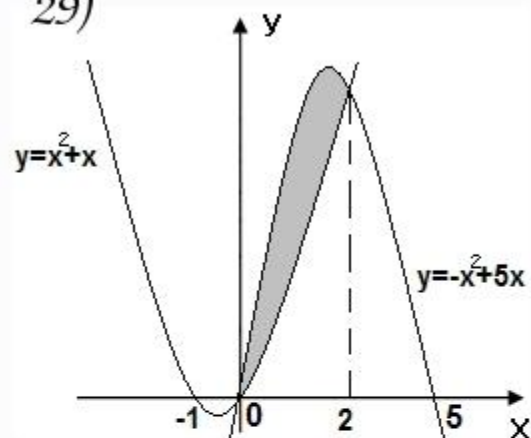
Пример: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = 1/x$, $x = 0$, $x = 2$



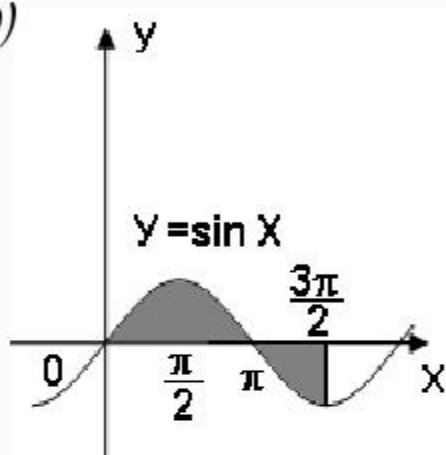
$$S = S_1 + S_2 = \int_0^1 x dx + \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \ln|x| \Big|_1^2 =$$
$$= \frac{1}{2}(1^2 - 0) + \ln 2 - \ln 1 = \frac{1}{2} + \ln 2$$

По готовым рисункам найти площади фигур, составив комбинации площадей криволинейных трапеций

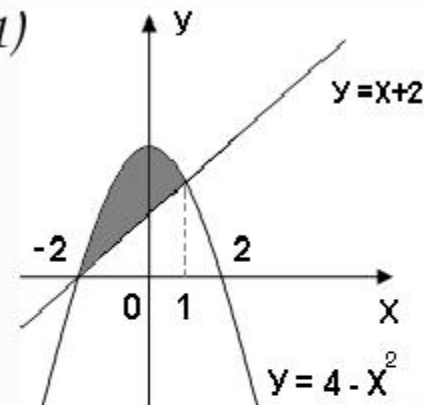
29)



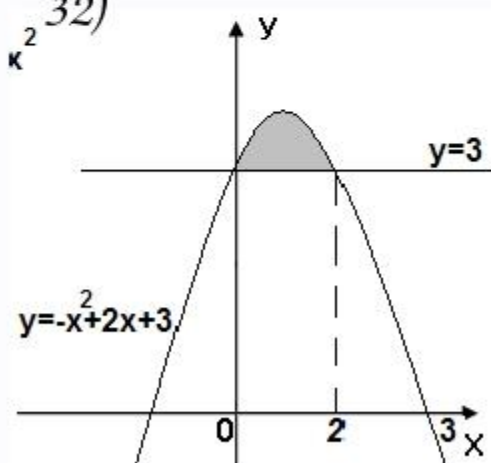
30)



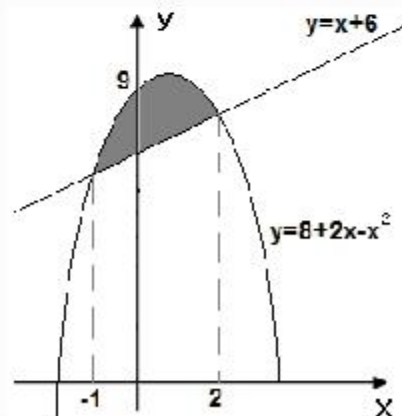
31)



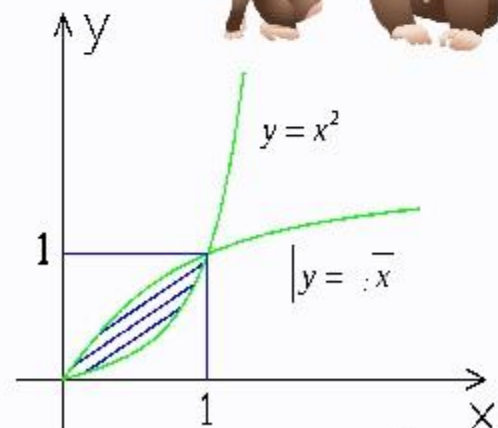
32)



33)



34)



Вычислите площадь фигуры, ограниченную линиями

$$1) y = -x^2 + 4, y = 0$$

$$2) y = \sin x, y = 0, x = 0, x = \pi$$

$$3) y = x^2, y = -3x$$

Закрепление

1. Сформулируйте геометрический смысл определенного интеграла
2. Запишите формулу для вычисления площади фигуры, ограниченной линиями
3. Сформулируйте алгоритм вычисления площади фигуры, ограниченной линиями.
4. Перечислите виды возможных ограничений для фигур и правила расчета из площадей